A4.1.1 Es sei $O \subset \mathbb{R}$, O offen. Zeige: $O=\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ bzw. $O=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ mit paarweise disjunkten Intervallen $I_k \subset \mathbb{R}$.

Bew: $\exists$ Intervalle I_k, $k\in\{1,...,N\}$ mit $N\in\mathbb{N}_0$ bzw $k\in\mathbb{N}$, welche paarweise disjunkt sind (d.h. $I_\nu \cap I_\mu=\emptyset$ für $\nu\neq\mu$) mit $O=\bigcup_{k=1}^{N} I_k$ bzw. $O=\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$

(Bem: Für N=0 bedeutet dies $O=\bigcup_{k=1}^{0} I_k=\bigcup_{k\in\emptyset} I_k=\emptyset$)

Vorbem. zum Bew:

Es gilt für $I\subset\mathbb{R}$ mit $|I|\geq 2$ (I hat mindestens 2 Elemente).

I Intervall (nicht beschränkt) $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x_1,x_2\in I$ ist $(x_1,x_2)\subset I$.

*//**S0.2.1**(102)*

//Vor: Sei X beliebige Menge $\neq\emptyset$, dann gilt

//1.)Ist R eine ÄR in/auf X, so ist die Menge aller ÄK von R

// eine Partition von X (d.h. X ist die Vereinigung von

// paarweise disjunkten ÄK $\neq\emptyset$, oder X ist in disjunkte ÄK $\neq\emptyset$

// zerlegt: $X=\bigcup_{x\in X}(x|_R)$).

Bew: Die Behauptung lässt sich auch folgendermaßen formulieren:

$\exists$ eine Partition von O in höchstens abzählbar viele Intervalle.

Deshalb liegt es nahe, eine Äquivalenzrelation zu betrachten.

Definiere auf O folgende Relation:

$x_1\sim x_2 :\Leftrightarrow$ $\exists$ Intervall I mit $x_1,x_2\in I$ und $I\subset O$.

\# Wenn diese eine Äquvalenzreation ist, bilden die #

\# Äquivalenzklassen eine Partition

Dies ist eine Äquivalenzrelation, denn

*//**D0.2.1** (100)Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Jede Teilmenge $R\subset X\times Y$ heißt eine// // Relation der Menge X zur Menge Y//*

//Bez: $x \overset{R}{\sim} y$ oder xRy: $\Leftrightarrow$ $(x,y)\in R$ x steht in Relation zu y bzw//

// $x \not R y :\Leftrightarrow (x,y)\notin R$ //

// Falls X=Y heißt $R\subset X\times X= X^2$ Relation in oder auf X//

*//**D0.2.2** (100)//*

//1.)Eine Relation R auf X (d.h. $R\subset X\times X$) heißt,//

// reflexiv: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x\in X$ gilt xRx (d.h. $(x,x)\in R$)//

// symmetrisch: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x,y\in X$ mit $xRy \Rightarrow yRx$ //

// (d.h. $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x)\in R$)//

// antisymmetrisch: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x,y\in X$ mit xRy und $yRx \Rightarrow x=y$//

// (d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,x)\in R) \Rightarrow x=y$)//

// transitiv: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $x,y,z \in X$ mit xRy und $yRz \Rightarrow xRz$//

// (d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$)//

//2.)Eine Relation R auf X heißt Äquivalenzrelation (ÄR): $\Leftrightarrow$//

// R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv//

(.) ~ ist reflexiv: Sei $x\in O$ bel $\underset{O\ offen}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\varepsilon>0$: $(\underbrace{(x-\varepsilon),(x+\varepsilon)}_{I})=U_\varepsilon(x)\subset O$

$\underset{x\in I}{\Rightarrow}$ $x\sim x$ #(Da O offen ist, existiert zu jedem $x\in O$ eine Umgebung

\# $U_\varepsilon(x)$ innerhalb von O. Das ist ein Intervall, welches x

\# enthält. Die Vorschrift zur Bildung der Relation kann

\# dem x ein x zuordnen, d.h. $(x,x)\in R$)

(..) ~ ist symmetrisch: Sei $x_1\sim x_2 \Rightarrow \exists$ I (=Intervall) mit

$x_1,x_2\in I$ und $I\subset O \Rightarrow x_2,x_1\in I$ und $I\subset O \Rightarrow x_2\sim x_1$

(...) ~ ist transitiv: Seien $x_1\sim x_2, x_2\sim x_3 \Rightarrow \exists$ Intervalle I,J mit

$x_1, x_2 \in I$ und $I \subset O$, $x_2, x_3 \in J$ und $J \subset O$ $\underset{x_2 \in I \cap J}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $I \cap J \neq \emptyset$ $\underset{I,J \text{ Intervalle}}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$I \cup J$ ist ein Intervall und $x_1, x_3 \in I \cup J$, $I \cup J \subset O \Rightarrow x_1 \sim x_3$

Bezeichne $I_x = x|_\sim$ die Äquivalenzklasse von $x \in O$

Beh: I_x ist ein Intervall

Bew: Seien $x_1, x_2 \in I_x$ bel. Z.z. Intervall $(x_1, x_2) \subset I_x$ (wegen Vorbem!).

Sei dazu $y \in (x_1, x_2)$ bel. Wegen $x_1 \sim x_2$ (da $x_1 \sim x$ und $x_2 \sim x$) folgt:

$\exists$ Intervall I mit $x_1, x_2 \in I$ und $I \subset O$ $\underset{y \in x_1, x_2}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $y \in I \Rightarrow$

$y \sim x_1$ (und $y \sim x_2$) $\underset{x_1 \sim x}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $y \sim x \Rightarrow y \in I_x$.

Damit hat man zumindest: $O = \bigcup_{x \in O} I_x$ mit $I_{x_1} = I_{x_2}$ oder $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \emptyset$

$\forall\ x_1, x_2 \in O$

Wähle nun aus jeder Äquivalenzklasse I_x einen rationalen Repräsentanten:

Formel: Sei $S = \{I_x : x \in O\}$ die Menge der Äquivalenzklassen und wähle eine bijektive Abbildung $f: S \to O \cap \mathbb{Q}$, dies ist möglich, da jede Äquivalenzklasse I_x ein Intervall ist, also einen rationalen Punkt enthält).

$f(S) = O \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow f(S)$ ist höchstens abzählbar #da Q höchstens abzählbar#

$\Rightarrow f(S) = \{r_1, ..., r_N\}$ mit $N \in \mathbb{N}_0$ oder $f(S) = \{r_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Also insgesamt $O = \bigcup_{k=1}^{N} I_{r_k}$ bzw. $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{r_k}$ mit paarweise disjunkten Intervallen I_{r_k}

(Wem die Indizierung nicht gefällt: Sei $\tilde{I}_k = I_{r_k} \Rightarrow O = \bigcup_{k=1}^{N} \tilde{I}_k$ bzw $O = \bigcup_{k=1}^{\infty} \tilde{I}_k$.)

A4.1.2 Zeige mit Hilfe der identischen Abbildung, daß jede nichtleere kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt

A4.1.3 Prüfe bei folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$, ob sie offen abgeschlossen oder kompakt sind.

a) $B=(0,1)\cup(3,5)$

*//**S4.1.1**(2204) 1.) Für $M\subset\mathbb{R}$ oder $M\subset\mathbb{C}$ gilt*
// a) $\overset{o}{M}=\bigcup_{O\subset M} O$ =Vereinigung aller offenen Teilmengen von M

Lös: (0,1) & (3,5) offen $\underset{S4.1.1}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\overset{o}{B}=(0,1)\cup(3,5)=B \Rightarrow$ B offen

Sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(5-\frac{1}{n})\subset B$ & $\lim\limits_{n\to\infty}(5-\frac{1}{n})=5\notin B \Rightarrow$ B nicht abgeschlossen $\Rightarrow$ B nicht kompakt

b) $C=f(B)$ mit $f(x)=\frac{1}{x}$

Lös: $0<x<1 \Rightarrow \infty>f(x)>1 \Rightarrow f: (0,1)\to(1,\infty)$

$3<x<5 \Rightarrow \frac{1}{3}>f(x)>\frac{1}{5} \Rightarrow f: (3,5)\to(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$

$C=f(B)=(1,\infty)\cup(\frac{1}{3},\frac{1}{5})$ $\underset{wie\ a)}{\underbrace{\Rightarrow}}$ C offen, nicht abgeschlossen, nicht kompakt

c) $D=\overline{B}$

Lös: $[0,1]$ & $[3,5]$ abgeschlossen $\Rightarrow [0,1]\cup[3,5]$ abgeschlossen $\Rightarrow$
$[0,1]\cup[3,5]$ ist eine mögliche abgeschlossene Obermenge $Q\supseteq B$

Darstellung Randp. 0,1,3,5 in Form $(a_n)_{n=1}^{\infty}=(a-\frac{1}{n})$ möglich $\Rightarrow$

$0,1,3,5\in Q \Rightarrow Q=\overline{B}$

$(1+\frac{1}{2}\varepsilon)\notin\overline{B}$ & $(1+\frac{1}{2}\varepsilon)\in U_\varepsilon(1) \Rightarrow$ Q nicht offen

Q abgeschlossen und beschränkt $\Rightarrow$ Q kompakt

d) $E=\overline{f(B)}$

Lös: $\overline{f(B)}=[0,\infty)\cup[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ abgeschlossen

$U_\varepsilon(0)\not\subset\overline{f(B)} \Rightarrow \overline{f(B)}$ nicht offen,

$\overline{f(B)}$ nicht beschränkt $\Rightarrow \overline{f(B)}$ nicht kompakt