A4.4.1 Beweise, dass ein Polynom ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle hat.

Bew:Es sei $f(x)=\sum_{k=0}^{2n-1} a_k x^k$ $n\in\mathbb{N}$, $a_{2n-1}\neq 0$.

ObdA sei $a_{2n-1}>0$ (sonst f durch −f ersetzen)

Für $x\neq 0$ gilt $g(x):=\frac{f(x)}{a_{2n-1}x^{2n-1}}=\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{a_k}{a_{2n-1}}*\underbrace{x^{\overbrace{k-2n+1}^{<0}}}_{\to 0, x\to\pm\infty}+\underbrace{\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-1}}x^{2n-1-2n+1}}_{=1}\Rightarrow$

$\lim_{x\to\infty} g(x)=1=\lim_{x\to-\infty} g(x)$ $\Rightarrow$ $\exists$ $x_1>0$ mit $g(x)\geq 1/2$ $\forall$ $x\geq x_1$ $\Rightarrow$

$f(x_1)=g(x_1)\,a_{2n-1}x_1^{2n-1}>0$.

$\exists$ $x_2<0$ mit $g(x)\geq 1/2$ $\forall$ $x\leq x_2$ $\Rightarrow$

$f(x_2)=\underbrace{g(x_2)}_{>0}\underbrace{a_{2n-1}}_{>0}\underbrace{x_2^{2n-1}}_{<0}<0$.

$\underset{S4.4.1}{\Rightarrow}$ Da f stetig, existiert $\xi\in(x_2,x_1)$ mit $f(\xi)=0$

A4.4.2

a) Geg sei eine stetige Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $f(0)=f(1)$.
Zeige:Es existiert mindestens ein $\xi\in[0,1/2]$ mit $f(\xi)=f(\xi+1/2)$

*//**S4.3.3** (2403)Rechenregeln für Stetigkeit//*
//Vor:f,g: $M\to\mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0\in M$.//
//Beh: 2.)$\alpha f+\beta g$ stetig in x_0 $\forall$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (bzw $\in\mathbb{C}$)//

Lös: [——|——]——|—]
0   ξ   ½   ξ+1/2   1

Definiere $g:[0,1/2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-f(x+1/2)$ $\underset{S4.3.3\,2.)}{\Rightarrow}$ g stetig.

Fall 1:$g(0)=0$ $\Rightarrow$ $f(0)=f(1/2)$ $\Rightarrow$ Beh mit $\xi=0$

Fall 2:$g(0)\neq 0$ $\Rightarrow$

$g(1/2)=f(1/2)-f(1)=f(1/2)-f(0)=-g(0)$ $\Rightarrow$

$g(0)$ und $g(1/2)$ haben verschiedene Vorzeichen $\Leftrightarrow$

$\exists$ $\xi\in(0,1/2)$: $g(\xi)=0$ $\Rightarrow$ Beh

b) $[0,1]\to[0,1]$, Surjektiv oder injektiv?

• $f(x) : x \mapsto x^k$, $k\in\mathbb{N}$ beliebig

Lös: Seien $x,y\in[0,1]$, $y>x$ (d.h. $y>0$) $\Rightarrow$

$$y>x \underbrace{\Rightarrow}_{y>0} y^2>yx \underbrace{\Rightarrow}_{y>x} y^2>x^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y>0} y^3>yx^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y>x} y^3>x^3 \text{..usw} \underbrace{\Rightarrow}_{Induktion} y^k>x^k \ \forall\ k\in\mathbb{N} \Rightarrow f\uparrow$$

$\Rightarrow$ f injektiv

//**S4.4.1**(2500) **Z**wischenwertsatz (ZWS)
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

$f(x)=x^k$ stetig, $f(0)=0$, $f(1)=1 \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1} \forall\ y\in[0,1]: y=f(x) \Rightarrow$

f surjektiv

• • $g(x) : x\mapsto \sin(\pi x)$

Lös: $g(0)=g(1)=0 \Rightarrow$ nicht injektiv

sin und πx sind stetig und $g(0)=0$, $g(1/2)=1 \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1}$ f surjektiv

• • • $h(x): x\mapsto \frac{1}{2}x$

Lös: $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y \Rightarrow x=y \Rightarrow$ h injektiv

z.B. $1\neq h(\underbrace{x}_{\in[0,1]}) \Rightarrow$ nicht surjektiv

c) Gesucht: Bijektive,stetige Funktion $f:(0,1)\to(0,\infty)$

//**S4.4.1**(2500) Vor: $I\subset\mathbb{R}$ Intervall, $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.

Lös: $f(x)=-\log x$,

Bew: $\log\uparrow \Rightarrow f\downarrow$ und stetig

$f(1)=0$ & $f(0_+)=\infty \underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1} \forall\ y\in(0,\infty)\ \exists\ x\in(0,1): y=-\log x \Rightarrow$

f surjektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{\log\ und\ -\log\ injektiv}$ f stetig bijektiv

d) Es sei $a_1<a_2<\ldots<a_n$ ($n\in\mathbb{N}$). Zeige:

a) Die Gleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k}=0$ besitzt genau n-1 reelle Lösungen

Lös: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k}=0$ …multipliziert mit $\prod_{j=1}^{n}(x-a_j) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_j)=0.$

Bsp: $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{x-a_k}=0 \Leftrightarrow \prod_{j=1}^{3}(x-a_j)\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{x-a_k}=0 \Leftrightarrow$

$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\left(\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\frac{1}{x-a_3}\right)$

$=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)=\sum_{k=1}^{3}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(x-a_j)=0 \Leftrightarrow$

$P(x):=(x-a_2)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_3)+(x-a_1)(x-a_2)$, Grad=3-1=2

$P(\underbrace{a_{\underset{=k}{1}}}_{=x})=(a_1-a_2)(a_1-a_3)+(a_1-a_1)(a_1-a_3)+(a_1-a_1)(a_1-a_2)=$

$(a_1-a_2)(a_1-a_3)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(a_1-a_j)>0$

$P(\underbrace{a_{\underset{=k}{2}}}_{=x})=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(a_2-a_j)=(a_2-a_1)(a_2-a_3)<0$

$P(\underbrace{a_{\underset{=k}{3}}}_{=x})=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{3}(a_2-a_j)=(a_3-a_1)(a_3-a_2)>0$ $(a_1<a_2<\ldots<a_n \Rightarrow (a_3-a_1)\ldots(a_3-a_n)>0)$

Definiere $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $P(x)=\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(x-a_j)$ ist ein Polynom vom Grad n-1

$P(a_k) \underset{k=1,\ldots,n}{=} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n}(a_k-a_j)=\prod_{j=1}^{k-1}\underbrace{(a_k-a_j)}_{>0}\prod_{j=k+1}^{n}\underbrace{(a_k-a_j)}_{<0}=\underbrace{\prod_{j=1}^{k-1}(a_k-a_j)\prod_{j=k+1}^{n}(a_j-a_k)}_{>0}(-1)^{n-k}$

$\Rightarrow P(a_n)>0,\ P(a_{n-1})<0,\ P(a_{n-2})>0$ usw $\underset{ZWS\ 4.4.1}{\Leftrightarrow}$

$\exists\ \xi_k\in(a_k,a_{k+1})$ mit $P(\xi_k)=0$ $(k=1,\ldots,n-1)$

d.h P besitzt genau n-1 reelle Nullstellen ($P(x)=nx^{n-1}+\ldots$) $\Rightarrow$
P besitzt max n-1 Nullstellen) und somit besitzt die Gleichung
genau n-1 Lösungen.

b) Die Gleichung $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k} = c$ $(c\neq 0)$ besitzt genau n reelle Lösungen

Lös: $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-a_k} = c \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x-a_k) - c\prod_{j=1}^{n} (x-a_j) = 0.$

Definiere $Q: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Q(x)=P(x)-c\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)$. Dann gilt für $k=1,...n$:

$Q(a_k) \underbrace{=}_{x=a_k \Rightarrow a_k - a_{j\neq k} = 0} P(a_k) \Rightarrow$ Für $k=1,...,n-1$ $\exists\ \xi_k\in(a_k,a_{k+1})$ mit $Q(\xi_k)=0$.

Andererseits gilt im Fall >0 ???:

$$Q(x) = \underbrace{P(x)}_{\text{grad } n-1} - c\underbrace{\prod_{j=1}^{n}(x-a_j)}_{\text{grad } n} = x^n \underbrace{\left(\underbrace{\frac{P(x)}{x^n}}_{\to 0} - c\underbrace{\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{a_j}{x}\right)}_{\to c}\right)}_{-c} \text{ ??? } \# \to -cx^n \to \pm\infty \ \overset{\Rightarrow}{c): a_1>0, a_n>0}$$

$\#$ $\exists\ \xi_n\in(-\infty<-cx^n, a_1)$ oder $\xi_n\in(a_n<-cx^n<\infty)$: $Q(\xi_n)$

A4.4.3 Betrachte für $\alpha\in\mathbb{R}$ die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definiert

durch $f(x)=\begin{cases} x^\alpha * \log x \ \textit{für}\ x>0 \\ 0 \ \textit{für}\ x=0 \end{cases}$.

Zeige, dass f auf $(0,\infty)$ stetig ist,
dass f im Punkt $x_0=0$ aber nur dann stetig ist, wenn $\alpha>0$ ist

*//**S4.3.3** (2403)Vor:f,g: $M\to\mathbb{R}$ stetig im Punkt $x_0\in M$.//*
// 2.)fg stetig in x_0,//
*//**S3.2.11** (1753)Expotentialreihe//*

// Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.//

// $\forall\ z\in\mathbb{R}$ gilt weiter $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! = \exp(z) = \lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.//

Bew: x^α und $\log x$ sind stetig auf $(0,\infty)$ $\underset{S4.3.3\,2.)}{\Rightarrow}$ $f(x)=x^\alpha\log x$ stetig auf $(0,\infty)$.

$$f \text{ stetig in } x_0=0 \Leftrightarrow \underbrace{\lim_{x\to 0_+} f(x)}_{\underset{*}{=}\begin{cases}-\infty,\text{falls }\alpha\le 0\\ 0,\text{falls }\alpha>0\end{cases}} = f(0)=0 \Leftrightarrow \alpha>0 \text{ siehe } *$$

$$\text{Bew*: (.) } x^\alpha=\exp(\alpha\log x) \underset{x\to 0_+}{\rightarrow} \begin{cases}\infty,\text{ falls }\alpha<0\\ 1,\text{ falls }\alpha=0\\ 0,\text{ falls }\alpha>0\end{cases} \Rightarrow$$

$$x^\alpha\log x \underset{x\to 0_+}{\rightarrow} -\infty \text{ falls } \alpha\le 0 \quad (\text{da } \log x \underset{x\to 0_+}{\rightarrow} -\infty)$$

(..)Sei $\alpha>0$:

$$x^\alpha\log x \underset{x\to 0_+}{<} 0,\quad -x^\alpha\log x \underset{x\to 0_+}{>} 0$$

$$x^{-\alpha}=\exp(\alpha\log(1/x)) \# \underset{S3.2.11.)}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\alpha\log(1/x))^\nu}{\nu!} = 1+\frac{\alpha\log(1/x)}{1!}+\frac{(\alpha\log(1/x))^2}{2!}+\ldots\ge$$

$$1+\frac{\alpha\log(1/x)}{1!}+\frac{(\alpha\log(1/x))^2}{4} \#= \left(1+\frac{\alpha\log(1/x)}{2}\right)^2 \ge \frac{\alpha^2}{4}(\log 1/x)^2$$

$$\underset{x^\alpha\le\frac{4}{\alpha^2(\log 1/x)^2}}{\Rightarrow} 0<-x^\alpha\log x = x^\alpha\log 1/x \le \frac{4}{\alpha^2}\frac{1}{\log(1/x)} \underset{x\to 0_+}{\rightarrow} 0$$

da $\log(1/x)\to\infty$, $(1/x\to\infty,\ x\to 0_+)$ $\Rightarrow$ $-x^\alpha\log x \underset{x\to 0_+}{\rightarrow} 0$ $\Rightarrow$ $x^\alpha\log x \underset{x\to 0_+}{\rightarrow} 0$

A4.4.4 Untersuche die Funktion $f:(0,1)\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x)=\begin{cases} 1/q \text{ für } x=p/q \text{ mit } p,q\in\mathbb{N}, \text{ wobei der Bruch gekürzt sei} \\ 0 \text{ für } x\in(0,1)\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

auf Stetigkeit in jedem Punkt des Intervalls (0,1)

*//**S4.3.2**(2403)Folgenstetigkeit//*
// Genau dann ist $f=D\to\mathbb{K}$ stetig in $x_0\in D$, wenn für jede Folge//
// (x_n) in D mit $x_n\to x_0$ auch $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(x_0)$ gilt.//

Lös:Beh:(.) f ist unstetig in jedem $x_0\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$
(..) f ist stetig in jedem $x_0\in(0,1)\setminus\mathbb{Q}$

Bew:(.) Sei $x_0\in(0,1)\cap\mathbb{Q}$ beliebig, fest. Wähle eine Folge (x_n) in $\{(0,1)\setminus\mathbb{Q})\setminus\{x_0\}$ mit $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ (solch eine Folge existiert..

z.B $x_1\in(0,1)\setminus\{\mathbb{Q}),x_0\}$, $x_{n+1}=\frac{x_0+x_n}{2}$) rekursiv# $\Rightarrow$

$f(x_n)=0 \Rightarrow 0\neq f(x_0)$, da $x_0\in\mathbb{Q}\cap(0,1) \underset{S4.3.2}{\Rightarrow}$ f unstetig bei x_0

(denn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert nicht oder...und ist $\neq f(x_0)$)

//**D4.3.1**(2400) $D\subset\mathbb{R}$. $f: D\to\mathbb{R}$, stetig im Punkt $x_0\in D :\Leftrightarrow$
// $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 : f(x)\in U^{\varepsilon}(f(x_0))\ \forall\ x\in D\cap U_\delta(x_0)$ oder äquivalent....
// $(\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta)$.
// f heißt stetig auf $A\subset D :\Leftrightarrow$ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.
// **S1.5.15**(759)
//2.) $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b$ (.) $\exists\ q\in\mathbb{Q}$ mit $a<q<b$ und (..) $\exists\ d\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $a<d<b$

#(..) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 : |f(\underbrace{x}_{\in(0,1)\subset Q}) - \overbrace{f(\underbrace{x_0}_{\in(0,1)/Q})}^{=0}| = f(x)<\varepsilon\ \ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$.

$x\in(0,1)\cap Q \Rightarrow x=\frac{p}{q}$ & $p<q$

Betrachtung $M:=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{4}{5}, ..., \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, ..., \frac{q-1}{q}\}$

Zu $\varepsilon>0\ \exists\ q_\varepsilon$: $|f(\underbrace{x}_{\frac{p}{q_\varepsilon}\in M}) - \overbrace{f(\underbrace{x_0}_{\in(0,1)/Q})}^{=0}| = f(\underbrace{x}_{\frac{p}{q_\varepsilon}\in M}) = \frac{1}{q_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow q_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} \underset{q_\varepsilon\in N}{\Rightarrow}$

$q_0=[\frac{1}{\varepsilon}]+1>q_\varepsilon>\frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{q_0}<\varepsilon$

Betrachtung $M_0:=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{4}{5}, ..., \frac{1}{q_0}, \frac{2}{q_0}, ..., \frac{q_0-1}{q_0}\}$

Wähle $0<\delta:=\min\{|\underbrace{x_0}_{\notin Q}-m| : m\in M_0\}$;

Bsp: $\varepsilon=\frac{1}{4}$, $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 0{,}7071 \Rightarrow \frac{1}{q_{0,\varepsilon}}<\frac{1}{4} \Rightarrow q_{0,\varepsilon}>4 \Rightarrow$

$M_{0;1/4}:=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$

Betrachtung Ordnung: $\frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \cong 0{,}7071; \frac{3}{4}; \frac{4}{5} \Rightarrow$

$\delta:=\min\{|x_0-m| : m\in M_{0;1/4}\}=|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}|\cong 0{,}04050$ $(|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}|>\delta)$

Sei $m\in M'_{0;1/4}:=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$ (2/3 fehlt)

$\Rightarrow |m-\approx 0{,}7071| \underset{!!!}{>} \delta=|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}|\cong 0{,}04050$

Betrachtung $M_{q>5}:=\frac{p}{q}\in Q\setminus M_{0;1/4}=\{\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7}, ... \frac{6}{7}, ...\}$

S1.5.15(759): $\exists\ m\in M_{q>5;1/4}$: $\frac{\sqrt{2}}{2}<m<\frac{2}{3}$: $|m-\frac{\sqrt{2}}{2}|<\delta \Rightarrow q>5 \Rightarrow 1/q<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}=\varepsilon$

$\Rightarrow\ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$, $x=p/q\in(0,1)$ mit $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$ teilerfremd gilt:

$x\notin\underbrace{M}_{\subset Q} \Rightarrow q>1/\varepsilon \Rightarrow 1/q<\varepsilon$.

Wegen $f(x)=\begin{cases} 0, \text{falls } x\in U_\delta(x_0)\setminus\mathbb{Q} \\ 1/q, \text{falls } x=p/q\in U_\delta(x_0)\cap\mathbb{Q}\end{cases}$ wobei $p\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{N}$

teilerfremd und $x\notin M\ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$ folgt $|f(x)-\underbrace{f(x_0)}_{=0}|=f(x)<\varepsilon\ \ \forall x\in U_\delta(x_0)$

Bew: Betrachte die Menge
$M:=\{p/q : p\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{N}$ teilerfremd, $p/q\in(0,1)$, $q\geq 1/\varepsilon\}$.
Mit $q_0:=\lfloor 1/\varepsilon\rfloor$ gilt dann

$$\underbrace{M}_{nur\ teilerfremde\ Elemente}\subset\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{4}{5}, ..., \frac{1}{q_0}, \frac{2}{q_0}, ..., \frac{q_0-1}{q_0}\}$$

insbesondere ist M endlich!..

Sei $p/q\in M \Rightarrow p/q\in(0,1)$, $q\le 1/\varepsilon \Rightarrow 1\le p<q$ und $1\le q\le q_0$.
($p\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{N}$ teilerfremd).

Wähle $0<\delta:=\min\{|\underbrace{x_0}_{\notin Q}-m|:m\in M\}$, möglich denn $x_0\notin\mathbb{Q}$ und M ist endlich.

$\Rightarrow\ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$, $x=p/q\in(0,1)$ mit $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}$ teilerfremd gilt:

$x\notin\underbrace{M}_{\subset Q} \Rightarrow q>1/\varepsilon \Rightarrow 1/q<\varepsilon$.

Wegen $f(x)=\begin{cases}0, \text{falls } x\in U_\delta(x_0)\setminus\mathbb{Q}\\ 1/q, \text{falls } x=p/q\in U_\delta(x_0)\cap\mathbb{Q}\end{cases}$ wobei $p\in\mathbb{N}$ und $q\in\mathbb{N}$

teilerfremd und $x\notin M\ \forall\ x\in U_\delta(x_0)$ folgt $|f(x)-\underbrace{f(x_0)}_{=0}|=f(x)<\varepsilon\quad \forall x\in U_\delta(x_0)$

A4.4.5 Es sei $f:[0,1]\to[0,1]$ eine stetige Funktion. Zeige: Es existiert mindestens ein $\xi\in[0,1]$ mit $f(\xi)=\xi$.

Bew:(.) $f(0)=0$ oder $f(1)=1 \Rightarrow$ Beh. richtig
(..) $f(0)>0$ und $f(1)\le 1$. Beachte $f[0,1]\subset[0,1]$.
Betrachte $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x):=f(x)-x \Rightarrow$
g stetig auf $[0,1]$ und $g(0)=f(0)>0$, $g(1)=f(1)-1<0 \underbrace{\Rightarrow}_{ZWS 4.4.1}$

$\exists\ \xi\in[0,1]:g(\xi)=0$, d.h. $f(\xi)=\xi$.

A4.4.6 Zeige

a) $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x^6+1}{x-1}=0$ besitzt im Intervall $(0,1)$ mindestens eine Lösung

*//**S4.4.1**(2500) Zwischenwertsatz (ZWS)//*
//Vor:Sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall $\wedge$ $f:I\to\mathbb{R}$ stetig auf I, $a,b\in I$, $a<b$.//
//Beh:1.) $f(a)<y<f(b)$: $\forall\ y\ \exists$ mindestens ein $x\in[a,b]$ mit $f(x)=y$.//

Bew:Sei $f(x):=\frac{x^2+1}{x}+\frac{x^6+1}{x-1}$, $x\in(0,1) \Rightarrow$

f stetig auf $(0,1)$ da f rationale Funktion und Nenner$\neq 0$,

$\lim_{x\to 0_+} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to 1_-} f(x)=-\infty$, $\Rightarrow\ \exists\ a,b\in(0,1)$, $a<b$ mit $f(a)>0$, $f(b)<0 \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S4.4.1}}^{f\ stetig}$

$\exists\ \xi\in[a,b]$ (insbesondere $\xi\in(0,1)$) mit $f(\xi)=0$
Man kann eine(die) Lösung $\xi\in(0,1)$ von $f(\xi)=0$ noch genauer eingrenzen:

$f(1/2)=\#\frac{1/4+1}{1/2}+\frac{1/64+1}{-1/2}=1/2(5/4-(\frac{1}{64}+1))=1/2(1/4-\frac{1}{64}))=\frac{15}{128}>0\#$

$=1/2(3/4-(\frac{1}{64}+1))=2(1/4-1/64)=15/32>0$

$f(3/5)=\frac{\frac{9}{25}+1}{3/5}+\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6+1}{-2/5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{34}{5}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3^6+5^6}{5^5}=-\frac{3281}{9375}<0$

$\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{ZWS4.4.1}}^{f\ stetig} \Rightarrow\ \exists\ \xi\in(1/2,3/5):f(\xi)=0$

b)Die Gleichung $xe^x=1$ hat genau eine reelle Lösung

//**D0.2.4**(200) Eine Abbildung(Funktion) $f: X\to Y$ heißt//
// 1.)injektiv(eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow\ \forall\ x_1,x_2\in X$ mit $x_1\neq x_2 \Rightarrow$//

// $f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h jedes $y \in Y$ hat max 1 Urbild $x \in X$ mit $y=f(x)$,
d.h./ // aus $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$//
Bew: Sei $f(x):=xe^x$, $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Existenz einer Lösung: $f(0)=\underbrace{0}_{<1}$, $f(1)=e>1 \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S\,4.4.1}}^{f\ stetig} \exists\ \xi \in (0,1): f(\xi)=1$.

Eindeutigkeit der Lösung: $f\uparrow$ auf $(0,\infty)$, denn sei

$0<x_1<x_2: f(x_1)=\underbrace{x_1}_{<x_2}\underbrace{e^{x_1}}_{<e^{x_2}}<x_2e^{x_2}=f(x_2)$ (da e-Fkt $\uparrow$)

Sei $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}$ eine Lösung von $f(x)=1$ (d.h. $f(\tilde{\xi})=1$).

$f(x)=xe^x \leq 0<1\ \forall\ x \leq 0 \Rightarrow \tilde{\xi}>0 \overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{\text{auf } (0,\infty)}}^{f\ \text{injektiv}} \tilde{\xi}=\xi$