A3.2.1 Zeige die absolute Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k/k!\ \forall\ z\in\mathbb{C}$.

Lös: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{z^k}{k!}}_{a_k} \ldots z\neq 0 \quad \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{|z|}{k+1} \leq 1/2\ \forall\ k\geq k_0$.

5b) Beh: (.) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ absolut konvergent

(..) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ divergent

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$.//*
//5.) Quotientenkriterium $z_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0$ und $\exists\ 0<q<1$ mit//
// $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq q\ \forall\ n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$. $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\geq 1\ \forall\ n\geq n_2 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}|z_n|=\infty$//

Bew: (.) Sei $\tilde{q}:=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|<1$. Wähle $\varepsilon>0: q=\tilde{q}+\varepsilon<1$ (z.B. $\varepsilon=\frac{1-\tilde{q}}{2}$) $\underset{D2.4.2''}{\Rightarrow}$

$\exists\ n_1\in\mathbb{N}_0: \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\tilde{q}+\varepsilon=q<1\ \forall\ n\geq n_1 \underset{S3.2.2\ 5.)\ \text{da}\ 0<q<1}{\Rightarrow} \sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergiert absolut

Andere Formulierung (.):
*//**D2.4.2''** (1507)//*
//Sei (x_n) eine Folge in $\mathbb{R}$. Eine Zahl $\overset{*}{x}$ heißt dann der größte//
//HP oder limes superior der Folge (x_n), wenn gilt://

$$// \quad \overset{*}{x}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0 \text{ gilt:} \begin{cases} x_n \geq \overset{*}{x}+\varepsilon & \text{höchstens für endlich viele } n \\ x_n \geq \overset{*}{x}-\varepsilon & \text{für } \infty \text{ viele } n \end{cases} \quad //$$

*//**S3.1.1** (1601) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k=\frac{1}{1-z}\ \forall\ |z|<1$.//*

Bew: (.) Sei $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1-2\delta_0<1$, $\delta_0>0 \underset{D2.4.2}{\Rightarrow} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>\underbrace{1-\delta_0}_{>1-2\delta_0}=:q_0$ für höchstens endlich viele n. $\exists\ n_1$ (das ohne Einschränkung größer als n_0 ist#?#), sodass $z_n\neq 0$ und $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq q_0$ für $n>n_1$ gilt $\Rightarrow$

$$\left|\frac{z_n}{z_{n_1}}\right|=\left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right|\ldots\left|\frac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right|\leq q_0^{n-n_1} \Rightarrow |z_n|\leq M_0 q_0^n \text{ mit } M_0:=|z_{n_1}|\,q_0^{-n_1}.$$

Damit ist $\sum M_0 q_0^k$ nach S3.1.1 eine konvergente Majorante für $\sum |z_n|$ und somit $\sum z_n$ nach 2.) absolut konvergent.

//**S3.1.2** (1602) $(z_\nu)\subset\mathbb{C}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent. *2.) $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ notwendig//*

(..) Sei $\tilde{q}:=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>1$. Wähle $\varepsilon>0: \tilde{q}-\varepsilon=:q\geq 1$ (z.B. $\varepsilon=\frac{1-\tilde{q}}{2}$ oder $\varepsilon=\tilde{q}-1$) $\underset{D2.4.2''}{\Rightarrow}$ $\exists\ n_2\in\mathbb{N}_0: \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>\underbrace{\tilde{q}-\varepsilon}_{\geq 1}=q\ \forall\ n\geq n_2 \underset{q\geq 1}{\Rightarrow} |z_{n+1}|\geq|z_n|\ \forall\ n\geq n_2$

$\Rightarrow |z_n|\geq\underbrace{|z_{n_2}|}_{>0}\ \forall\ n\geq n_2 \Rightarrow z_n \overset{\rightarrow}{\text{nicht}}\ 0\ (n\to\infty) \underset{S3.1.2\ 2.)}{\Rightarrow}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \text{ divergiert (insbesondere } \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| \text{ divergiert)}$$

Andere Formulierung (..):

Sei $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1+\delta_1$ für $\delta_1>0 \underset{D2.4.2}{\Rightarrow} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|>1+\delta_1$ für höchstens endlich viele n. $\exists\ n_1>n_0$, sodass $z_n\neq0$ und $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\geq1+\delta_1=:q_1$ ist

$\forall\ n>n_1 \Rightarrow \left|\frac{z_n}{z_{n_1}}\right|=\left|\frac{z_n}{z_{n-1}}\right|\left|\frac{z_{n-1}}{z_{n-2}}\right|\ldots\left|\frac{z_{n_1+1}}{z_{n_1}}\right|\geq q_1^{k-k_1} \Rightarrow |z_n|\geq M_1 q_1^k$ mit $M_1:=|z_{k_1}|q_1^{-k_1} \Rightarrow$

$|z_n|\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ und $\sum z_n$ ist divergent.

Achtung!

Will man das Wurzel- oder Quotientenkriterium anwenden, so darf man sich nicht mit dem Nachweis begnügen, dass

$\sqrt[n]{|z_n|}$ bzw $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ fast immer <1 ist. Es ist vielmehr unumgänglich, eine feste postive Zahl q<1 aufzufinden und die ab einer Stelle nicht mehr von $\sqrt[n]{|z_n|}$ bzw $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ übertroffen wird. Wenn die besagten Wurzeln bzw Quotienten zwar <1 sind, aber doch beliebig nahe an 1 herankommen, versagen beide Kriterien (sie bringen keine Entscheidung):

$\sum \frac{1}{n}$ divergiert, $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergiert – aber in beiden Fällen strebt sowohl die Wurzel als auch die Quotientenfolge gegen 1.

*//**D2.4.2''**(1507)//*

// Bem 4.)Es gilt stets $\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|z_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$ //

Bem: D2.4.2'' Bem 4.) ⇒

Falls Quotientenkriterium anwendbar, so ist auch Wurzelkriterium anwendbar. Umkehrung gilt iA nicht.

Das Wurzelkriterium ist mächtiger als das Quotientenkriterium.

Falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1$, macht es keinen Sinn, das Wurzelkriterium zu probieren: $1=\underline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\leq\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=1 \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1 \Rightarrow$ keine Entscheidung mit dem Wurzelkriterium möglich. Es gilt sogar $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$ da auch $\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$

A3.2.2 Untersuche folgende unendliche Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+2}{n^4+n^2-1}$

Lös:Für $n\in\mathbb{N}$ gilt $\frac{n^3+2n+2}{n^4+n^2-1}\geq\frac{n^3}{n^4+n^2-1}\geq\frac{n^3}{n^4+n^2}\geq\frac{n^3}{n^4+n^4}=1/2n$

$\sum_{n=1}^{\infty}1/n$ ist divergent, deshalb auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+2n+2}{n^4+n^2-1}$ nach Minoritätskriterium.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+2}{n^5+n^2-1}$

Lös: $\frac{n^3+2n+2}{n^5+n^2-1} \le \frac{n^3+2n^3+2n^3}{n^5+n^2-1} \le \frac{5n^3}{n^5} = \frac{5}{n^2}$. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergent, also

nach Majorantenkriterium auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+2n+2}{n^5+n^2-1}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5+2}{4^n}$, $n\in\mathbb{N}$

//**A2.1.8** (1207) a)Beh: $\forall$ $p\in\mathbb{N}$ gilt $0 \le x_n = \sqrt[n]{n^p} - 1 \to 0\ (n\to\infty)$//

Lös: $\frac{3^n n^5+2}{4^n} \le 2 * \frac{3^n n^5}{4^n} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n n^5 \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \left(\frac{15}{16}\right)^n * 2 * \left(n\left(\left(\frac{4}{5}\right)\right)^n\right)^5 =$

$\left(\frac{15}{16}\right)^n * 2 * \underbrace{\left(\underbrace{n^{\frac{5}{n}}}_{A2.1.8:\to 1} \frac{4}{5}\right)^n}_{<1} \le 2 * \left(\frac{15}{16}\right)^n \Rightarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{15}{16}\right)^n$ konvergent, also nach Majkrit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^5+2}{4^n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4^{-n} \binom{2n}{n}$

//***S1.7.4*** *(906)* $\alpha\in C$ $\forall$ $n,m\in N_0$*: 2.)* $\binom{n}{m} = \begin{cases} 0 \text{ falls } n < m \\ \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n \ge m \end{cases}$//

//***S3.1.4*** *(1605)Leibniz Kriterium Vor:* $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow 0\ (n\to\infty)$*.//*

Lös: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b^n$, wobei $b_n = 4^{-n}\binom{2n}{n}$.

$b_{n+1} = 4^{-n-1}\binom{2n+2}{n+1} \underset{S1.7.4\,2.)}{=} 4^{-n-1} \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = 4^{-n-1} \frac{(2n+2)(2n+1)2n!}{(n+1)!(n+1)!} \underset{S1.7.4\,2.)}{=}$

$\frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} 4^{-n}\binom{2n}{n} = \underbrace{\frac{2n+1}{2n+2}}_{<1} b_n \le b_n \Rightarrow (b_n)_{n=1}^{\infty} \searrow 0\ (n\to\infty)$

$\underset{S3.1.4}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ ist konvergent nach Leibnizkriterium.

A3.2.3 Konvergenz und absolute Konvergenz?

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5^k}$ mit $z\in\mathbb{C}$.

Lös: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5^k} = \frac{1}{1-\frac{2}{5}}$, wenn $|z|<5$.

Für $|z|>5$ ist $\left|\frac{z}{5}\right|^k \ge 1$, d.h $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{5^k}$ ist divergent

b) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (e-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-k})$

Lös:Definiere $b_n=(1-1/n)^{n} \xrightarrow{n\to\infty} e$ für $n\geq 2$. Außerdem gilt

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}}=\frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}}(1-\frac{1}{n+1})=\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n}(1-\frac{1}{n+1})=$$

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n}\frac{n}{n+1}>(1+\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2-1})\frac{n}{n+1}>(1+1/n)\frac{n}{n+1}=1 \Rightarrow$$

$b_n \nearrow \Rightarrow e-\frac{1}{b_n} \nearrow \Rightarrow \frac{1}{b_n}-e \searrow$ mit $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{b_n}-e)=0$

Noch zu zeigen: $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (e-\frac{1}{b_k})$ ist nicht absolut konvergent, d.h. $\sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{b_k}-e)$ ist divergent

Beachte, dass für $n\geq 2$ gilt:

$$\frac{1}{b_n}-e\geq\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{2n}}=\frac{1}{b_{2n}}(\frac{b_{2n}}{b_n}-1)\geq e(\frac{(1-\frac{1}{2n})^{2n}}{(1-\frac{1}{n})^{n}}-1)=e(\left(\frac{\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{2}}{\frac{n-1}{n}}\right)^{n}-1)=$$

$$e(\left(\frac{4n^2-4n-1}{4n^2}\frac{n}{n-1}\right)^{n}-1)=e(\left(\frac{4n^2-4n-1}{4n^2-4n}\right)^{n}-1)=e(\left(1-\frac{1}{4n(n-1)}\right)^{n}-1)$$

$$\underset{\text{Bern}}{\geq}\frac{e}{4(n-1)}.$$

Da $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{e}{4(n-1)}$ divergiert, ist nach Majorantenkriterium auch $\sum_{k=2}^{\infty} (\frac{1}{b_k}-e)$ divergent.

Anderer Weg mit absoluter Konvergenz mit Hilfe

$e-(1+\frac{1}{n})^{n}\geq-(1+\frac{1}{2n})^{2n}-(1+\frac{1}{n})^{n}$.

A3.2.4 Bestimme jeweils für alle $z\in\mathbb{C}$, für die folgende unendliche Reihen konvergieren:

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{2k}}{(2k)!}$

Lös:Quotientenk: $\left|\frac{z^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}\frac{(2k)!}{z^{2k}}\right|=\frac{|z|^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \quad \forall\ z\in\mathbb{C} \Rightarrow$ Konv für alle z

b) $\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$

Lös:Wurzelkriterium $\sqrt[n]{|n^n z^n|}=n|z|=0<1$ falls $n|z|<1 \Rightarrow$
$|z|<1/n:=\varepsilon \Rightarrow |z|<\varepsilon \quad \forall\ \varepsilon>0 \Rightarrow |z|=0$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}(1+1/k)^{k^2} z^k$

Lös:Wurzelkriterium $\sqrt[n]{(1+1/n)^{n^2}}\sqrt[n]{|z|^n}=(1+1/n)^{n}|z|\to e|z|<e\frac{1}{e}\Rightarrow|z|<\frac{1}{e}$

A3.2.5 $a_n\in\mathbb{C}$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, Zeige

a) Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<1$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut

Bew: Sei $\tilde{q}:=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<1$. Wähle $\varepsilon>0$: $\underbrace{\tilde{q}+\varepsilon}_{:=q}<1$ (z.B. $\varepsilon=\frac{1-\tilde{q}}{2}$) $\Rightarrow$

$\exists\ n_0\in\mathbb{N}_0$: $\sqrt[n]{|a_n|}<\tilde{q}+\varepsilon=q<1$ $\forall\ n\geq n_0$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

b) Ist $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, so divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Bew: Sei $\tilde{q}:=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}>1$. Wähle $\varepsilon>0$: $\underbrace{\tilde{q}+\varepsilon}_{:=q}>1$ (z.B. $\varepsilon=\frac{\tilde{q}-1}{2}$ oder $\varepsilon=\tilde{q}-1$) $\Rightarrow$

$\sqrt[n]{|a_n|}>\tilde{q}-\varepsilon=q$ für ∞ viele n $\underset{q\geq1}{\Rightarrow}$ $|a_n|\geq1$ für ∞ viele n $\Rightarrow$ $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ $\Rightarrow$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

c) Ist $a_n\neq0$ $\forall\ n\in\mathbb{N}$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

Bew: $\tilde{q}:=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$, Wähle $\varepsilon>0$: $\underbrace{\tilde{q}+\varepsilon}_{:=q}<1$ (z.B. $\varepsilon=\frac{1-\tilde{q}}{2}$) $\Rightarrow$

$\exists\ n_1\in\mathbb{N}_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\tilde{q}+\varepsilon=q<1$ $\forall\ n\geq n_1$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut.

d) Ist $a_n\neq0$ $\forall\ n\in\mathbb{N}$ und $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$, so divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Bew: $\tilde{q}:=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$, Wähle $\varepsilon>0$: $\underbrace{\tilde{q}-\varepsilon}_{:=q}<1$ (z.B. $\varepsilon=\frac{1-\tilde{q}}{2}$ oder $\varepsilon=\tilde{q}-1$) $\Rightarrow$

$\exists\ n_2\in\mathbb{N}_0$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\tilde{q}-\varepsilon=q\geq1$ $\forall\ n\geq n_2$ $\underset{q\geq1}{\Rightarrow}$ $|a_{n+1}|\geq|a_n|$ $\forall\ n\geq n_2$ $\Rightarrow$ $|a_n|\geq|a_{n_2}|$ $\Rightarrow$

$a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.

A3.2.6 Konvergenz, absolute Konvergenz?

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$

//**S3.1.2** (1602) Vor: $(z_\nu)\subset\mathbb{C}$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//

//Beh:Notwendiges Konvergenzkriterium 2.) $z_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$*//*

Lös: $\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}\Big|\to0\,(n\to\infty)$ (da $\sqrt[n]{n}\underset{n\to\infty}{\to}1$) $\underset{S3.1.2\,2.)}{\Rightarrow}$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ konvergiert nicht $\underset{S3.2.2}{\Rightarrow}$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ konvergiert nicht absolut

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ (fest)

*//**S3.1.4** (1605) Leibniz Kriterium//*
//Vor: $(a_n) \subset \mathbb{R}$, $a_n \searrow 0$ ($n\to\infty$).//

Lös: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergiert absolut $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \infty$ $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$

$\alpha>1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergiert, da absolut konvergent

$0<\alpha\le 1$: Wegen $\frac{1}{n^\alpha} \searrow 0$ ($n\to\infty$) $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.4}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergent

$\alpha \le 0$: $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \not\to 0$ ($n\to\infty$) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergiert nicht

$\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| \not\to 0$ ($n\to\infty$) $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergiert nicht absolut.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{2n}}$

*//**S3.2.2** (1700)//*
//Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}_0$.//
//Quotientenkriterium//
//7.) Gilt für eine unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$, $z_k \neq 0$ $\forall$ $n \ge n_0$://

// (.) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$, so ist sie absolut konvergent //

// (..) $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1$, so ist sie divergent//

Lös: $a_n = \frac{1}{\binom{3n}{2n}}$, Binominalkoeff>0, deshalb || weglassen $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\binom{3n}{2n}}{\binom{3n+3}{2n+2}} =$

$$\frac{(3n)!\,(2n+2)!\,(n+1)!}{(2n)!\,n!\,(3n+3)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} =$$

$$\frac{1}{3}\,\frac{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{2^2}{3^3} = 4/27, \text{ insbesondere } \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 4/27 < 1$$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 7.)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 1.)}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

Lös: $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \underbrace{\ge}_{n^2\ge 1} \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{n} = \infty$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 3.)}$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \infty$ divergiert $\Rightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ konvergiert nicht und nicht absolut

e) $q+1+q^3+q^2+q^5+q^4+q^7+q^6+\ldots$ für $|q|<1$ (fest).

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ 1.) $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.//*

Lös: # 0 1 2 3 4 5 6 7...

\# hoch 1 0 3 2 5 4 7 6...

$a_n = \begin{cases} q^{n+1} \text{ falls n gerade} \\ q^{n-1} \text{ falls n ungerade} \end{cases}$, wobei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q|<1$ (fest)

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|} = \lim_{n\to\infty} |q|^{1+\frac{1}{2n}} = |q|$,

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = \lim_{n\to\infty} |q|^{1-\frac{1}{2n+1}} = |q| \Rightarrow$

$(\sqrt[n]{|a_n|})_{n=0}^{\infty}$ hat als einzigen Häufungswert $|q| \Rightarrow$

$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = |q| < 1 \underset{\sqrt{\text{Krit}}}{\Rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut $\underset{S3.2.2}{\Rightarrow}$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konv, (sogar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |q|$)

Bem: Quotientenkriterium hier nicht anwendbar:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} |q|^3, \text{ falls n ungerade} \\ \frac{1}{|q|}, \text{ falls n gerade} \end{cases} \Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |q|^3 < 1, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1/|q| > 1$$

Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ergibt sich auch aus S3.2.8, da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Umordnung von $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ ist (& $\sum_{n=0}^{\infty} |q|^n < \infty$ da $|q|<1$)

A3.2.7 Kann man mit Hilfe des Wurzel- oder Quotientenkriteriums auf die Konvergenz der folgenden Reihen schließen?

(.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}, m \in \mathbb{Z}$ (..) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^k}$

Bew: (.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$ konv $m \geq 2$

(..) $\sqrt[k]{|z_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{(1+1/k)^k}} = \frac{1}{1+1/k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$,

$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|z_k|} = 1$ keine Aussage möglich:

$\sqrt[k]{|z_k|} \leq 1$, $\sqrt[k]{|z_k|} \leq q < 1$ nicht möglich

$\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| = \frac{(1+\frac{1}{k})^k}{(1+\frac{1}{k+1})^{k+1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{e} = 1$ keine Aussage möglich! Aber

$z_k = \frac{1}{(1+1/k)^k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+1/k)^k}$ monoton wachsend $\Rightarrow$ unbeschränkt $\Rightarrow$ divergent.

A3.2.8 Untersuche folgende Reihen auf absolute Konvergenz:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Lös:Quotientenkriterium $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!\,k^k}{(k+1)^{k+1}k!} = \frac{(k+1)}{(k+1)}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 =$

$\frac{1}{(1-1/k)^k} \to 1/e<1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k + k}{k^3 + 1}$, Hinweis:Folgere zunächst aus S2.2.2 Bsp 1 ● ●, daß

die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent ist.

//S1.2.1 (406) Vor: K angeordnet, a,b∈K 6.)|a+b|≤|a|+|b|//

Lös: Majorantenkriterium..$\left|\frac{(-1)^k + k}{k^3+1}\right| \underset{S1.2.1\ 6.)}{\leq} \frac{1+k}{k^3+1} \leq \frac{1+k}{k^3} \leq \frac{2k}{k^3} = \frac{2}{k^2}$

konvergente Majorante $\Rightarrow$ absolut konvergent, da $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

konvergente Majorante.

Andere Formulierung:

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergent, $0 \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{(k-1)k} \Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = 1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k\cdot 2^k}{3^k}$

Lös:Zeige (.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ und (..) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cdot 2^k}{3^k}$ absolut konvergent $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\cdot 2^k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k\cdot 2^k}{3^k}$ absolut konvergent.

(.)Wurzelk. $\sqrt[k]{\frac{k^2}{3^k}} = \frac{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2}{3} \to 1/3<1$ absolut konvergent

(..)Wurzelk. $\sqrt[k]{\frac{k\cdot 2^k}{3^k}} = \sqrt[k]{k}\,\frac{2}{3} \to 2/3<1$ absolut konvergent..

ursprüngliche Reihe konvergent

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+1}$

//4a) $\exists\ 0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|} \le q \quad \forall\ n \ge n_0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent.

Lös: $\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{3^{k+1}+1}}{\frac{2^k}{3^k+1}}\right| = \frac{2^{k+1}(3^k+1)}{(3^{k+1}+1)2^k} = 2\frac{3^k+1}{3^{k+1}+1} = 2 \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 2\frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \overline{\lim_{k\to\infty}}\ \&\ \underline{\lim_{k\to\infty}} < 1 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{3^k+1}$

konvgt $\Rightarrow$ ($\frac{2^k}{3^k+1}$ ist Nullfolge)

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$

Lös: $\frac{k^3}{k^3+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{k^3+1}}_{\le\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{2} \quad \forall\ k \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{k^2}{k^3+1} = \frac{1}{k}\frac{k^3}{k^3+1} \ge \frac{1}{2}\frac{1}{k} \Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{k})$ Minorante zu $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$.

Würde $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{k})$ konvergieren,

so wäre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2}\frac{1}{k})$ auch konvergent

im Widerspruch zur Divergenz von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \Rightarrow$ Minorante divergent $\Rightarrow$

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$ divergent

Anmerkung: $\frac{k^2}{k^3+1} = \frac{k^{-1}}{1+k^{-3}} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 0$ ...Nullfolge

f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+1}$

Lös: $\frac{2k}{3k+1} = \frac{2}{3+k^{-1}} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} \frac{2}{3} \ne 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+1}$ divergent

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Lös: $\left|\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}\right| = \frac{(n+1)!(n+1)!(2n)!}{(2n+2)!n!n!} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{n^2+2n+1)}{4n^2+6n+2)} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} \frac{1}{4} \Rightarrow$

$(\underline{\lim_{x\to\infty}}\ \&\ \overline{\lim_{x\to\infty}}) = \frac{1}{4}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ist konvergent

h) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^{\log(k)}}$

Lös: $\frac{1}{9^{\log(k)}}=9^{-\log(k)}=e^{-\log(9)\log(k)}=k^{-\log(9)}$. $e^2 \underbrace{\leq}_{e<3} 9 \Rightarrow 2\log(9) \Rightarrow \sum \frac{1}{k^2}$ konv Maj $\Rightarrow$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9^{\log(k)}}$ konvergiert

i) ● Bsp für Reihe die konvergiert, aber nicht absolut konvergiert?

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$, konvergent nach Leibnitzkrit, da $\frac{1}{k}\downarrow$ & alternierend

$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k \frac{1}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergent.

● ● Bsp für Reihe die divergiert, aber S3.2.2 5b) nicht erfüllt?

//S3.2.2(1700)

//Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}, (w_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$.

//5b)Beh: ● $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1\ \forall\ n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < \infty$ ($\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *absolut konvergent)*

// ● ● $\underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| > 1\ \forall\ n\geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n| = \infty$ *divergent*

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3+1}$ divergiert nach e), aber

$$\left|\frac{\frac{(k+1)^2}{(k+1)^3+1}}{\frac{k^2}{k^3+1}}\right| = \frac{(k+1)^2(k^3+1)}{((k+1)^3)k^2} = \frac{(k^2+2k++1)(k^3+1)}{(k^3+3k^2+3k+1)k^2} = \frac{k^5+2k^4+k^3+k^2+2k+1}{k^5+3k^4+3k^3+k^2} \underbrace{\rightarrow}_{k\to\infty} 1$$

● ● ● Bsp für Reihe die divergiert, aber beschränkt ist?

Lös: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, da Partialsummenfolge -1,0,-1,0,....ist beschränkt, divergent, da HW 0 und -1

A3.2.9 a_k, $b_k\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{N}_0$. Beweise:

Abelsches Kriterium:Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und die Folge $(b_k)_{k=1}^{\infty}$ monotone Nullfolge, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k$.

A3.2.10 Doppellimes, iterierte Grenzwerte, sofern existent

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\mu}}$, Konvergenz für $\mu \in R$

//**S3.2.2** 2.)Majorantenkriterium

// $|z_n| \le b_n$, $\forall$ $n \ge n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent

a) $\mu>1$ b) $\mu \ge 2$ mit Majorantenkriterium

Lös: a) $n \in N$: $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} < \frac{2^n}{2^{n*\mu}} = 2^{(1-\mu)n}$ ...2^n Summanden, größter $\frac{1}{2^n+1} <S \frac{1}{2^n}$

n=1, k=3,4; n=2, k=2,...8 usw

*: Für geeignete $r,s \in N$, mit $m \ge 2^r$, $n \le 2^{s+1}$, n>m, r<s+1

oBdA n>m, $|S_n - S_m| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^{\mu}} \le \sum_{k=2^r+1}^{2^{s+1}} \frac{1}{k^{\mu}} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=r}^{s} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k^{\mu}} < \sum_{k=r}^{s} 2^{(1-\mu)n} =$

$2^{(1-\mu)r} \sum_{n=0}^{s*r} 2^{(1-\mu)n} = 2^{(1-\mu)r} \left(\frac{1-2^{(1+)(s-r+1)}}{1-2^{n-\mu}} \right)$

$\frac{1-2^{(1+)(s-r+1)}}{1-2^{n-\mu}}$ ist beschränkt durch $\left| \frac{1}{1-2^{1-\mu}} \right|$ denn $0<2^{(1-\mu)(s-r+1)}<1$

$|S_n - S_m| < \underbrace{2^{(1-\mu)r}}_{\to 0} \left| \underbrace{\frac{1}{1-2^{1-\mu}}}_{beschränkt} \right|$

b) $\frac{1}{k^{\mu}} \le \frac{1}{k^2}$ für $\mu \ge 2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\mu}}$ konvergiert nach Majorantenkriterium durch

Vergleich mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

A3.2.11

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2-1}{k^2-3k+4}$

Lös: $\frac{2k^2-1}{k^2-3k+4} \underbrace{\to}_{k \to \infty} 2$ … da $\frac{2k^2-1}{k^2-3k+4} \not\to 0 \Rightarrow$ Divergenz

$\frac{2k^2-1}{k^2-3k+4} > 0$ $\forall$ $\kappa \in N$ $\Rightarrow$

Partialsummenfolge S_n streng mnoton wachsend, unbeschränkt $\Rightarrow S_n \underbrace{\rightrightarrows}_{n \to \infty}$ ∞

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^k+1}}$

//**S3.2.2** 2.)Majorantenkriterium

// $|z_n| \le b_n$, $\forall$ $n \ge n_0$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent

Lös: $\left| \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right| = \sqrt{\frac{k}{k+1}} \le k^{-3/2} = \left(\frac{1}{k} \right)^{3/2}$. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^{3/2}$ nach Bsp Seite 1702 konvergent

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.22.)} \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{k}{k^k+1}}$ konvergent.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$

//**S3.2.2** 5b) Beh: • $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| <1\ \forall\ n\ge n_1\ge n_0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|<\infty$ ($\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$

// absolut konvergent)

Lös: $\frac{2^k}{k!}\neq 0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$. $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} = \left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{2^k}{k!}}\right| = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left|\frac{2}{k+1}\right| = 0<1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.25b)}$ Konvergenz ($=e^2$)

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}$

//**S3.2.2** 4a) $\exists\ 0<q<1$ mit $\sqrt[n]{|z_n|}\le q\ \ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent.

Lös: $\sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}\right|} \underbrace{=}_{k\to\infty} \left(\underbrace{\frac{k}{3k-1}}_{\to 1/3}\right)^2 \underbrace{\sqrt[k]{\underbrace{\frac{3k-1}{k}}_{\to 3}}}_{\to 1} \underbrace{\to}_{k\to\infty} \frac{1}{9} \Rightarrow \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{3k-1}\right)^{2k-1}\right|} = \frac{1}{9}<1 \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.24a)}$ konverg

A3.2.10

a) Beweise den Cauchy'schen Verdichtungssatz: Es sei $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen.

Dann konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Bew: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei eine monoton fallende Folge mit $a_n\ge 0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

„⇐" Es genügt, zu zeigen, dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ beschränkt ist, da

$(a_n)_{n=1}^{\infty}\searrow$, $a_n\ge 0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{\infty\,?} 2^k a_{2^k} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2*a_{2^k} \le \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2a_\nu \le 2*\sum_{j=2}^{2^n} a_j \le 2\sum_{j=2}^{\infty} a_j.$$

$$\# \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k} \underbrace{=}_{*} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2*a_{2^k} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k} 2a_\nu \le 2*\sum_{j=2}^{\infty} a_j.$$

Hieraus folgt die Beh.

	$\nu=$	1	2	3	4	5	6	7	8	
*	k=1	$2a_{2^1}$								$=2^1 a_{2^1}$
	2	$2a_{2^2}$	$2a_{2^2}$	$2a_{2^2}$	$2a_{2^2}$					$=2^2 a_{2^2}$
	3	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$2a_{2^3}$	$=2^3 a_{2^3}$

usw

„⇒" Auch hier genügt z.z., dass $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ beschränkt ist.

Für $n\in(2^{k-1}+1, 2^k]\cap\mathbb{N}$ $k\in\mathbb{N}$ gilt aber

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \le \sum_{\nu=1}^{2^k} a_\nu \le \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j} a_\nu + a_1 \le \sum_{j=1}^{k} \sum_{\nu=2^{j-1}+1}^{2^j} a_{2^{j-1}} + a_1 = \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^{j-1}} + a_1 \le \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} + 2a_1.$$

Wieder folgt die Beh.