3. (1600) Unendliche Reihen

3.1 (1600) Definition und Konvergenz

D3.1.1 (1600)

(.) Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset K$ gegeben. Dann heißt die Folge $(S_n)_{n=0}^{\infty}$,

definiert durch $S_n := \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$, $n \in N_0$, unendliche Reihe, für die

kurz $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ geschrieben wird. S_n heißt die n-te Partialsumme

von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ und Z_n deren n-ter Summand.

(..) Eine unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ heißt konvergent: $\Leftrightarrow$

$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S \in K$. Dann schreibt man auch $S = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.

Andernfalls heißt $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ divergent.

Bem: 1.) Das Symbol $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ ist generell nur Abkürzung für die

Folge $\left(\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu\right)_{n=0}^{\infty}$ und im Falle der Konvergenz bedeutet

$\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ zusätzlich $\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$.

2.) Für $m \in Z$ bedeutet $\sum_{\nu=m}^{\infty} z_\nu$ die Folge $\left(\sum_{\nu=m}^{n} z_\nu\right)_{n=m}^{\infty}$.

//**D2.2.5** (1309) Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aus R konvergiert uneigentlich gegen ∞

// (bzw $-\infty$): $\Leftrightarrow$ $\forall$ $K \in R$ $\exists$ $n_K \in N$ mit $a_n \underset{(\leq)}{\geq} K$ $\forall$ $n \geq n_K$, und man schreibt://

// $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty(-\infty)$ bzw $a_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} \infty(-\infty)$//

3.) Für $(a_n) \subset R$ ist uneigentliche Konvergenz von

$\left(\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right)_{n=0}^{\infty}$ gegen ∞ oder $-\infty$ wie in **D2.2.5** erklärt

4.) Ist $(S_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$ eine beliebige Folge, so ist mit

$z_\nu := S_\nu - S_{\nu-1}$, $\nu \in N_0$, $S_{-1} := 0$, $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$ $n \in N_0$, d.h. jede

Folge lässt sich als Reihe schreiben.

Andere Formulierung:

Unendliche Reihen sind nichts anderes als Folgen (S_n) mit Zuwächsen $z_\nu := S_\nu - S_{\nu-1}$, $\nu \geq 1$, $z_0 = S_0$.

Bsp:1.)) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ für $z\in\mathbb{C}$. $S_n=\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{1}{1-z}$ für $|z|<1$

2.) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ konvergent (Bew siehe weiter vorne mit Teleskopsumme und Cauchy)

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergent, harmonische Reihe, konvergiert uneigentlich gegen ∞.

3.) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ divergiert, weil $S_{2n+1}\equiv 0$, $S_{2n}\equiv 1$

4.) $\Delta z_k=z_{k+1}-z_k$, $\sum_{k=0}^{\infty}(\Delta z_k)$. $S_n=\sum_{k=0}^{n}(\Delta z_k)=z_0-z_{n+1}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$

z_n konvergent. Falls $z_n\xrightarrow{n\to\infty} z\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}\Delta z_k=z_0-z$

5.) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$ konvergiert.

*//**S1.7.4**(906)//*

//6.) $\forall\, a,b,z\in\mathbb{C}$ und $n\in\mathbb{N}_0$ gilt//

// $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$, wenn man $a^0=b^0=(a+b)^0$ setzt//

// $(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$//

//S1.7.4 (906) $n,k\in\mathbb{N}_0$: 4.) $\frac{n^k}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{n}\right)\leq\binom{n}{k}\leq\frac{n^k}{k!}$ //

Bew: $\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|\underbrace{=}_{S1.7.4}\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\right)\right|=$

$\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n^k}\left(\frac{n^k}{k!}-\binom{n}{k}\right)\right|\underbrace{=}_{*}\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n^k}\left(\frac{n^k}{k!}-\binom{n}{k}\right)\right|\underbrace{\leq}_{**}\frac{1}{n}\left|\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{k!}\right|=$

$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}=$

$\frac{1}{n}\left(2+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{(k-2)!}\right)=\frac{1}{n}\left(2+\sum_{k=2}^{n-2}\underbrace{\frac{1}{k!}}_{\leq\frac{1}{k(k-1)}=\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}}\right)\underbrace{\leq}_{***}3/n$

* $\frac{n^0}{0!}-\binom{n}{0}=\underbrace{1}_{D1.7.1\ 1.)}-\underbrace{1}_{D1.7.1\ 2.)}=0$, $\frac{n^1}{1!}-\binom{n}{1}=n-n=0$

** ($\underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.4\ 4.)}$ $\frac{n^k}{k!}-\frac{n^k k(k-1)}{k!n}\leq\binom{n}{k}\Rightarrow\frac{n^k}{k!}-\binom{n}{k}\leq\frac{k(k-1)}{k!n}n^k$

*** $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots\left(\frac{1}{n-2-1}-\frac{1}{n-2}\right)<1$

D3.1.2(1602) Für ein $z\in\mathbb{K}$ heißt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ die geometrische Reihe.

S3.1.1(1602) Die geometrische Reihe ist divergent $\forall\ z\in\mathbb{K}$ mit $|z|>1$.
Sie konvergiert $\forall\ z$ mit $|z|<1$ und es gilt
$\sum_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}\ \ \forall\ |z|<1.$

*//**S1.7.2**(903) Endliche geometrische Reihe//*
Vor.Seien $a,b\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$//

$$//\text{Beh: 1.)}\ \sum_{k=0}^{n} a^k=\begin{cases} n+1, & a=1\\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, & a\neq 1\end{cases}$$

*//**S2.1.2**(1250) Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//12.) Für $z_n=z^n$, $n\in\mathbb{N}$, mit einem $z\in U_1(0)$ gilt: $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$//

Bew: $S_n=\sum_{k=p}^{n} z^k \underset{S1.7.2}{=} \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ für $z\neq1$. Für $|z|>1$ folgt deswegen $|S_n|\to\infty$, also Divergenz der Reihe. Für $|z|<1$ ist z^n eine Nullfolge und daraus folgt $\lim_{n\to\infty}\frac{1-z^n}{1-z}=\frac{1}{1-z}$, also die Konvergenz der Reihe gegen den Wert $\frac{1}{1-z}$.
Dass die geometrische Reihe auch für $|z|=1$ divergiert, folgt aus S3.1.2 5.) und der Tatsache, dass z^n in diesem Fall keine Nullfolge ist, wie nach S3.1.2 5.) andere Formulierung für konvergierendes S_n Bedingung.

S3.1.2(1602) Rechenregeln und Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Vor: Seien $(z_\nu),(w_\nu)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu, \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.

Beh: Notwendige Konvergenzkriterien
Zu 1.) und 2.), siehe auch Bem unten

1.) Die Partialsumme $S_n=\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu$, $n\in\mathbb{N}_0$, ist beschränkt.

Bew: Aus Konvergenz folgt Beschränktheit,

*//**S2.1.2**(1250) Eigenschaften konvergenter Folgen//*
//Vor: Seien $(a_n),(b_n),a,b$ aus $\mathbb{R}$, $(z_n),(w_n),w,z,z_0$ aus $\mathbb{C}$, konvergent mit//
// $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, $w_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$.//
//2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Cauchy Folge, d.h. //
// (*) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \forall\ n,m\geq n_0$//

2.) $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Bew: $S_n=\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \underset{n\to\infty}{\rightarrow} S\in\mathbb{C} \Rightarrow S_n-S_{n-1}=z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} S-S=0$ oder folgt aus Cauchy Kriterium für m=n-1 oder

Sei $\varepsilon>0 \Rightarrow \exists\ N\in\mathbb{N}$: $\#|\sum_{k=0}^{n} a_k-\sum_{k=0}^{n+1} a_k|\#=|\sum_{k=n+1}^{n+1} a_k|<\varepsilon\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\geq N \Rightarrow$

d.h. $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge $\Rightarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge

3.) Ist $\sum_{k=p}^{n} z_k$ konvergent und ist $\lambda \in K$ beliebig, so ist

auch $\sum_{k=p}^{n} \lambda z_k$ konvergent und es gilt $\sum_{k=p}^{n} \lambda z_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} z_k$.

4.) $\forall\ \alpha,\beta \in C$ ist $\sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha z_\nu + \beta w_\nu) = \alpha \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu + \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.

//S2.1.2 (1250) Vor:Seien $(z_n),(w_n)$ aus C, konvergent mit//
//$z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, $w_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w$, $w,z \in C$. Beh: 5.) $\lim_{n\to\infty}(z_n+w_n)=z+w$//

Bew: $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.12\,5\,5.)}$ Rechenregeln für Folgen $\underbrace{\to}_{n\to\infty}$ α ¿ $\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty}}_{\infty\ bedeutet Grenzwert}$ $z_\nu + \beta \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$

5a) Für den Reihenrest gilt $R_m := \sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu = (\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu \to S} - \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $m \in N_0$,

d.h. es gilt $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

Bew: $R_m = S_\nu - S_m = S - S_m$, d.h. R_m ist eine konvergente unendliche Reihe.

$R_m = S - S_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu - \sum_{\nu=0}^{m} z_\nu$.

Da $S_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} S$ folgt $S - S_m = R_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\left(\sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0\right)$

Andere Formulierung und Verhalten z_k:

5b) Falls eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} z_k$ in K konvergiert, folgt auch die Konvergenz

von $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ $\forall$ $m \geq p$ und es gilt $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$, $\lim_{m\to\infty} \sum_{k=m}^{\infty} z_k = 0$.

Bew: $S_n := \sum_{k=p}^{n} z_k$ $\forall$ $n \geq p$. Die Konvergenz von $\sum_{k=m}^{\infty} z_k$ ist klar, da die zugehörige Partialsummenfolge sich von der Folge (S_n) nur um eine additive Konstante unterscheidet.
Setzt man q=1 in folgender Bem 1.), so folgt, dass (z_k) Nullfolge sein muß. Läßt man hingegen $q\to\infty$ gehen, so folgt $\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\right| \leq \varepsilon$ für $n \geq N$

und daher ist $\left(\sum_{k=m}^{\infty} z_k\right)$ eine Nullfolge.

$\sum_{k=p}^{m-1} z_k + \sum_{k=m}^{\infty} z_k = \sum_{k=p}^{\infty} z_k$ endlich viele erste Glieder unwichtig

$\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} z_k\right| < \varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{q\to\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} z_k\right| \leq \varepsilon$

6.) Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0:=0$, $n_k<n_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}_0$ eine Teilfolge von $(n)_{n=0}^{\infty}$ und setzt man $c_\nu:=\sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} z_k$, $\nu\in\mathbb{N}_0$, (zwischen n_ν und $n_{\nu+1}$ gibt es einige n_k) so konvergiert die unendliche Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu=\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ (d.h. in konvergenten Reihen darf man beliebig Klammern setzen).

*//**S2.2.1** (1301) Vor: z_n konvergent mit $z_n\to z\,(n\to\infty)$//*
//Beh: Jede Teilfolge (z_{ν_n}) von (z_n), Umordnung und triviale Abänderung//
// ist konvergent mit $z_{\nu_n}\to z\,(n\to\infty)$//

Bew: $\sum_{\nu=0}^{k} c_\nu \underbrace{=}_{\text{Assoziativgesetz}} \sum_{\mu=0}^{n_{k+1}-1} z_\mu = S_{n_{k+1}-1} \underbrace{\to}_{S2.2.1} S=\sum_{\mu=0}^{\infty} z_\mu$.

Bem: 1.) Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen.

Sei $(z_n)\subset\mathbb{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit

$|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$. (d.h. $|S_n-S_m)|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$).

Andere Formulierung:

Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} z_k$ in $\mathbb{K}$ ist genau dann konvergent, wenn

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,q\in\mathbb{N}: n\geq\max\{N,q-1\}\ \overbrace{n+1>N, n+\underbrace{q}_{\in N\Rightarrow q\geq 1}>N\Rightarrow n+q\geq n+1}^{gilt}\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+q} z_k\right|<\varepsilon$

$|S_n-S_m|\ \underbrace{=}_{m=(n+q)\in N} \left|\sum_{k=n+1}^{n+q} z_k\right|$,

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{R}_+\ \forall\ n,n+q\in\mathbb{N}: n,n+q>N\ \Rightarrow\ |S_n-S_{n+q}|<\varepsilon$

*//**D2.1.3** (1250) (z_n) in K Cauchyfolge:*
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in R_+\ \forall\ n,m\in N: n,m\geq N$ ist $|z_n-z_m|<\varepsilon$
*//**S2.2.5** (1307) $(z_n)\subset C$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ (z_n) ist eine Cauchyfolge //*
// $Re(z_n)$ und $Im(z_n)$ sind Cauchyfolgen.//

Bew: Ersetze in D2.1.3 m durch n+q und die Folge (z_n) durch die Partialsummenfolge (S_n) und wende S2.2.5 an.
(entspricht Cauchy Kriterium für Partialsummenfolgen (S_n))

2.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu$ ist divergent, da $s_{2n+1}=0$, $s_{2n}=1\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$.

$\sum_{\nu=0}^{\infty} ((-1)^{2\nu}+(-1)^{2\nu+1})=\sum_{\nu=0}^{\infty} 0=0$.

Bsp:1.) $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ ist divergent für $|z|>1$, $z_n=z^n$, $|z_n|=|z|^n \not\to 0$

notwendiges Kriterium verletzt.

2.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist konvergent

Bew: $\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\right| \underset{\#}{\leq} \left|\frac{(-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+2} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+3} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+4} \pm \ldots \frac{(-1)^n}{n}\right| =$

$\left|(-1)^{m+1}\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \ldots \pm \frac{(-1)^n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \varepsilon \quad \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$

mit gewissen $n_1(\varepsilon)$, weil $1/n\to 0$ und $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergent ist.

\# $\quad \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+2} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+3} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+4} \ldots$

\# $\quad$ alle Terme haben gleiches Vorzeichen

D3.1.3(1605)Eine Summe der Form $\sum_{k=p}^{q} (b_k-b_{k+1})$ heißt Teleskopsumme, eine Reihe derselben Form (also mit $q=\infty$) heißt Teleskopreihe.

S3.1.3(1605)Eine Teleskopreihe konvergiert, wenn $(b_k)\in\mathbb{R}$, eine Nullfolge ist und in diesem Fall ist der Wert gleich b_p.

Bew:Durch Induktion folgt $\sum_{k=p}^{q} (b_k-b_{k+1})=b_p-\underbrace{b_{q+1}}_{\to 0} \quad \forall\ p\leq q$ und daraus folgt die Beh.

A3.1.1 Zeige: zu jeder Folge $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ existiert genau eine Folge $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ mit

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k,\ n\geq 1$

Lös:Geg $S_n=\sum_{k=p}^{\infty} \underbrace{a_k}_{S_n-S_{n-1}}$ $(n\geq p+1)$, $S_p=a_p$

A3.1.2 Verwandle die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ in eine Teleskopreihe.

Zeige dadurch ihre Konvergenz und berechne ihren Wert.

Lös:Tip:$a_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}$

A3.1.3 $(a_n)_{n=1}^{\infty} \searrow$, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Zeige: $\lim_{n\to\infty} na_n=0$

//**S3.1.2**(1602) Vor: (z_ν) und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent. *2.)* $z_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$//

//Bem:1.) Sei $(z_n)\subset \mathbb{C}$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ *konvergiert* $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$

// *mit* $|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$. *(d.h.* $|S_n-S_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n>m\geq n_1(\varepsilon)$*).//*

Bew: Zu zeigen: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |na_n-0|<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0$. Sei $\varepsilon>0$ baf

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \underset{S3.1.2\ 2.)}{\underbrace{\to}} \overbrace{0(\nu\to\infty)}^{a_\nu} <\infty \underset{S3.1.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \exists\ n_1\in\mathbb{N}\ \ \sum_{\nu=n_1+1}^{n} a_\nu<\varepsilon/2<\varepsilon\ \ \forall\ n>n_1+1 \ \underset{\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu<\infty\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n=0}{\underbrace{\Rightarrow}}$$

* $\exists\ n_2\in\mathbb{N}\ \ a_n=|a_n-0|<\frac{1}{n_1}\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\geq n_2$.

Wähle $n_0=\max\{n_1+1,n_2\} \Rightarrow |na_n-0|=na_n=(n-n_0)a_n+n_0a_n=$

$$\left(\sum_{\nu=n_0+1}^{n} \underbrace{a_n}_{\leq a_\nu}\right)+n_0a_n\leq\left(\underbrace{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu}_{<\frac{\varepsilon}{2},da\ \nu\geq n_0\geq n_1+1}\right)+\underbrace{n_0a_n}_{<\frac{\varepsilon}{2}da\ n\geq n_2\ \forall n>n_0}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq n_0.$$

\# * genügt hier nicht :
\# $\exists\ n_0(\varepsilon)>n_1$:und $n>n_0$: $|na_n-0|=na_n=(n-n_0)a_n+n_0a_n=$

$$\left(\sum_{\nu=n_0+1}^{n} \underbrace{a_n}_{\leq a_\nu}\right)+n_0a_n\leq\left(\underbrace{\sum_{\nu=n_0+1}^{n} a_\nu}_{<\frac{\varepsilon}{2},da\ \nu\geq n_0\geq n_1+1}\right)+\underbrace{n_0a_n}_{<\frac{\varepsilon}{2}da\ a_n\underset{n\to\infty}{\to}0}<\varepsilon.?$$

D3.1.4(1606) Eine Reihe $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ in $\mathbb{R}$ heißt alternierend, falls
$a_k=(-1)^k|a_k|$ für alle $k\geq p$

S3.1.4(1607) Leibniz Kriterium

Vor: $(a_n)\subset \mathbb{R}, a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$.

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots$ ist konvergent.

Mit $S_n := \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu a_\nu$, $n\in\mathbb{N}_0$ gilt $S_{2n}\searrow$ $S_{2n+1}\nearrow$

Fehlerabschätzung $S_{2n}-S_{2n+1}=a_{2n+1}$, $S_{2n}-S_{2n-1}=a_{2n}$.

Bem: $[S_{2n+1}, S_{2n}]$, $n\in\mathbb{N}_0$ ist eine Intervallschachtelung, die sich auf $S=\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ zusammenzieht.

Bew: $S_{2n}=S_{2n-2}-\underbrace{(a_{2n-1}-a_{2n})}_{\geq 0}\leq S_{2n-2}$, $S_{2n+1}=S_{2n-1}+\underbrace{(a_{2n}-a_{2n+1})}_{\geq 0}\geq S_{2n-1}$

$|a_n|\subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu = a_0 - a_1 + a_2 - \ldots,$

$S_0=a_0$, $S_2=a_0-a_1+a_2=a_0-(\underbrace{a_1-a_2}_{\geq 0})\leq S_0$, $S_{2n}=S_{2n-2}-(\underbrace{a_{2n-1}-a_{2n}}_{\geq 0})\leq S_{2n-2}$,

$S_1=a_0-a_1$, $S_3=a_0-a_1+a_2-a_3=S_1+\underbrace{a_2-a_3}_{\geq 0} \Rightarrow S_3\geq S_1$,

$S_{2n+1}=S_{2n-1}+\underbrace{a_{2n}-a_{2n+1}}_{\geq 0}\geq S_{2n-1}$,

$S_1\leq S_3\leq \ldots S_{2n+1}\leq S_{2n}\leq S_{2n-2}\leq \ldots S_2\leq S_0$, $(a_n \searrow 0$, d.h. $a_n\geq 0)$

$S_{2n+1}=S_{2n}-a_{2n+1} \Rightarrow S_{2n}-S_{2n+1}=\underbrace{a_{2n+1}}_{\geq 0} \searrow 0$

Andere Formulierung

Ist die Reihe $\sum_{k=p}^{n} a_k$ alternierend und ist die Folge $(|a_k|)_{k=q}^{\infty}$ für irgend ein $q\geq p$ eine monoton fallende Nullfolge, so ist die Reihe konvergent. Bezeichnet a den Wert der Reihe, so gilt immer $S_{2n+1}\leq a\leq S_{2n}$ $\forall$ $n\geq (q-1)/2$.

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//*

*//**D2.1.1** (1200) Bem 6.) $x_n, y_n\in R$. $\lim_{n\to\infty} x_n=x$, $\lim_{n\to\infty} y_n=y$, $x_n\geq y_n$ $\forall$ $n\geq n_0 \Rightarrow x\geq y$//*

Bew: Es sei $b_k=|a_k|$. Dann gilt für alle $n\geq 0$, dass

$S_{2n+1}=\sum_{j=0}^{n} a_{2j}+\sum_{j=0}^{n} a_{2j+1}=\sum_{j=0}^{n} (b_{2j}-b_{2j+1})$, und wegen der Monotonie folgt $b_{2j}-b_{2j+1}\geq 0$ für $2j\geq q$. Also ist $S_{2n+1}\geq S_{2n-1}$ für $2n>q+1$. Analog folgt aus $S_{2n}=b_0-\sum_{j=1}^{n} (b_{2j-1}-b_{2j})$ dass $S_{2n}\leq S_{2n-2}$ für $2n-1\geq q$. Außerdem ist $S_{2n+1}\leq S_{2n}$.

Daraus folgt mit S2.2.2 die Konvergenz von (S_{2n}) (gegen a=inf (S_{2n})) und (S_{2n+1}) (gegen b=sup S_{2n+1}) und aus D2.1.1 Bem 6 folgt $b\leq a$.

Der obige Satz bedeutet, dass alternierende Reihen mit p=0 leicht auf Konvergenz getestet werden können und dass man bei der Berechnung des Grenzwerts eine Fehlerabschätzung der Form $|a-S_n|\leq |a_{n+1}|$ für alle großen n hat. Andererseits ist die numerische Berechnung des Wertes der Partialsummen S_n oft kritisch wegen des Phänomens der Auslöschung führender Stellen.

Bsp:1.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu+1}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\sqrt{\nu+1}}$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu+2}$ sind konvergent

2.) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1}=\infty$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu+1}}=\infty$, $\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}$, $\frac{1}{\nu+1}<\frac{1}{\log(\nu+2)}$

3.) Später werden die Sinus- und Cosinusfunktion durch folgende Reihen definiert:

$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$, $\cos x=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Sei im Folgenden $x>0$ angenommen. Dann sind beide Reihen offenbar alternierend. Für $b_k=x^k/k!$ ist $b_k/b_{k+1}=(k+1)/x\geq 1$ falls nur $k\geq x-1$ ist. Daraus folgt, dass man den Leibniz'schen Satz mit p=0 und großem q anwenden kann #($b_k\searrow$)# um Konvergenz der Reihen zu zeigen(später wird dies auch für komplexes z gezeigt). Wenn $x\leq 3$ ist, kann man im Leibniz'schen Satz q=2 setzen und erhält folgende Abschätzungen:

$$\left.\begin{array}{l} x-x^3/6\leq \sin x\leq x-x^3/6+x^5/120 \\ 1-x^2/2\leq \cos x\leq 1-x^2/2+x^4/24 \end{array}\right\}\forall\ 0<x\leq 3$$

A3.1.4 Zeige die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k/k$. Diese Reihe heißt auch alternierende harmonische Reihe.

A3.1.5 Sei $a=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k+1)$. Wie groß muß n mindestens sein, damit $|a-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k/(k+1)|<10^{-6}$ gesichert ist?

Tip: $S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}$

A3.1.6 Benutze Abschätzung sin, cos siehe oben, D2.1.1 Bem 7 um zu zeigen, dass $\lim_{x\to 0_+}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0_+}\frac{\cos x-1}{x^2}=-1/2$.

Untersuche auch den linksseitigen Grenzwert.

// *7.) Sandwhichsatz//*

// *Seien (x_n^+), (x_n^-) und (y_n) Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt //*

// $\lim_{n\to\infty} x_n^+=\lim_{n\to\infty} x_n^-=x$ *und* $x_n^-\leq y_n\leq x_n^+ \Rightarrow \lim_{n\to\infty} y_n=x$.//

Tip: $\left|\sum_{k=n+1}^{n+q} a_k\right|\leq \sum_{k=n+1}^{n+q}|a_k|\leq\varepsilon$

A3.1.7 Bestimme den Wert der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(1/2)^k$

Lös: $=\sum_{k=0}^{\infty}(1/2)^k-1=\frac{1}{1-1/2}-1=1$

b) $\sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{k})$

Lös: $\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(\sqrt{2k+1} - \sqrt{k}}_{\geq 0}$. $S_k = \sum_{k=0}^{\infty} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{k})$ $\uparrow$.

$$\sqrt{2k+1} - \sqrt{k} = \frac{2k+1-k}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{2+\frac{1}{k}} + 1} \xrightarrow{k \to \infty} \infty \neq 0$$

S_k unbeschränkt $\Rightarrow$ $S_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$

Lös: $= \sum_{k=1}^{\infty} (\underbrace{\frac{1}{k}}_{b_k} - \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{b_{k+1}}) \xrightarrow{\text{Teleskops, } k \to \infty} 1$

A3.1.8 Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

Lös: $\frac{1}{k}$ fallende 0 Folge… Leibniz..a $\sum_{k=1}^{\infty}$ konvergent

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k(k+3)}}$

Lös:.. $\frac{1}{\sqrt[3]{k(k+3)}}$ monoton fallend $\sqrt{k(k+3)} \ldots \sqrt{\ } \ldots \sqrt[3]{\frac{1}{k(k+3)}}$ $\searrow$0 Folge..

$\sum_{k=1}^{\infty}$ konvergent

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k^{\frac{1}{2}(1+(-1)^k)}}$

Lös:…=(1/1-½²)+(1/3-¼²)+(1/5-1/6²)+…

alternierend…für Leibnizkrit erforderlich Vor:$|a_k|$ ↘

$|a_k|$:1, 1/4, 1/3, 1/16, 1/5, ...

$|a_k|<|a_{k+1}|$?:$|a_{2j}|=\frac{1}{(2j)^2}$, $|a_{2j+1}|=\frac{1}{(2j+1)}$,

Beh $\frac{1}{(2j)^2}<\frac{1}{(2j+1)}$ ⇔ $2j+1<4j^2...4j^2=2j2j \underset{j\geq 1}{\geq} 2j2>2j+1$ ⇒ $|a_k|\uparrow$

Beh Reihe bestimmt divergent gegen ∞.

Betrachtung Folge der Partialsummen:

$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot k^{\frac{1}{2}(1+(-1)^k)}} = \sum_{j=1,\ k=2j,\ k=2j-1}^{n} \left(\frac{1}{(2j-1)}-\frac{1}{(2j)^2}\right)$

$S_{2n+1}=\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{(2j-1)}-\frac{1}{(2j)^2}\right)+\frac{1}{\underbrace{(2n+1)}_{\to 0\,(n\to ¥)}}$

Noch zu zeigen: $S_{2n} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Beh $\frac{1}{2j-1}-\frac{1}{(2j)^2}>\frac{1}{4j}$ ⇔ $\frac{1}{2j-1}>\frac{j+1}{4j^2}$ ⇔ $\frac{2j-1}{(2j-1)^2}>\frac{j+1}{(2j)^2}$, denn

$2j-1<2j$ ⇒ $\frac{1}{(2j-1)^2}>\frac{1}{(2j)^2}$, $2j-1>j+1$ ∀ $j\geq 3$,

$S_{2n}>\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ oder $S_{2n}=\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1}}_{\infty}-\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2j}\right)^2}_{konv}$