A3.6.1 Zeige

a) $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)$ für $x\in R$.

Bew: $\sin x=\sin(x/2+x/2)=\sin(x/2)\cos(x/2)+\cos(x/2)\sin(x/2)=$
$2\sin(x/2)\cos(x/2)$

b) $1-\cos x=2\sin^2(x/2)$ für $x\in R$

//**S3.6.3**(2104) Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen
$\forall$ $z=x+iy$, $z_1,z_2\in$ C gilt:

//3.) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1 \sin z_2$ (Additionstheoreme)//

Bew: $\sin^2(x/2) \underset{Addth, z_1=z_2=x/2}{=} \cos^2(x/2)-\cos x=1-\sin^2(x/2)-\cos x \Rightarrow$

$1-\cos x=2\sin^2(x/2)$

Bem: Die Aussagen a) und b(gelten sogar für $z\in C$)

c) $\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$ für $x,y\in(-\pi/2,\pi/2)$ mit $x+y\neq\pm\pi/2$.

Bew: $\tan(x+y)=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}=\dfrac{\cos x\sin y+\cos y\sin x}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}=\dfrac{\dfrac{\sin y}{\cos y}+\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1-\dfrac{\sin x}{\cos x}\dfrac{\sin y}{\cos y}}$

$=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$, falls $x,y\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ und $x+y\neq\pi/2+k\pi$, insbesondere $x,y\in(-\pi/2,\ \pi/2)$, $x+y\neq\pm\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, $x,y\in\mathbb{C}$.

d) $0<x-x^3/6<\sin x<x$ für $x\in(0,\sqrt{6})$.

Als Vorbereitung Variation des Leibnizkriteriums:

Vor: $a_n\downarrow 0\,(n\to\infty)\Rightarrow a_n>0\ \forall\ n$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konv und mit $S_n=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}a_{\nu}: n\in N_0\cup\{-1\}$,

$S:=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}a_{\nu}$ gilt: $S_{2n}\downarrow S\,(n\to\infty)$, $S_{2n+1}\uparrow S\,(n\to\infty)$ und

$|S-S_{n-1}|<a_n\ \forall\ n\in N_0$, insbesondere $S_{2n-1}<S<S_{2n}\ \forall\ n\in N_0$.

Bew: $S_{2n}=S_{2n-2}-a_{2n-1}+a_{2n}=S_{2n-2}-\underbrace{(a_{2n-1}-a_{2n})}_{>0}<S_{2n-2}\ \forall\ n\in N$

$S_{2n+1}=S_{2n-1}+\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{>0}>S_{2n-1}$ da $a_n\downarrow\ \forall\ n\in N_0$.

$S_{2n}=S_{2n-1}+a_{2n}>S_{2n-1}\ \forall\ n\in N_0$, insbesondere $S_{2n+1}=S_{2n}-a_{2n+1}<S_{2n}$

$S_{2n}<S_0=a_0\ \forall\ n$, $S_{2n+1}<S_0=a_0\ \forall\ n$, $S_1<S_{2n+1}<S_{2n}<S_0=a_0$. Also

$S_{2n}\downarrow$ und nach unten beschränkt $\Rightarrow\exists\ S:=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$.

$S_{2n+1}\uparrow$ und nach oben beschränkt $\Rightarrow\exists\ S^*:=\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}$.

Wegen $S^*-S=\lim_{n\to\infty}\underbrace{(S_{2n+1}-S_{2n})}_{=(-1)^{2n+1}a_{2n+1}}=-\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=0$ (da $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ nach Vor)

folgt $S^*=S\Rightarrow\lim_{n\to\infty}S_n$ existiert und $=S$ (denn S ist einziger HW von (S_n)) d.h. $S=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}a_{\nu}$ konvergiert.

Weiter gilt $S_{2n-1}<S<S_{2n}\ \forall\ n\in N_0$ (da $S_{2n+1}\uparrow S\,(n\to\infty)$ und $S_{2n}\downarrow S\,(n\to\infty)$)

$$\Rightarrow |S-S_{n-1}|=\begin{cases}S-S_{2m-1}<S_{2m}-S_{2m-1}=a_{2m}=a_n, falls\ n=2m\\ S_{2m-2}-S<S_{2m-2}-S_{2m-1}=a_{2m-1}=a_n, falls\ n=2m+1\end{cases}$$

also $|S-S_{n-1}|<a_n\ \forall\ n\in N_0$.

Jetzt zur eigentlichen Aufgabenstellung z.z.
$0<x-x^3/6<\sin x<x$ für $x\in(0,\sqrt{6})$.

Bew:1.Möglichkeit (mit obiger Variante Leibnizk)

Sei $x\in(0,\sqrt{6})$ bel. fest, $a_n:=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $S_n:=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu \Rightarrow$

$\sin x=\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu a_\nu$, $S_0=x_0=x$, $S_1=x-x^3/6 \Rightarrow$

$a_n\downarrow$ denn $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+1)!\,x^{2n+3}}{(2n+3)!\,x^{2n+1}}=\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\underbrace{\leq}_{n\geq 0}\frac{x^2}{6}<\frac{6}{6}=1$, da

$x\in(0,\sqrt{6})\Rightarrow a_n\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}0$, denn $\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu a_\nu$ konvergiert absolut

(Konvergenz ist ja schon bekannt) Leibnizkriterium anwendbar: $\Rightarrow$

$0\underbrace{<}_{x\in(0,\sqrt{6})}x(1-x^2/6)=x-x^3/6=S_1<\sin x<S_0=x$

$S_{2n}\downarrow \sin x$, $S_{2n+1}\uparrow \sin x \Rightarrow \underbrace{S_1}_{0<x-\frac{x^3}{6}}<\sin x<\underbrace{S_0}_{x}$

$(x-x^3/6=x(1-x^2/6)>0)$

2.Möglichkeit $x>0$ (direkt) $0<x-x^3/6<\sin x<x$ für $x\in(0,\sqrt{6})$

*//**S3.1.2** (1602)Rechenregeln für unendliche Reihen//*

//Vor:Seien $(z_\nu),(w_\nu)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty}z_\nu,\sum_{\nu=0}^{\infty}w_\nu$ konvergent.//

//Beh:Notwendiges Konvergenzkriterium//

// 6.)Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0:=0$, $n_k<n_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}_0$ eine Teilfolge von //

// $(n)_{n=0}^{\infty}$ und setzt man $c_\nu:=\sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1}z_k$, $\nu\in\mathbb{N}_0$,(zwischen n_ν und $n_{\nu+1}$

// gibt es einige n_k) so konvergiert die unendliche Reihe //

// $\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu=\sum_{k=0}^{\infty}z_k$ (d.h. in konvergenten Reihen//

// darf man beliebig Klammern setzen).//

$$(.)\sin x-(x-x^3/6)=\sin x-x+x^3/6=\underbrace{\sum_{\nu=2}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}_{\text{konvergent*}}\underbrace{=}_{S3.1.2\,6)}$$

$$*\ \frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\frac{x^{11}}{11!}+-..=\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6*7}\right)+\frac{x^9}{9!}\left(1-\frac{x^2}{10*11}\right)+..$$

$$\sum_{\mu=2}^{\infty}\underbrace{\frac{x^{4\mu+1}}{(4\mu+1)!}}_{\geq 0}\underbrace{\left(1-\frac{x^2}{(4\mu+2)(4\mu+3)}\right)}_{\geq 0}\geq\frac{x^5}{5!}\left(1-\frac{x^2}{6*7}\right)>0 \text{ falls}$$

$x^2<6\cdot 7=42 \Rightarrow x<\sqrt{6} \Rightarrow$

$\sin x>x-x^3/6=x(1-x^2/6)>0\ \forall\ x\in(0,\sqrt{6})$

$$(..)\sin x-x=\underbrace{\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^\nu\frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}}_{\text{konvergent*}}\underbrace{=}_{3.1.2\,6)}$$

$$*\ -\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+-..=-\frac{x^3}{3!}\left(1-\frac{x^2}{4*5}\right)-\frac{x^7}{7!}\left(1-\frac{x^2}{5\cdot 9}\right)+..$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(\underbrace{-\frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!}}_{¿0} \Big) \Big(\underbrace{1-\frac{x^2}{(4m)(4m+1)}}_{³0} \Big) \leq -\frac{x^3}{3!} \Big(1-\frac{x^2}{4*5}\Big) < 0 \text{ falls}$$

$x^2<4 \cdot 5=20$ insbesondere für $x^2<6 \Rightarrow x \in (0, \sqrt{6})$.

$\sin x<x$, $x<\sqrt{6} \Rightarrow \sin x-x^3/6=x(1-x^2/6)>0 \ \forall \ x \in (0, \sqrt{6})$

e) Auf $\mathbb{C}$ gilt

$x \equiv y$ genau dann, wenn $|z|=|w|$

Äquivalenzrelation? Äquivalenzklassen? Ggf zu $z=2$?

Lös: $z \sim w$ reflexiv, da $|z|=|z|$,

$z \sim w$ symmetrisch, da $|z|=|w| \Rightarrow |w|=|z$

$z \sim w$ transitiv, da $|z|=|w|$ & $|w|=|v| \underbrace{\Rightarrow}_{wegen\ =} |z|=|v|$

Äquivalenzrelation, Äqivalenzklasse zu 2: $\{z \in \mathbb{Z} \mid |z|=2\}$

f) Konvergiert $c_n=e^{2\pi in}$ für $n \to \infty$

Lös: $c_n=e^{2\pi in}=\cos(2\pi n)+i\sin(2\pi n)=\cos(0)+i\mathrm{Sin}(0)=1 \Rightarrow$ konvergent

g) Konvergiert $d_n=e^{3\pi in}$ für $n \to \infty$

Lös: $\exists$ Teifolge $d_{2n}=e^{6\pi in}=(e^{2\pi in})^3 \underbrace{=}_{f)} 1^3=1$ &

$\exists$ Teifolge $d_{2n+1}=e^{6\pi in+3\pi i}=(e^{2\pi in})^3(e^{3\pi i})=1*(e^{3\pi i})=e^{\pi i}=-1$

$\exists$ HW $1,-1 \Rightarrow d_n$ divergent