A4.2.1 $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^k = \begin{cases} x^2\sum_{k=0}^{\infty}(1-x^2)^k = 1, \text{ falls } x\in[-1,1]\ /\{0\} \\ 0, \text{ falls } x=0 \end{cases}$

Lösung: $|1-x^2|<1 \Leftrightarrow -1<1-x^2<1 \Leftrightarrow -2<-x^2<0 \Leftrightarrow 0<|x|<\sqrt{2} \Rightarrow$

Für $x\in[-1,1]\backslash\{0\}$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^k = \dfrac{x^2}{1-(1-x^2)} = 1 \Rightarrow$

\# Sprungstelle in x=0, Sprunghöhe 1.

A4.2.2

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x^m-1}$

//**S1.7.2**(903) Vor.Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

Lös:.. $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.2} \lim_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sum_{k=0}^{n-1}x^k}{(x-1)\sum_{k=0}^{m-1}x^k} = \dfrac{\sum_{k=0}^{n-1}x^k}{\sum_{k=0}^{m-1}x^k} = n/m$

b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^r-1}{x-1}$, $r\in\mathbb{Q}$ (fest)

Lös: Sei $r=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$

- $q=1$, d.h. $r=p\in\mathbb{Z}$

  $r\geq 0$: $\dfrac{x^r-1}{x-1} \underbrace{=}_{S1.7.2} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \underbrace{\to}_{x\to 1} \sum_{\nu=0}^{\infty} 1^\nu = r$

  $r<0$: Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$. ObdA $x_n\neq 0\ \forall n$

  Sei $y_n := \dfrac{1}{x_n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1 \Rightarrow \dfrac{x_n^r-1}{x_n-1} = \dfrac{(y_n^{-r}-1)(-y_n)}{(y_n^{-1}-1)(-y_n)} =$

  $\underbrace{\dfrac{y_n^{-r}-1}{y_n-1}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -r,\, da\ -r\geq 0} \underbrace{(-y_n)}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} -1} = r \quad \overset{a)}{\underbrace{\Rightarrow}_{Folgenkrit}} \quad \lim_{x\to 1}\dfrac{x^r-1}{x-1} = r$

- • Algemein... Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\backslash\{1\}$: $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$.

  Def $y_n := x_n^{\frac{p}{q}}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1 \Rightarrow \dfrac{x_n^r-1}{x_n-1} = \left(\dfrac{y_n^p-1}{y_n-1}\right) / \left(\dfrac{y_n^q-1}{y_n-1}\right) \overset{*}{\underbrace{\Rightarrow}_{n\to\infty}} r \Rightarrow$

  Beh, denn q te Wurzel ist stetig (siehe 4.3)

c) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$

Lös: $\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{x}\right]+r,\ r\in[0,1),\ \lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]=\lim\limits_{x\to 0} x\left(\frac{1}{x}-r\right)=\lim\limits_{x\to 0}(1-xr)=1$

Andere Formulierung:

$$\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]+1 \Rightarrow \frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}\quad\forall\ x\ne 0 \Rightarrow \begin{cases}1-x<x*\left[\frac{1}{x}\right]\le 1\ \forall x>0\\ 1-x>x*\left[\frac{1}{x}\right]\ge 01\ \forall x<0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}<x*\left[\frac{1}{x}\right]<\underbrace{1+|x|}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\quad\forall\ x\ne 0 \underset{\text{Sandwichs Grenzwert mit Folgenkrit}}{\Rightarrow} \exists \lim_{x\to 0}\lim_{x\to 0}\ x\left[\frac{1}{x}\right]=1$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(-1)^{[x]}}{x}=0$

A4.2.3 Es seien die Funktionen f,h: R→R definiert durch

$f(x)=\begin{cases}x\ \text{für}\ x>0\\ 0\ \text{für}\ x\le 0\end{cases}$ und $h(x)=\begin{cases}1\ \text{für}\ x\ne 0\\ 0\ \text{für}\ x=0\end{cases}$.

Existiert $\lim\limits_{x\to 0}(h\circ f)(x)$?

Lös: $(h\circ f)(x)=\begin{cases}1, falls\, x>0\\ 0, falls\, x\le 0\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0_+}(h\circ f)(x)=1\ne 0=\lim\limits_{x\to 0_-}(h\circ f)(x) \Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to 0}(h\circ f)(x)$ existiert nicht(vgl S4.2.3 4.))

\# $\nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$ da $\lim\limits_{x\to 0_-} f(0)=0\ne \underset{x>0}{x}=\lim\limits_{x\to 0_+} f(0)$

A4.2.4 Untersuche folgende Grenzwerte mit Hilfe der Definition:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x-1} \text{ für } x \neq 1 \\ 0 \text{ für } x = 1 \end{cases}$ mit einem festen $n\in\mathbb{N}_0$.

//**S1.7.2**(903) $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$, 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum\limits_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$//

//**S4.2.2**(2310) Vor: Geg. $f,g:D\to\mathbb{K}$ und HP z_0

//1.) Beh: $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)=w_0$ & $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=w_1 \Rightarrow \exists$ (..) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=w_0w_1$

Lös: Ohne Def:Für $x\neq 1$: $f(x)=\frac{x^n - 1}{x-1} \underset{S1.7.2}{=} \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} x^\nu \ (\to \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} 1^\nu = n)$, genauer…

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \lim_{x\to 1} x^\nu \underset{S4.2.11.)}{=} \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lim_{x\to 1} x)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1} 1 = n$$

Beh: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=n$.

Bew: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: |f(x)-n|<\varepsilon \ \forall x\in\mathbb{R}$ mit $0<|x-\underbrace{1}_{x_0}|<\delta$.

Sei $\varepsilon>0$ bel fest. Wähle $\delta=\min\{1, \frac{\varepsilon}{2^n}\} \Rightarrow |f(x)-\underbrace{n}_{\sum_{\nu=0}^{n-1} 1}| =$

$$|\sum_{\nu=0}^{n-1} (x^\nu - 1)| \underset{S1.7.2\ 2.)}{=} |\sum_{\nu=0}^{n-1} (\sum_{\mu=0}^{\nu-1} x^\mu)(x-1)| \le (\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \underbrace{|x|^\mu}_{\le 2^\mu})|x-1| \le$$

$$(\sum_{\nu=0}^{n-1} \underbrace{\frac{2^\nu - 1}{2-1}}_{\le 2^\nu})|x-1| \le \sum_{\nu=0}^{n-1} 2^\nu |x-1| = \frac{2^n - 1}{2-1}|x-1| \le 2^n|x-1| < 2^n\delta \le \varepsilon \quad \forall x\in\mathbb{R}: 0<|x-1|<\delta$$

(insbesondere ist $|x|\le 2$)

Es wurde also gezeigt: $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0: |f(x)-n|<\varepsilon \ \forall x\in\mathbb{R}: 0<|x-1|<\delta$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^r - 1}{x-1}$, $r\in\mathbb{Q}$ (fest)

Lös: Sei $r=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$

- $q=1$, d.h. $r=p\in\mathbb{Z}$

  $r\ge 0$: $\frac{x^r - 1}{x-1} = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \underset{x\to 1}{\to} \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} 1^\nu = r$

  $r<0$: Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$. ObdA $x_n\neq 0 \ \forall n$

  Sei $y_n := \frac{1}{x_n}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow \frac{x_n^r - 1}{x_n - 1} = \underbrace{\frac{y_n^{-r} - 1}{x_n - 1}}_{\underset{n\to\infty}{\to} -r, da -r\ge 0} \underbrace{(-y_n)}_{\underset{n\to\infty}{\to} -1} = r \underset{Folgenkrit}{\Rightarrow}$

  $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^r - 1}{x-1}$

- • Algemein... Sei (x_n) beliebige Folge aus $\mathbb{R}\setminus\{1\}$: $x_n \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

  Def $y_n := x_n^{\frac{p}{q}}$, $n\in\mathbb{N} \Rightarrow y_n \underset{n\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow \frac{x_n^r - 1}{x_n - 1} = \left(\frac{y_n^p - 1}{y_n - 1}\right) / \left(\frac{y_n^q - 1}{y_n - 1}\right) \underset{n\to\infty}{\overset{*}{\to}} r \Rightarrow$

  Beh, denn q te Wurzel ist stetig

einfachere Variante:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^m - 1}$

Lös:.. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k}{(x-1)\sum_{k=0}^{m-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\sum_{k=0}^{m-1} x^k} = n/m$

c) $f(0,\infty)\to \mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$ fest, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{3x^n + 2}{x^2 + 1} = ?$

//**S1.7.2**(903) Vor.Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

//**D4.2.1** 3.) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$ (bzw. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=a\in\mathbb{R}$):

// $\Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ c>0$ mit $|f(x)-a|<\varepsilon\ \forall\ x>c$ (bzw $\forall\ x<-c$).

Lös:1.Fall:n=0 oder n=1. Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$ bel.(fest). Wähle $c=\max\{5/\varepsilon,1\} \Rightarrow$

$$|f(x)-0| \underset{x>0}{=} \frac{3x^n + 2}{x^2 + 1} \underset{2\le 2x^n}{\le} \frac{5x^n}{x^2} \underset{n=0 \text{ oder } 1}{\le} \frac{5x}{x^2} = 5/x < 5/c \le \varepsilon\ \ \forall\ x>c$$

2.Fall:n=2. Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$.

Bew:Sei $\varepsilon>0$ bel.(fest). Wähle $c=\sqrt{1/\varepsilon}$ ($\Rightarrow c>0$) $\Rightarrow$

$$|f(x)-3| = \left|\frac{3x^2 + 2 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1}\right| = \left|\frac{-1}{x^2 + 1}\right| < 1/x^2 < 1/c^2 = \varepsilon\ \ \forall\ x>c$$

3.Fall:$n\ge 3$, Beh: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ d.h. $\forall\ k>0\ \exists\ c>0: f(x)>k\ \forall\ x>c$.

Bew:Sei $k>0$ beliebig(fest). Wähle $c=\max\{1,k\} \Rightarrow c>0 \Rightarrow$

$$f(x) = \frac{3x^n + 2}{x^2 + 1} \underset{x\ge 1}{\ge} \frac{3x^n}{x^2 + x^2} > \frac{3}{2} x^{n-2} \underset{n\ge 3}{\ge} x > c \ge k\ \ \forall\ x>c$$

d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2}, & \text{für } x \neq -2 \\ 0, & \text{für } x = -2 \end{cases}$?

Lös: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existiert nicht

Bew: Sei $a\in\mathbb{R}$ beliebig $|f(x)-a| = \begin{cases} |1-a|, & \text{falls } x > -2 \\ |-1-a| = |1+a|, & \text{falls } x < -2 \\ |-a|, & \text{falls } x = -2 \end{cases}$

1.Fall: a=1. Wähle $\varepsilon=|1+a|$ ($\Rightarrow \varepsilon>0$). Sei $\delta>0$ bel.
Wähle $x\in \overset{o}{U}_\delta(-2)$ mit $x<-2 \Rightarrow |f(x)-a|=|1+a|\geq\varepsilon$

2.Fall: $a\neq 1$. Wähle $\varepsilon=|1-a|$ ($\Rightarrow \varepsilon>0$). Sei $\delta>0$ bel.
Wähle $x\in \overset{o}{U}_\delta(-2)$ mit $x>-2 \Rightarrow |f(x)-a|=|1-a|\geq\varepsilon$

Es wurde also gezeigt: $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists\ \varepsilon>0\ \forall\ \delta>0\ \exists\ x\in \overset{o}{U}_\delta(-2)$: $f(x)-a|\geq\varepsilon$ d.h. es gilt nicht :
$\exists\ a\in\mathbb{R}\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0\ \forall\ x\in \overset{o}{U}_\delta(-2)$: $|f(x)-a|<\varepsilon$ d.h. es gilt nicht:
$\exists\ a\in\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=a$.

Alternativ: Aus D4.2.1 folgt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert $=a \Leftrightarrow$
$\lim\limits_{x\to x_{0+}} f(x) = \lim\limits_{x\to x_{0-}} f(x)=a$ existiert.

Es gilt: $\lim\limits_{x\to -2_+} f(x)=1$ (Zu $\varepsilon>0$ bel. Wähle $\delta>0$ bel $\Rightarrow$
$|f(x)-1|=0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}: -2<x<-2+\delta$)
und $\lim\limits_{x\to -2_-} f(x)=-1$ (Zu $\varepsilon>0$ bel. Wähle $\delta>0$ bel $\Rightarrow$
$f(x)-(-1)|=0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}: -2-\delta<x<-2$)
$\lim\limits_{x\to -2_+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to -2_-} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x\to -2} f(x)$ existiert nicht

e) $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4x+4}{x-2} & \text{für } x\neq 2 \\ 0 & \text{für } x=2 \end{cases}$?

Lös: $f(x)=\dfrac{(x-2)^2}{x-2}=x-2$ falls $x\neq 2$. Beh: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=0$.
Bew: Sei $\varepsilon>0$ beliebig. Wähle $\delta=\varepsilon \Rightarrow$
$|f(x)-0|=|x-2|<\delta=\varepsilon\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}:\ 0<|x-2|<\delta$

f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) \text{ für } x\neq 0 \\ 0 \text{ für } x=0 \end{cases}$?

Lös: Beh: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

Bew: Sei $\varepsilon>0$. Wähle $\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x)-0| \underset{x\neq 0}{=} |x|\underbrace{|\sin 1/x|}_{\leq 1\ *} \leq |x-|<\delta=\varepsilon\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}: 0<|x|<\delta$.

Zu *: $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$ gilt: $|\sin\alpha|\leq 1$ (und $|\cos\alpha|\leq 1$), denn
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\leq 1 \Rightarrow |\sin\alpha|\leq 1$
(und $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\leq 1 \Rightarrow |\cos\alpha|\leq 1$)

A4.2.5 Betrachte die Funktion $f:D\to \mathbb{R}$ und bestimme folgende Grenzwerte im Fall ihrer Existenz:

//**S1.7.2**(903) Vor.Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$ 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

//**S4.2.2**(2310) Vor: $f,g:D\to\mathbb{K}$ & HP z_0

//1.) Beh: $\exists \lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$ & $\lim_{z\to z_0} g(z)=w_1 \Rightarrow \exists \lim_{z\to z_0}(\alpha f(z)+\beta g(z))=\alpha w_0+\beta w_1$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{K})$

a) $\lim_{x\to a} f(x)$, $f(x)=\frac{x^k - a^k}{x - a}$ mit $k\in\mathbb{N}$ und $a\in\mathbb{R}$ sowie $D=\mathbb{R}\setminus\{a\}$.

Lös:Für $x\neq a$ gilt $f(x)=\frac{x^k - a^k}{x - a} \underbrace{=}_{S1.7.2} \sum_{\nu=0}^{k-1} x^\nu a^{k-1-\nu} \underbrace{\to}_{x\to a} \sum_{\nu=0}^{k-1} a^\nu a^{k-1-\nu} \underbrace{=}_{S4.2.21.)} ka^{k-1}$

b) $\lim_{x\to 2} f(x)$, $f(x)=\frac{x^3 + 2x^2 - 11x + 6}{x - 2}$ mit $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lös:$x^3+2x^2-11x+6=(x-2)(x^2+4x-3)$.

$f(x)=x^2+4x-3 \underbrace{=}_{S4.2.21.)} \lim_{x\to 2} f(x)=2^2+4*2-3=9$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2}$ mit $D=(-1,1)\setminus\{0\}$.

Lös:Für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $(-1,1)\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n=0$ gilt

$$f(x_n)=\frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{x_n^2}\frac{1 + \sqrt{1 - x_n^2}}{1 + \sqrt{1 - x_n^2}}=\frac{1 - (1 - x_n^2)}{x_n^2(1 + \sqrt{1 - x_n^2})}=\frac{1}{1 + \sqrt{1 - x_n^2}}$$

$\overset{n\to\infty}{\to} 1/2 \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=1/2$

d) $\lim_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ mit $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lös:Für $x\neq 0$ gilt:$f(x)=\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k + 1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k + 1)!} \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 0^{2k}}{(2k + 1)!} \underbrace{=}_{A4.2.4d)} 0$$

A4.2.6 Bestimme folgende Grenzwerte im Fall ihrer Existenz:

a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + x}$

Lös:$x\neq 0$: $\frac{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} \underbrace{\overset{x\to -\infty}{\longrightarrow}}_{S4.2.2} 2$

b) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2 + 2x + 1}-3x)$

Lös:Für jede Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ mit $x_n\to\infty$ gilt $\frac{1}{x_n}\overset{n\to\infty}{\to} 0$.

$$(\sqrt{9x_n^{\,2} + 2x_n + 1}-3x_n)\frac{\sqrt{9x_n^2 + 2x_n + 1} + 3x_n}{\sqrt{9x_n^2 + 2x_n + 1} + 3x_n}=\frac{9x_n^2 + 2x_n + 1 - 9x_n^2}{\sqrt{9x_n^2 + 2x_n + 1} + 3x_n}=$$

$$\frac{x_n(2 + \frac{1}{x_n})}{x_n\left(\sqrt{9 + \frac{2}{x_n} + \frac{1}{x_n^2}} + 3\right)} \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{9} + 3}=1/3$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(-1)^{[x]}x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Lös:Es sei $\varepsilon>0$ baf. Setze $x_0(\varepsilon):=1/\varepsilon$. Dann gilt für $x\geq x_0(\varepsilon)$:

$$\left|\frac{(-1)^{[x]}x}{x^2+1}-0\right|=\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}\leq\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(-1)^{[x]}x}{x^2+1}=0$$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x$, $x\in\mathbb{R}$

*//**S2.3.10** (1403)$[(1+1/n)^n,(1+1/n)^{n+1}]$ ist für eine Intervallschachtelung//*

// mit $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=:e$, $n\in\mathbb{N}$ d.h. $2{,}37<e<3{,}16$

//#S2.3.4(1401) $a,b,x\in\mathbb{R}$, $a>0$: $x\mapsto a^x>0$ & $\uparrow$ falls $a>1$

// ohne Bew: $a^x \underset{a<b}{\leq} b^x$ für $x>0$

Lös: $x\to\infty \Rightarrow x>0$. Z.z. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$.

$$(1+1/n)^n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e,\quad (1+1/n)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e,\quad (1+\overbrace{1/\underbrace{x}_{\geq[x]}}^{\leq 1/[x]})^x \underset{s2.3.4}{\leq} (1+1/[x])^{[x]+1}$$

Für $x\in[n,n+1]$ gilt: $(1+1/x)^x\leq(1+1/n)^{n+1}$ & $(1+1/x)^x \underset{s2.3.4}{\geq} (1+\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq\frac{1}{x}})^{n\leq x}$.

$$e=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{}1} \Rightarrow$$

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)$: $|(1+\frac{1}{n})^{n+1}-e|<\varepsilon$ & $|(1+\frac{1}{n+1})^n-e|<\varepsilon$ $\forall\ n\geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow$

$x\geq n_0(\varepsilon)$!!!: $(1+1/x)^x-e\leq(1+1/n)^{n+1}-e<\varepsilon$ & $(1+1/x)^x-e\geq(1+\frac{1}{n+1})^n-e \underset{*}{\geq} -\varepsilon \Rightarrow$

$|(1+1/x)^x-e|<\varepsilon\ \forall\ x\geq n_0(\varepsilon) \underset{\varepsilon\ beliebig,\ fest}{\Rightarrow}$ Beh

* Damit $\geq$-richtung beibehalten wird $>-\varepsilon$ geschrieben... eine richtige Aussage

e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3}$

Lös: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - xe^{x/2}}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - 1 - x\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{2^k k!}}{x^3} =$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - 1 + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - x(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}) - \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{2^k k!}}{x^3} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{8} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k-1}(k-1)!}}{x^3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \lim_{x\to 0} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^{k-3}}{k!} + \lim_{x\to 0} \sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^{k-3}}{2^{k-1}(k-1)!} =$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \lim_{x\to 0} x \underbrace{\sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^{k-4}}{k!}}_{<e^x} + \lim_{x\to 0} x \underbrace{\sum_{k=4}^{\infty} \frac{x^{k-4}}{2^{k-1}(k-1)!}}_{<e^x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}\,(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

Lös:.. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}(x + 1 - x)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x} + 1} = 1/2$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{2 - x} - \frac{12}{8 - x^2}\right)$

Lös: $a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{\nu=0}^{n} a^{\nu} b^{n-\nu} \Rightarrow \underbrace{8}_{=2^3} - x^3 = (2-x)(x^2+2x+4) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2 - x}\left(1 - \frac{12}{x^2 + 2x + 4}\right) = \frac{1}{2 - x} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 2x + 4} = \frac{-4 - x}{x^2 + 2x + 4} \underset{x\to 2}{\longrightarrow} \frac{-4 - 2}{2^2 + 2*2 + 4} = \frac{1}{2}$$

h) $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^n = \begin{cases} x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (1 - x^2)^n = 1, \ falls\ x \in [-1,1]\ /\{0\} \\ 0, \ falls\ x = 0 \end{cases}$

Lösung: $|1-x^2|<1 \Leftrightarrow -1<1- x^2<1 \Leftrightarrow -2<-x^2<0 \Leftrightarrow 0<|x|<\sqrt{2} \Rightarrow$

Für $x\in[-1,1]$ gilt $\sum_{k=0}^{\infty} x^2(1-x^2)^n = \frac{1}{1 - (1 - x^2)} = \frac{1}{x^2}$