4(2200) Funktionsgrenzwerte und stetige Funktionen

4.1(2200) Topologische Begriffe

D4.1.1(2200) $\mathbb{K}$ Körper, zum Bsp $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $M \subset \mathbb{K}$, $M \neq \emptyset$.

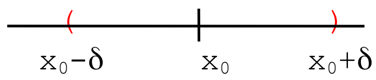
Für $z \in \mathbb{K}$ und $\delta > 0$ sei

$U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{K} \mid |z - z_0| < \delta\} = (z_0 - \delta, z_0 + \delta) = \delta$-Umgebung von z_0 in $\mathbb{K}$.

$\overset{o}{U}_\delta(z_0) := U_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{K} \mid 0 < |z - z_0| < \delta\}$.

Bsp für $\mathbb{R}$:

(und) gehören nicht zu $U_\delta(x_0)$ bzw $\overset{o}{U}_\delta(z_0)$



$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$

1.) • $z_0 \in M$ heißt innerer Punkt von $M :\Leftrightarrow \exists\ \delta > 0$ mit $U_\delta(z_0) \subset M$.

•• $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M

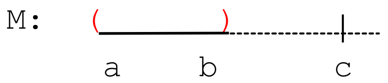
••• $\overset{o}{M}$ =offener Kern von M.

•••• M heißt offen: $\Leftrightarrow M = \overset{o}{M}$.

Andere Formulierung:

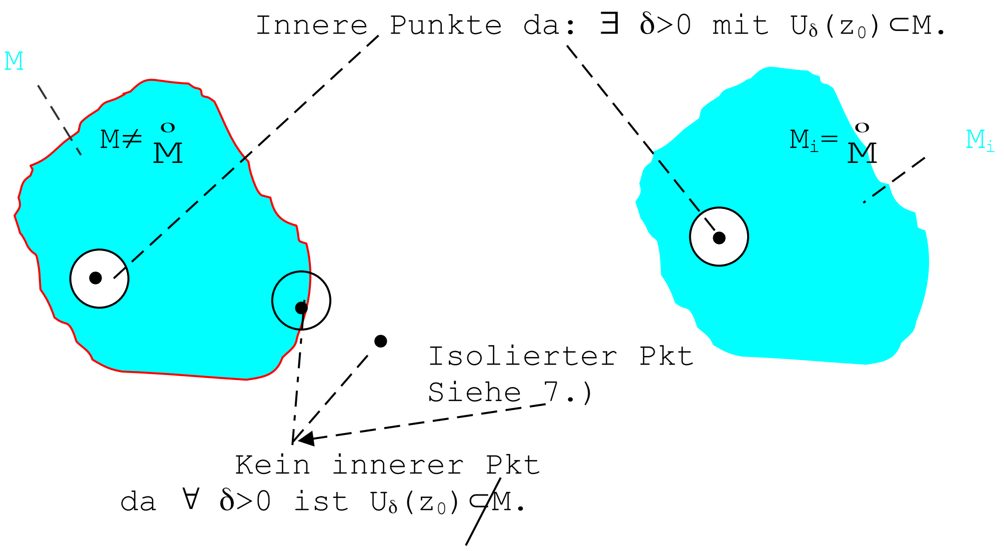
Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ heißt offen, wenn es zu jedem $\xi \in O$ eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(\xi)$ gibt mit $U_\varepsilon(\xi) \subseteq M$.

Bsp in $\mathbb{R}$:



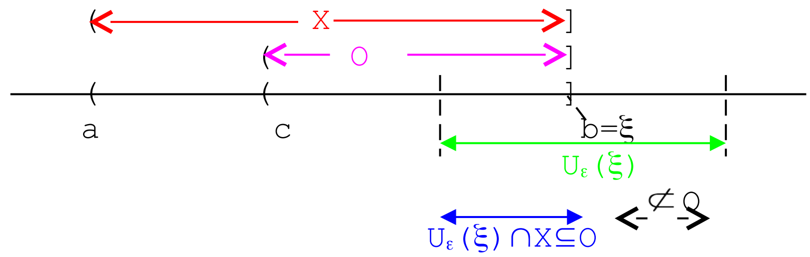
$\overset{o}{M} = (a,b)$

offene Intervalle, Endpunkte gehören nicht dazu, da $a\&b \notin M \Rightarrow U_\varepsilon(a\&b) \not\subseteq M$.



2.) Ist $X\subseteq K$, so heißt ein $O\subseteq X$ X-offen,
(bzw relativ offen bzgl X),
wenn es zu jedem $\xi\in O$ ein $U_\varepsilon(\xi)$ gibt, sodass $U_\varepsilon(\xi)\cap X\subseteq O$
gilt. # irgend ein $\varepsilon>0$

#Bsp: X: (a,b], O: (c,b], Untersuchung $b=\xi$



#O nicht offen, da $U_\varepsilon(\xi)\not\subset O$, aber X-offen, da auch für $b=\xi$ ein $\varepsilon<b-c$
#existiert, mit $U_\varepsilon(\underbrace{\xi}_{=b})\cap(a,b]=(b-\varepsilon,b]\subseteq O$

Achtung: In 2.4 Wird der Begriff Häufungswert behandelt.
Dieser gehört zu Folgen (siehe (2002)).
Der Häufungspunkt (HP) gehört zu Mengen

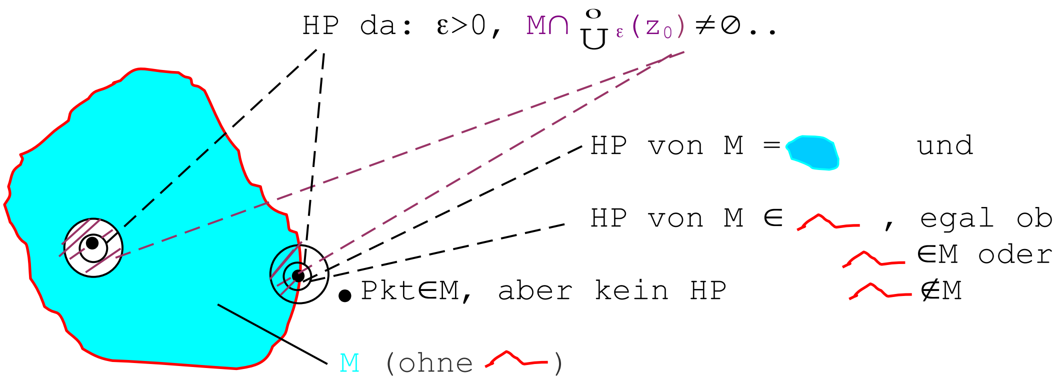
3.) $z_0\in K$ heißt Häufungspunkt (HP) von M:⇔ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap \overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$.

Andere Formulierungen:
Ein Punkt z_0 heißt Häufungspunkt (HP) einer Menge $D\subset K$, falls in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(z_0)$ unendlich viele Punkte von D liegen.

Bem: Äquivalent dazu:

1.) Mit $\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0):=U_\varepsilon(z_0)\setminus\{z_0\}$ (sog punktierte Umgebung von z_0)
gilt $\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\cap D\neq\emptyset\ \ \forall\ \varepsilon>0$

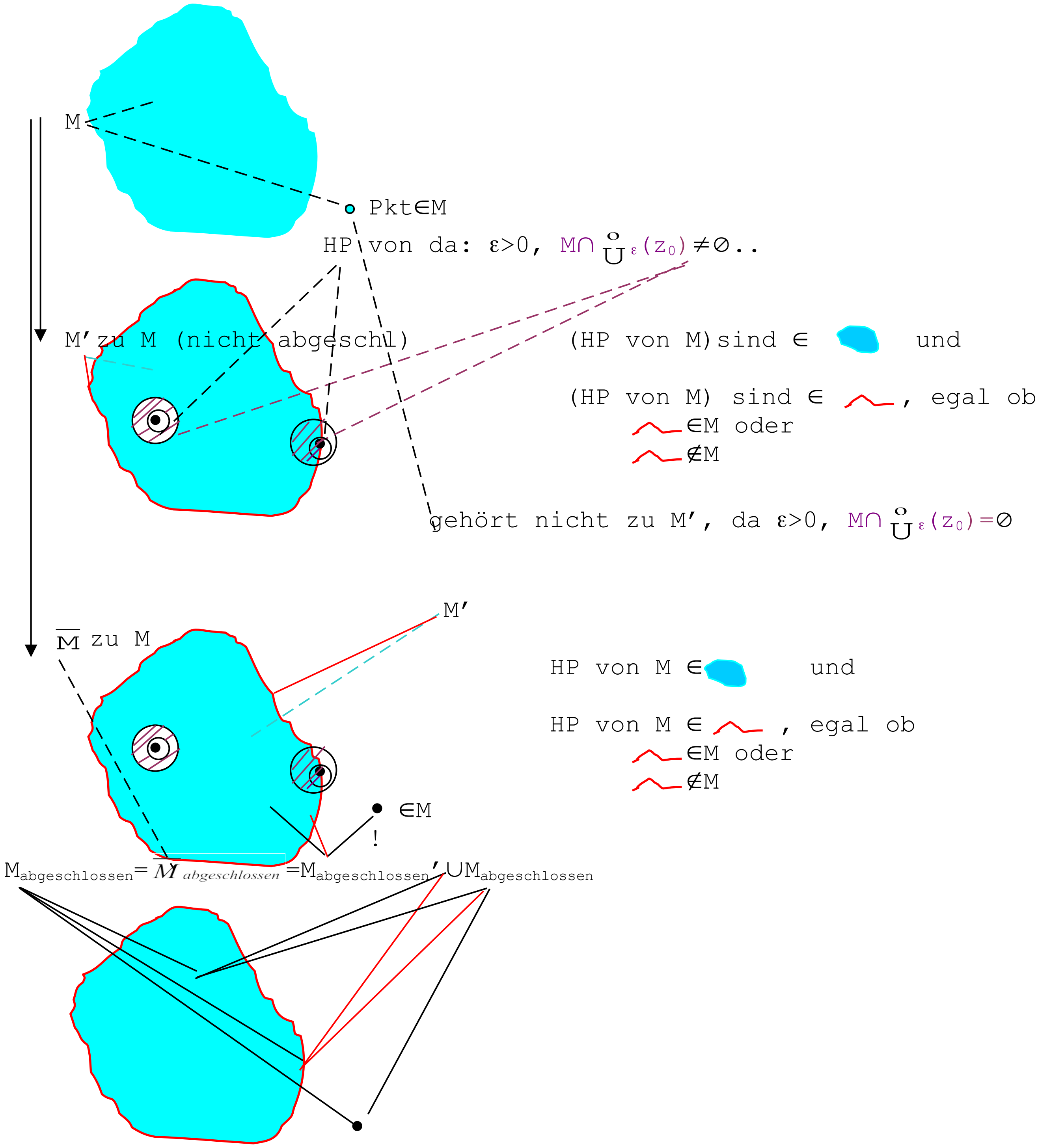
2.) $\exists\ (z_n)$ mit $z_n\in D\setminus\{z_0\}$, sodass gilt: $z_n\overset{n\to\infty}{\to}z_0$ (siehe auch S 4.1.1 4.)



Bsp: $M=((-2,+3]\setminus\{0\})\cup\{5\}$,
$\forall\ \varepsilon>0$: $((-2,+3]\setminus\{0\})\cup\{5\})\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(0)\neq\emptyset\ \Rightarrow$ 0 ist HP
$\varepsilon<2$: $((-2,+3]\setminus\{0\})\cup\{5\}\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(5)=\emptyset\ \Rightarrow$ 5 ist kein HP
$\forall\ \varepsilon>0$: $((-2,+3]\setminus\{0\})\cup\{5\}\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(-2)\neq\emptyset\ \Rightarrow$ - 2 ist HP
$\forall\ \varepsilon>0$: $((-2,+3]\setminus\{0\})\cup\{5\}\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(3)\neq\emptyset\ \Rightarrow$ 3 ist HP
x_0 kann also HP sein, auch wenn $x_0\notin M$, alle solchen x_0 „umranden"
also M, deshalb sinnvoll 4.):

4.) M' sei die Menge aller HP von M und
$\overline{M}:=M\cup M'$ die abgeschlossene Hülle von M.

M heißt abgeschlossen: $\Leftrightarrow$ M= $\overline{M}$ $\Leftrightarrow$ M' $\subset$ M. # M= $\overline{M}$ =M∪M' $\Leftrightarrow$ M' $\subset$ M



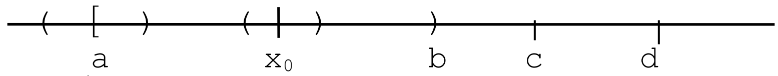
Andere Formulierung

4*.) M abgeschlossen $\Leftrightarrow$ Der Grenzwert jeder konvergenten Folge aus M liegt wieder in M

$(\forall\ (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in M,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x:\ x \in M)$

4.) $\underbrace{\Leftrightarrow}_{S4.1.1\ 4.)\ siehe Seite\ 2208}$ 4*.)

Bsp:
a) $M=(-2,+3]\setminus\{0\}\cup\{5\}$, $M'=[-2,+3]$,
$\overline{M}=((-2,+3]\setminus\{0\})\cup\{5\})\cup[-2,+3]=[-2,+3]\cup\{5\}$
$M \neq \overline{M} = M \cup M'$ $\Leftrightarrow$ $M' \not\subset M$ $\Leftrightarrow$ M nicht abgeschlossen

#b) 

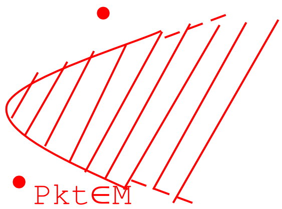
$M=\{([a,b)\setminus x_0),c,d\}$
$M'=[a,b]$

HP∈M innerer HP∉M
Pkt(auch HP)
#

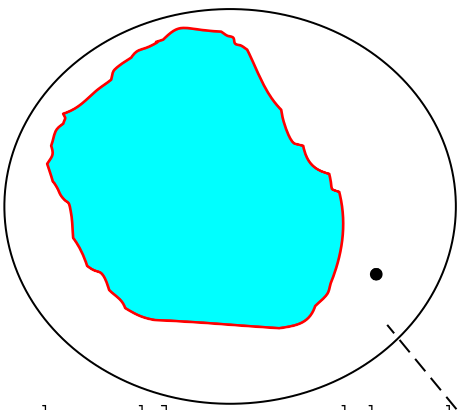
$\overline{M}=M\cup M'=\{[a,b],c,d\}$
$M\neq\overline{M}$, $M'\not\subset M$, da $b,x_0\notin M$
M nicht abgeschlossen

#c) $M=[1,2]\cup[3,4]\cup\{f\,|\,f\geq 5\}$ abgeschlossen

M durch —— angedeutet
M abgeschlossen, aber
unbeschränkt



$M_{\text{abgeschlossen}}$



5.)M heißt kompakt ⇔ M ist abgeschlossen und beschränkt
Andere Formulierung:
5*.) M kompakt ⇔
Jede Folge aus M besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wieder zu M gehört

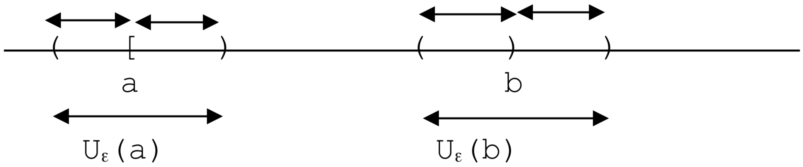
$(\forall\ (z_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $z_n\in M\ \exists\ (z_{n_k})_{k=1}^{\infty}\ \lim\limits_{k\to\infty} z_{n_k}=z\in M)$

Bew: 5*) ⇒ 5.)
4*.)M ⇒ abgeschlossen
M beschränkt da bei Annahme M unbeschränkt ⇒
$\exists\ (z_n)_{n=1}^{\infty},\ z_n\in M:\ |z_n|>n\ \Rightarrow\ \forall\ (z_{n_k})_{k=1}^{\infty}:\ |z_{n_k}|>n$, d.h. $(z_{n_k})_{k=1}^{\infty}$
unbeschränkt ⇒ (z_{n_k}) divergent ⇒
Widerspruch zu Teilfolge konvergent

Wozu Betrachtung von Teilfolgen?
$(z_n)_{n=1}^{\infty}$, $z_n\in M$ können sich beliebigen Werten von M
(vieleicht sogar allen) beliebig nahe nähern, aber ∃ eine
konvergente Teilfolge (d.h. die sich nur einem Wert von M annähert)
deren Grenzwert wieder zu M gehört......Richtig

6.) $z_0 \in \mathbf{K}$ heißt Randpunkt von M: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M \cap U_\varepsilon(z_0) \neq \emptyset$
und $\mathbf{K} \backslash M) \cap U_\varepsilon(z_0) \neq \emptyset$.

Bsp : $M=[a,b)$, $(\mathbf{R} \backslash M) \cap U^{\varepsilon}(a) \neq \emptyset$, $M \cap U_\varepsilon(a) \neq \emptyset$, $M \cap U_\varepsilon(b) \neq \emptyset$, $(\mathbf{R} \backslash M) \cap U_\varepsilon(b) \neq \emptyset$.



a,b Randpunkte ($b \notin M$)

7.) $z_0 \in M$ heißt isolierter Punkt von M: $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $M \cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)=\emptyset$.

Andere Formulierung:
$z_0 \in D$ heißt isolierter Punkt von M, falls es ein $\rho>0$ gibt derart, daß für alle anderen Punkte $z \in D \backslash \{z_0\}$ gilt $|z-z_0| \geq \rho$.

\# Ist ein isolierter Punkt ein innerer Punkt?
\# 1.) $z_0 \in M$ heißt innerer Punkt von M: $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $U_\delta(z_0) \subset M$.
\# z_0 ist isolierter Punkt $\Rightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ mit $M \cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)=\emptyset$ $\Rightarrow$
\# $\forall$ $\delta>0$ $\exists$ $z_{\notin M} \in \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)$ $\Rightarrow$ $\forall$ $\delta>0$ $U_\delta(z_0) \not\subset M$

8.) $\infty(-\infty)$ ist ein uneigentlicher HP von M, falls eine Folge (z_n) aus M existiert mit $|z_n| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty(-\infty)$.

Beispiele

1.) für Folgenhäufungswerte/Mengenhäufungspunkte:

Gesetzt Folge $a:=(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$: $a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$, $M=\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$

a hat HW 0 (da nach D2.4.1 $\forall$ $\varepsilon>0$ gilt $a_n \in U^{\varepsilon}(0)$ für ∞ viele n)
und 1 (da nach D2.4.1 $\forall$ $\varepsilon>0$ gilt $a_n \in U^{\varepsilon}(1)$ für ∞ viele n)

M hat HP 0 (da $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $M \cap \overset{\circ}{U}_\varepsilon(0) \neq \emptyset$, z.B. $\varepsilon=\frac{1}{17}$, $a_n=\frac{1}{43} \in M$ & $\frac{1}{43} \in \overset{\circ}{U}_\varepsilon(0)$

$\Rightarrow$ $M \cap \overset{\circ}{U}_{\frac{1}{17}}(0) \neq \emptyset$, weil $\forall$ $n \in \mathbf{N}$ $\exists$ $n_+ > n$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{n_+} < \frac{1}{n}$)

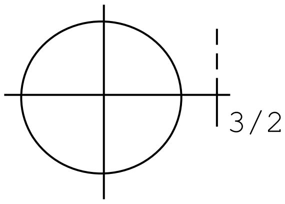
1 nicht HP von M (da z.B für $a_n \notin U_{\varepsilon=0,3}(1)$ $\forall$ $n \in \mathbf{N}$ $\Rightarrow$
$M \cap \overset{\circ}{U}_{0,3}(1)=\emptyset$..nix $\forall$ $\varepsilon>0$)

2.) $I=(0,1) \subset \mathbf{R}$, x_0 ist HP von I $\Leftrightarrow$ $x_0 \in [0,1]$

3.) $D=Q \subset R$, x_0 ist HP von Q $\Leftrightarrow$ $x_0 \in R$

4.) $U_1(0)\cup\{\frac{3}{2}+\frac{i}{n}, n\in\mathbb{N}\}$

M':Füllung Einheitskreis+Rand und (3/2,0)



S4.1.1(2205)

1.)Für $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ gilt

a) $\mathring{M}=\bigcup_{O\subset M} O$ =Vereinigung aller offenen Teilmengen von M

*//**D4.1.1'**(2002)Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $\delta>0$ sei //*

// $U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<\delta\}=$ δ-Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$.//

// $\mathring{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$.//

//Sei $M\subset\mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$://

//1.)$z_0\in M$ heißt innerer Punkt von M:⇔ ∃ $\delta>0$ mit $U_\delta(z_0)\subset M$.

// $\mathring{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M, $\mathring{M}$=offener Kern von M.//

// M heißt offen: ⇔ $M=\mathring{M}$.//

Folgenden Beweis habe ich nicht verstanden:

Bew: = wird mit $\bigcup_{O\subset M} O\subset\mathring{M} \vee \mathring{M}\subset\bigcup_{O\subset M} O$ (d.h. $\mathring{M}$ offen) bewiesen

z.z. $\mathring{M}$ ist offen.

$\mathring{M}\subset\bigcup_{O\subset M} O$:Sei $z_0\in\mathring{M} \underset{D4.1.1'1.)}{\Rightarrow} \exists\ \delta>0: U_\delta(z_0)\subset M$. Sei $z_1\in U_\delta(z_0)$, $|z_1-z_0|=:\nu$ ⇒

$U_{\underbrace{\delta-\nu}_{>0}}(z_1)=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_1|<\delta-\nu\}\subset U_\delta(z_0)\subset M\ \ \forall\ z_1\in U_\delta(z_0)$ ⇒

$U_\delta(z_0)\subset\mathring{M}$ ⇒

$\mathring{M}$ und $U_\delta(z_0)\subset M$ sind offen d.h. $U_\delta(z_0)=\mathring{U}_\delta(z_0)$

⇒ $z_0\in O$ ⇒ $\mathring{M}\subset\bigcup_{O\subset M} O$.

$\bigcup_{O\subset M} O\subset\mathring{M}$:Sei $z_0\in\bigcup_{O\subset M} O$ ⇒ ∃ $O\subset M$, O offen: $z_0\in O$ ⇒

z_0 innerer Punkt von O ⇒ $\forall\varepsilon>0$ mit $U^{\varepsilon}(z_0)\subset O\subset M$ ⇒ $z_0\in\mathring{M}$ ⇒

$\bigcup_{O\subset M} O\subset\mathring{M}$.

b) $\overline{M} = \bigcap_{M\subset A} A$ =Durchschnitt aller geschlossenen Obermengen von M.

*//**D4.1.1'**(2202) Für $z_0\in \mathbb{C}$ und $\delta>0$ sei //*

*// $U_\delta(z_0) := \{z\in \mathbb{C} / |z-z_0|<\delta\}$= δ-Umgebung von z_0 in **C**.//*

// $\overset{o}{U}_\delta(z_0) := U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in \mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$.//

//Sei $M\subset \mathbb{C}$, $M\neq\emptyset$://

//2.) $z_0\in\mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt(HP) von M:⇔ $\forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$.

// M' sei die Menge aller HP von M und $\overline{M}$:=M∪M' die abgeschlossene//

// Hülle von M.//

// M heißt abgeschlossen:⇔ $M=\overline{M}$ ⇔ $M'\subset M$.

Bew: =(●) $\bigcap_{M\subset A} A \supset \overline{M}$ und (● ●) $\bigcap_{M\subset A} A \subset \overline{M}$. Zuerst Beweis (● ●) dann (●)

(● ●) $\bigcap_{M\subset A} A \subset \overline{M}$: erfüllt, wenn $\overline{M}$:=M∪M' eine der geschlossenen Obermengen

von M ist, #denn durch $\bigcap_{M\subset A} A$ könnten Elemente wegfallen, weil andere A

möglicherweise gewisse Elemente nicht enthalten könnten#

d.h. z.z. $\overline{M}$ ist abgeschlossen ⇒

(● ●)Z.z. $\underbrace{\left(\bar{M}\right)' \subset \bar{M}}_{D4.1.12.)}$: Sei z_0 HP von $\overline{M}$ #also $z_0\in(\overline{M})'$#:

$\forall\ \delta>0$: $\overline{M}\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{\bar{M}=M\cup M'}$

$\forall\ \delta>0$: $M'\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset$ oder $\forall\ \delta>0$ $M\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset$

(.) Fall: $z_0\in M'\subset\overline{M}$ ⇒ $z_0\in\overline{M}$

(..)Fall: #$\forall\ \delta>0$ $M\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset$ ⇒ $\forall\ \delta>0\ \exists\ z'\in M \vee z'\in\overset{o}{U}_\delta(z_0)$ ⇒

$\forall\ \delta>0\ \exists\ z'\in M'$: $z'\in\overset{\circ}{U}_{\delta/2}(z_0)$#$\subset\overset{o}{U}_\delta(z_0)$, deshalb $z'\in M'$#

und $\exists\ z\in M$:$z\in\overset{\circ}{U}_{\delta/2}(z')$ ⇒ $\forall\ \delta>0\ \exists\ z\in M$:$z\in\overset{o}{U}_\delta(z_0)$⇒

$\forall\ \delta>0$ $M\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset$ ⇒

$z_0\in M'\subset\overline{M}$ ⇒ $\overline{M}$ abgeschlossen ⇒ $\bigcap_{M\subset A} A\subset\overline{M}$.

(●) $\bigcap_{M\subset A} A\supset\overline{M}$: $\underbrace{\bar{M}}_{=M\cup M'} \subset \bigcap_{M\subset A,\ M'\subset M} A$

Sei $z_0\in\overline{M}$ ⇒ $z_0\in M$ oder $z_0\in M'$ und A abgeschlossen. Z.z. $M\subset A$

(.)$z_0\in M \underbrace{\Rightarrow}_{M\subset A} z_0\in A$

(..)$z_0\in M'$ ⇒ $\forall\ \delta>0$: $M\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{M\subset A} \forall\ \delta>0$:$A\cap\overset{o}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{A\text{ geschl}}$

$z_0\in A\ \forall\ A$

2.) $M\subset\mathbb{R}$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}\setminus M$ ist abgeschlossen
$\emptyset$ und $\mathbb{R}$ sind offen und abgeschlossen.
$M\subset\mathbb{C}$ ist offen $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}\setminus M$ ist abgeschlossen,
$\emptyset$ und $\mathbb{C}$ sind offen und abgeschlossen.

Bew:

\# Ablauf des Bew:

\# (●) „$\underset{!}{\Rightarrow}$“ $M\subset\mathbb{C}$ ist offen $\Rightarrow$ $\mathbb{C}\setminus M$ ist abgeschlossen,

\# (● ●) „$\underset{!}{\Leftarrow}$“ $M\subset\mathbb{C}$ ist abgeschlossen, dann
Annahme $\mathbb{C}\setminus M$ ist abgeschlossen führt zu Widerspruch,
\# d.h. $\mathbb{C}\setminus M$ ist offen, deshalb

\# $M\subset\mathbb{C}$ ist offen $\underset{!}{\Leftrightarrow}$ $\mathbb{C}\setminus M$ ist abgeschlossen

*//**D4.1.1'**(2202)//*
//Für $z_0\in\mathbb{C}$ und $\delta>0$ sei $U_\delta(z_0):=\{z\in\mathbb{C}/|z-z_0|<\delta\}$=$\delta$-Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$//
// $\overset{o}{U}_\delta(z_0):=U_\delta(z_0)\setminus\{z_0\}=\{z\in\mathbb{C}/0<|z-z_0|<\delta\}$. //
//1.) $z_0\in M$ heißt innerer Punkt von $M:\Leftrightarrow\ \exists\ \delta>0$ mit $U_\delta(z_0)\subset M$.//
// $\overset{o}{M}$ sei die Menge aller inneren Punkte von M,//
// $\overset{o}{M}$ =offener Kern von M.//
// M heißt offen: $\Leftrightarrow$ $M=\overset{o}{M}$ .//
//2.) $z_0\in\mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt(HP) von $M:\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon>0$ ist $M\cap\overset{o}{U}_\varepsilon(z_0)\neq\emptyset$.
// M' sei die Menge aller HP von M und $\overline{M}:=M\cup M'$ die abgeschlossene//
// Hülle von M.//
// M heißt abgeschlossen: $\Leftrightarrow$ $M=\overline{M}$ $\Leftrightarrow$ $M'\subset M$.

(●) Sei $M\subset\mathbb{C}$, M offen, $z_M\in M\Rightarrow\exists\ \delta>0: U_\delta(z_M)\subset M$ und $\overset{o}{U}_\delta(z_M)\cap(\mathbb{C}\setminus M)=\emptyset\Rightarrow$

z_M ist kein HP von $\mathbb{C}\setminus M\Rightarrow$ $\underbrace{\forall\, HP}_{siehe\ *}$ $z_{C\setminus M}\in(\mathbb{C}\setminus M)$: $z_{C\setminus M}\in\overline{C/M}$ #????#) $\Rightarrow$

$\mathbb{C}\setminus M$ abgeschlossen. #(sind alle $z_{C\setminus M}$ HP????)#

\# * Sei $z_{C\setminus M}\in(\mathbb{C}\setminus M)$, $\varepsilon>0$ beliebig, $z\in U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\Rightarrow$
\# $\forall\ z\in U_\varepsilon(z_{C\setminus M})$:
\# ● $z\in\mathbb{C}\setminus M$ $\Rightarrow U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\cap(\mathbb{C}\setminus M)\neq\emptyset\Rightarrow U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\setminus z_{C\setminus M}\cap(\mathbb{C}\setminus M)\neq\emptyset$
\# $\Rightarrow\overset{o}{U}_\varepsilon(z_{C\setminus M})\cap(\mathbb{C}\setminus M)\neq\emptyset\Rightarrow z_{C\setminus M}$ HP von $\mathbb{C}\setminus M$

\# ● ● $z\in\mathbb{C}\setminus M\ \vee\ z\in M\Rightarrow U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\cap(\mathbb{C}\setminus M)\neq\emptyset\Rightarrow U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\setminus z_{C\setminus M}\cap(\mathbb{C}\setminus M)\neq\emptyset$
\# $\Rightarrow\overset{o}{U}_\varepsilon(z_{C\setminus M})\cap(\mathbb{C}\setminus M)\neq\emptyset\Rightarrow z_{C\setminus M}$ HP von $\mathbb{C}\setminus M$
\# ● ● ● $z\in M$ $\Rightarrow$ (.) $U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\cap\mathbb{C}\setminus M=\emptyset\ \vee$ (..) $U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\cap\mathbb{C}\setminus M=\{z_{C\setminus M}\}$
\# (.) $U_\varepsilon(z_{C\setminus M})\subset M\Rightarrow z_{C\setminus M}\in M\Rightarrow$ Widerspruch
\# (..) $z_{C\setminus M}\in U_\varepsilon(z_{C\setminus M})$ $\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{U_\varepsilon(z_{C/M})\subset M}}_{M\ offen}$ $z_{C\setminus M}\in M\Rightarrow$ Widerspruch
\# (.),(..) $z\notin(\mathbb{C}\setminus M)\ \ \forall\ z\in U_\varepsilon(z_{C\setminus M})$
\# ●, ● ● $\Rightarrow\ \forall\ z\in U_\varepsilon(z_{C\setminus M})$: $z_{C\setminus M}$ ist HP

($\bullet\bullet$) Sei $M\subset C$, abgeschlossen, (falsche) Annahme: $C\setminus M$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $\exists\ z_0\in C\setminus M$: z_0 kein innerer Punkt von $C\setminus M$ $\Rightarrow$

$\forall\ \delta>0: U_\delta(z_0)\not\subset C\setminus M \Rightarrow \forall\ \delta>0\ M\cap \overset{\circ}{U}_\delta(z_0)\neq\emptyset \Rightarrow z_0$ ist HP von $M \Rightarrow$

$z_0\in M'\subset M \Rightarrow z_0\in M \Rightarrow$ Widerspruch zu $z_0\in C\setminus M \Rightarrow z_0\in(\overset{\circ}{C\setminus M}) \Rightarrow$

$C\setminus M$ ist offen.

$C=\overset{\circ}{C}$, $C=\overline{C} \Rightarrow \emptyset$ ist abgeschlossen und offen

3.) $\bullet$ $M_1,\dots M_n$ offen $\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} M_j$ offen

Bew: O.B.d.A.

Falls $\bigcap_{j=1}^{n} M_j=\emptyset \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} M_j$ offen, da $\emptyset$ offen.

Sei $x\in \bigcap_{j=1}^{n} M_j$ beliebig $\Rightarrow x\in M_j\ \forall\ M_j, j=1,2,..n \underbrace{\Rightarrow}_{M_j \text{ offen}}$

$\forall\ j=1,\dots,n\ \exists\ \varepsilon_j>0: U_{\varepsilon_j}(x)\subset M_j$.

Sei $\varepsilon:=\min\{\varepsilon_1\dots\ \varepsilon_n\} \Rightarrow \varepsilon>0$ und $U_{\varepsilon_j}(x)\underbrace{\subseteq}_{*} \bigcap_{j=1}^{n} M_j$ d.h.

x innerer Punkt von $\bigcap_{j=1}^{n} M_j \underbrace{\Rightarrow}_{x \text{ bel}} \bigcap_{j=1}^{n} M_j$ offen

*Bew: Sei $y\in U_\varepsilon(x) \Rightarrow |y-x|<\varepsilon\le\varepsilon_j\ \forall j \Rightarrow y\in U_{\varepsilon_j}(x)\ \forall j \underbrace{\Rightarrow}_{U_{\varepsilon_j}(x)\in M_j}$

$y\in M_j\ \forall j \Rightarrow y\in \bigcap_{j=1}^{n} M_j$

Bem: M offen $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def}}$ $M=\overset{\circ}{M}$ $\Leftrightarrow$ Jedes $x\in M$ ist innerer Punkt

●● $M_1,\ldots M_n$ abgeschlossen $\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} M_j$ abgeschlossen.

Bew: M_j abgeschlossen $\forall\ j=1,\ldots,n$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{S4.1.1\ 2.)}$ M_j^C offen $\forall\ j=1,\ldots,n$

$(=R\setminus M_j$ bzw $= C\setminus M_j)$ $\underbrace{\Rightarrow}_{*}$ $(\bigcup_{j=1}^{n} M_j)^C=\bigcap_{j=1}^{n} M_j^C$ offen $\underbrace{\Rightarrow}_{4.1.1\ 2.)}$ $\bigcup_{j=1}^{n} M_j$ abgeschlossen

●●● I beliebige Indexmenge und M_i offen $\forall\ i\in I \Rightarrow \bigcup_{i\in I} M_i$ offen.

Bew: O.B.d.A. $\bigcup_{i\in I} M_i\neq\emptyset$. M_i offen $\forall\ i\in I$. Sei $x\in\bigcup_{i\in I} M_i$ beliebig $\Rightarrow$

$\exists\ i_0\in I: x\in M_{i_0}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{M_{i_0}\text{ offen}}$ $\exists\ \varepsilon>0: U^{\varepsilon}(x)\subset M_{i_0}$ $\Rightarrow U^{\varepsilon}(x)\subset\bigcup_{i\in I} M_i \Rightarrow$

x ist innerer Punkt von $\bigcup_{i\in I} M_i$ $\underbrace{\Rightarrow}_{x\text{ bel}}$ $\bigcup_{i\in I} M_i$ offen.

●●●● $I\neq\emptyset$ bel. Indexmenge und M_i abgeschlossen $\forall\ i\in I \Rightarrow$

$\bigcap_{i\in I} M_i$ abgeschlossen.

Bew: $\underbrace{\Rightarrow}_{4.1.1\ 2.)}$ M_j^C offen $\forall\ i\in I \Rightarrow (\bigcap_{i\in I} M_i)^C=\bigcap_{i\in I} M_i^C$ offen $\forall\ i\in I$ nach ●●● $\Rightarrow$

$\bigcap_{i\in I} M_i$ abgeschlossen.

Bem: Die Vor $I\neq\emptyset$ wurde nur gemacht, da $\bigcap_{i\in\emptyset}$ nicht definiert ist

4.) $x_0\in\mathbb{R}$ ist HP von $M\subset\mathbb{R} \Leftrightarrow \exists$ eine Folge $(x_n)\subset M\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} x_0$.

$z_0\in\mathbb{C}$ ist HP von $M\subset\mathbb{C} \Leftrightarrow \exists$ eine Folge $(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0$.

Bew: "$\Rightarrow$" $z_0\in M' \Rightarrow \forall\ \delta>0\ M\cap\overset{\circ}{U}_{\delta}(z_0)\neq\emptyset \Rightarrow \forall\ \delta=1/n,\ n\in\mathbb{N},\ \exists\ z_n\in M\cap\overset{\circ}{U}_{1/n}(z_0) \Rightarrow$

$(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$ und $|z_n-z_0|<1/n$

"$\Leftarrow$" Sei $(z_n)\subset M\setminus\{z_0\}$ mit $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0 \Rightarrow \forall\ \delta>0\ \exists\ n_0(\delta)\in\mathbb{N}:\ |z_n-z_0|<\delta\ \forall\ n\geq n_0(\delta)$

$\Rightarrow z_{n(\delta)}\in M\cap\overset{\circ}{U}_{\delta}(z_0) \Rightarrow \forall\ \delta>0:\ M\cap\overset{\circ}{U}_{\delta}(z_0)\neq\emptyset \Rightarrow z_0\in M'$

A4.1.1 Es sei $O\subset\mathbb{R}$, O offen. Zeige: $O=\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ bzw. $O=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ mit paarweise disjunkten Intervallen $I_k\subset\mathbb{R}$.

Bew: $\exists$ Intervalle I_k, $k\in\{1,...,N\}$ mit $N\in\mathbb{N}_0$ bzw $k\in\mathbb{N}$, welche paarweise disjunkt sind (d.h. $I_\nu\cap I_\mu=\emptyset$ für $\nu\neq\mu$) mit $O=\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ bzw. $O=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

(Bem: Für N=0 bedeutet dies $O=\bigcup_{k=1}^{0} I_k=\bigcup_{k\in\emptyset} I_k=\emptyset$)

Vorbem. zum Bew:
Es gilt für $I\subset\mathbb{R}$ mit $|I|\geq 2$ (I hat mindestens 2 Elemente).
I Intervall (nicht beschränkt) $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x_1,x_2\in I$ ist $(x_1,x_2)\subset I$.

*//**S0.2.1**(102)*
//Vor: Sei X beliebige Menge $\neq\emptyset$, dann gilt
//1.)Ist R eine ÄR in/auf X, so ist die Menge aller ÄK von R
// eine Partition von X (d.h. X ist die Vereinigung von
// paarweise disjunkten ÄK $\neq\emptyset$, oder X ist in disjunkte ÄK $\neq\emptyset$
// zerlegt: $X=\bigcup_{x\in X}(x|_R)$).

Bew: Die Behauptung lässt sich auch folgendermaßen formulieren:
$\exists$ eine Partition von O in höchstens abzählbar viele Intervalle.
Deshalb liegt es nahe, eine Äquivalenzrelation zu betrachten.
Definiere auf O folgende Relation:
$x_1\sim x_2 :\Leftrightarrow$ $\exists$ Intervall I mit $x_1,x_2\in I$ und $I\subset O$.
\# Wenn diese eine Äquvalenzreation ist, bilden die \#
\# Äquivalenzklassen eine Partition
Dies ist eine Äquivalenzrelation, denn

*//**D0.2.1** (100)Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Jede Teilmenge $R\subset X\text{x}Y$ heißt eine// //Relation der Menge X zur Menge Y//*
//Bez: $x\overset{R}{\sim}y$ oder $xRy :\Leftrightarrow (x,y)\in R$ x steht in Relation zu y bzw//
// $x\not R y :\Leftrightarrow (x,y)\notin R$ //
// Falls X=Y heißt $R\subset X\text{x}X=X^2$ Relation in oder auf X//
*//**D0.2.2** (100)//*
//1.)Eine Relation R auf X (d.h. $R\subset X\text{x}X$) heißt,//
// reflexiv: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x\in X$ gilt xRx (d.h. $(x,x)\in R$)//
// symmetrisch: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x,y\in X$ mit $xRy \Rightarrow yRx$ //
// (d.h. $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$)//
// antisymmetrisch: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x,y\in X$ mit xRy und $yRx \Rightarrow x=y$//
// (d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,x)\in R)\Rightarrow x=y$)//
// transitiv: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x,y,z\in X$ mit xRy und $yRz \Rightarrow xRz$//
// (d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$)//
//2.)Eine Relation R auf X heißt Äquivalenzrelation (ÄR): $\Leftrightarrow$//
// R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv//

(.) ~ ist reflexiv: Sei $x\in O$ bel $\underset{O\text{ offen}}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\varepsilon>0$: $(\underbrace{(x-\varepsilon),(x+\varepsilon)}_{I})=U_\varepsilon(x)\subset O$

$\underset{x\in I}{\Rightarrow}$ $x\sim x$ \#(Da O offen ist, existiert zu jedem $x\in O$ eine Umgebung
\# $U_\varepsilon(x)$ innerhalb von O. Das ist ein Intervall, welches x
\# enthält. Die Vorschrift zur Bildung der Relation kann
\# dem x ein x zuordnen, d.h. $(x,x)\in R$)

(..) ~ ist symmetrisch: Sei $x_1\sim x_2 \Rightarrow \exists$ I (=Intervall) mit
$x_1,x_2\in I$ und $I\subset O \Rightarrow x_2,x_1\in I$ und $I\subset O \Rightarrow x_2\sim x_1$

(...) ~ ist transitiv: Seien $x_1\sim x_2, x_2\sim x_3 \Rightarrow \exists$ Intervalle I,J mit

$x_1, x_2 \in I$ und $I \subset O$, $x_2, x_3 \in J$ und $J \subset O$ $\underset{x_2 \in I \cap J}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $I \cap J \neq \emptyset$ $\underset{I,J \text{ Intervalle}}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$I \cup J$ ist ein Intervall und $x_1, x_3 \in I \cup J$, $I \cup J \subset O$ $\Rightarrow$ $x_1 \sim x_3$

Bezeichne $I_x = x|_{\sim}$ die Äquivalenzklasse von $x \in O$

Beh: I_x ist ein Intervall

Bew: Seien $x_1, x_2 \in I_x$ bel. Z.z. Intervall $(x_1, x_2) \subset I_x$ (wegen Vorbem!).

Sei dazu $y \in (x_1, x_2)$ bel. Wegen $x_1 \sim x_2$ (da $x_1 \sim x$ und $x_2 \sim x$) folgt:

$\exists$ Intervall I mit $x_1, x_2 \in I$ und $I \subset O$ $\underset{y \in x_1, x_2}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $y \in I$ $\Rightarrow$

$y \sim x_1$ (und $y \sim x_2$) $\underset{x_1 \sim x}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $y \sim x$ $\Rightarrow$ $y \in I_x$.

Damit hat man zumindest: $O = \bigcup_{x \in O} I_x$ mit $I_{x_1} = I_{x_2}$ oder $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$

$\forall$ $x_1, x_2 \in O$

Wähle nun aus jeder Äquivalenzklasse I_x einen rationalen Repräsentanten:

Formel: Sei $S = \{I_x : x \in O\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und wähle eine bijektive Abbildung $f: S \to O \cap \mathbb{Q}$, dies ist möglich, da jede Äquivalenzklasse I_x ein Intervall ist, also einen rationalen Punkt enthält).

$f(S) = O \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ $f(S)$ ist höchstens abzählbar #da Q höchstens abzählbar#

$\Rightarrow$ $f(S) = \{r_1, ..., r_N\}$ mit $N \in \mathbb{N}_0$ oder $f(S) = \{r_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Also insgesamt $O = \bigcup_{k=1}^{N} I_{r_k}$ bzw. $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{r_k}$ mit paarweise disjunkten Intervallen I_{r_k}

(Wem die Indizierung nicht gefällt: Sei $\tilde{I}_k = I_{r_k}$ $\Rightarrow$ $O = \bigcup_{k=1}^{N} \tilde{I}_k$

bzw $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{I}_k$.)

A4.1.2 Zeige mit Hilfe der identischen Abbildung, daß jede nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt

A4.1.3 Prüfe bei folgenden Teilmengen von R, ob sie offen abgeschlossen oder kompakt sind.

a) $B=(0,1)\cup(3,5)$

*//**S4.1.1**(2204) 1.) Für $M\subset$ R oder $M\subset$ C gilt*
// a) $\overset{o}{M}=\bigcup\limits_{O\subset M} O$ =Vereinigung aller offenen Teilmengen von M

Lös: (0,1) & (3,5) offen $\underbrace{\Rightarrow}_{S4.1.1}$ $\overset{o}{B}=(0,1)\cup(3,5)=B \Rightarrow$ B offen

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(5-\frac{1}{n})\subset B$ & $\lim\limits_{n\to\infty}(5-\frac{1}{n})=5\notin B \Rightarrow$ B nicht abgeschlossen $\Rightarrow$ B nicht kompakt

b) $C=f(B)$ mit $f(x)=\frac{1}{x}$

Lös: $0<x<1 \Rightarrow \infty>f(x)>1 \Rightarrow f: (0,1)\to(1,\infty)$

$3<x<5 \Rightarrow \frac{1}{3}>f(x)>\frac{1}{5} \Rightarrow f: (3,5)\to(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$

$C=f(B)=(1,\infty)\cup(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$ $\underbrace{\Rightarrow}_{wie\ a)}$ C offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt

c) $D=\overline{B}$

Lös: [0,1] & [3,5] abgeschlossen $\Rightarrow [0,1]\cup[3,5]$ abgeschlossen $\Rightarrow$
$[0,1]\cup[3,5]$ ist eine mögliche abgeschlossene Obermenge $Q\supseteq B$

Darstellung Randp. 0,1,3,5 in Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(a-\frac{1}{n})$ möglich $\Rightarrow$
$0,1,3,5\in Q \Rightarrow Q=\overline{B}$

$(1+\frac{1}{2}\varepsilon)\notin\overline{B}$ & $(1+\frac{1}{2}\varepsilon)\in U_\varepsilon(1) \Rightarrow$ Q nicht offen

Q abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ Q kompakt

d) $E=\overline{f(B)}$

Lös: $\overline{f(B)}=[0,\infty)\cup[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ abgeschlossen

$U_\varepsilon(0)\not\subset\overline{f(B)} \Rightarrow \overline{f(B)}$ nicht offen,
$\overline{f(B)}$ nicht beschränkt $\Rightarrow \overline{f(B)}$ nicht kompakt