A6.4.1 Bestimme zu den folgenden Funktionen eine Stammfunktion:

a) $f(x)=x^{\alpha}$, $x>0$, $\alpha\neq-1$

Lös: $F(x)=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$, $F'(x)=x^{\alpha}$

b) $f(x)=a^{x}$, $a>0$, $x\in\mathbb{R}$.

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//

//2.)Kettenregel//

// Vor:Sei $f:A\to B$ differenzierbar in $z_0\in\overset{o}{A}$, $f(z_0)\in\overset{o}{B}$, und sei $g:B\to\mathbb{C}$ //

// differenzierbar in $f(z_0)$.//

// Beh: $g\circ f:A\to\mathbb{C}$ ist differenzierbar in z_0 und $(g\circ f)'(z_0)=g'(f(z_0))\cdot f'(z_0)$

Lös: $F(x)=\frac{1}{\log a}a^{x}$, $F'(x)=\#(\frac{1}{\log a}a^{x})'=(\frac{1}{\log a}e^{\log a^{x}})'=(\frac{1}{\log a}e^{x\log a})'\underset{S5.1.6}{=}$

$\frac{1}{\log a}(e^{x\log a})'1*\log a=e^{x\log a}=\#\ a^{x}$.

c) $f(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

//**D4.4.3**(2536) Umkehrfnkt zu tan: arcctan: $\mathbb{R}\to(0,\pi]$

//**S5.1.6**(2750)Differentiationsregeln//

//1.)Vor:Seien $f,g: M\to\mathbb{C}$ differenzierbar in $x_0\in\overset{o}{M}$.//

//Andere Formulierung für $\mathbb{R}$://

// Die Funktionen f und $g:I\to\mathbb{R}$ seien differenzierbar in $x_0\in I$//

//Beh:d)Ist $g(z_0)\neq0$ (und damit $\neq0$ in $U_\delta(z_0)\subset M$... $\Rightarrow$ //

// $\exists$ $g(z)\neq0$ auf $U_\delta(z_0)\cap I$), g differenzierbar, d.h. stetig, so ist f/g

// differenzierbar in z_0 und //

// $(f/g)'(z_0)=\frac{f'(z_0)g(z_0)-f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}$ (Quotientenregel)//

//3.)Ableitung der Umkehrfunktion//

// Vor:Sei $A,B\subset\mathbb{R}(\mathbb{C})$ und $f:A\to B$ bijektiv und f differenzierbar in //

// $x_0\in\overset{o}{A}$, $y_0:=f(x_0)\in\overset{o}{B}$ //

//Beh: f^{-1} ist differenzierbar in y_0 $\Leftrightarrow$ f^{-1} ist stetig in y_0 und //

// $f'(x_0)\neq0$ und dann gilt//

// $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$, $(f^{-1})'=\frac{1}{f'\circ f^{-1}}$.//

//**S5.1.5**(2710)Die Expotentialfunktion, die trigonometrischen und die//

// hyperbolischen Funktionen sind auf $\mathbb{C}$ differenzierbar und es//

// gilt $(e^{z})'=e^{z}$, $\sin(z)'=\cos z$, $(\cos z)'=-\sin z$, //

Lös: $x=\tan y\Rightarrow y=F(x)=\arctan x=G^{-1}(x)$, $G(y)=G(G^{-1}(x))=x=\tan y$,

$(G^{-1}(x)=\arctan(\tan y)=y=F(x))$

$G'(y)=(\frac{\sin y}{\cos y})'\underset{S5.1.6\ 1.d),S5.1.5}{=}\frac{\cos^2y+\sin^2y}{\cos^2y}=\frac{1}{\cos^2y}$

$F'(x)=(G^{-1}(x))'\underset{S5.1.6\ 3.)}{=}\frac{1}{G'(y)}=\frac{1}{\tan' y}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{\frac{\cos^2 y+\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+(\tan y)^2}$

$=$

$\frac{1}{1+(\tan(\arctan x))^2}=\frac{1}{1+x^2}$

\# jedoch $\cos y\neq0\Rightarrow\cos(\arctan x)\neq0\Rightarrow\arctan x\neq\pi/2+k\pi$ #

d) $f(x)=x^5\cos(x^3)$, $x\in\mathbb{R}$.

//**S6.4.1**(3400) Partielle Integration//
// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //
// Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//

// $\int_a^b f(x)G(x)dx=F(x)G(x)|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.//

Lös: $\int_0^x t^5\cos(t^3)dt=1/3\int_0^x \underbrace{t^3}_{G}*\underbrace{3t^2\cos(t^3)}_{F',F=\sin t^3}dt \underset{S6.4.1}{=}$

$1/3(t^3*\sin(t^3)\Big|_0^x-\int_0^x 3t^2\sin(t^3)dt)=1/3(t^3\sin(t)^3+\cos(t)^3\Big|_0^x=$

$1/3(x^3\sin(x)^3+\cos(x)^3-\underbrace{1}_{\cos 0^3})=\frac{1}{3}x^3\sin(x^3)+\frac{1}{3}\cos(x^3)-\frac{1}{3}$

e) $f(x)=(\tan x)^2$, $|x|<\pi/2$

Lös: $F(x)=\int(\tan x)^2dx=\int\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)}dx=\int\frac{1-(\cos x)^2}{(\cos x)^2}dx=\int\frac{1}{(\cos x)^2}dx-\int 1dx=$

$\tan x-x$

A6.4.2 Geg.Polynom P(x) mit P(-x)=-P(x).

Zeige: ∃ ein Polynom Q(x) mit Q(-x)=Q(x), so dass $Q(x)\,e^{(x^2)}$ Stammfunktion zu $P(x)\,e^{(x^2)}$ ist.

//**S6.4.1**(3400) Partielle Integration//
// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //
// Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//
// $\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$.//

Lös: Beispiel für P(x): $a_1x+a_3x^3$

$P(-x)$: $a_1(-x)+a_3(-x)^3=-(a_1x+a_3x^3)=-P(x)=a_1(-1)^1x+a_3(-1)^3x^3$

Sei $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$ und $P(-x)=-P(x)$ d.h. $\sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^kx^k=\sum_{k=0}^{n} -a_kx^k$

Keffizientenvergleich: $a_k(-1)^k=-a_k \Rightarrow a_k=0 \quad \forall\ k=2j$

P Nullpolynom=Q Nullpolynom

$\gamma(P)=0$: $P(x)=c$, $P(-x)\neq -P(x)$

$\gamma(P)=1$: $P(x)=a_1x$, $P(-x)=-P(x)$, $P(x)\,e^{(x^2)}=a_1x\,e^{(x^2)}$,

$$\int a_1x\,e^{(x^2)}\,dx = a_1/2\int 2a_1x\,e^{(x^2)}\,dx \underset{u=x^2}{\underbrace{=}} \frac{a_1}{2}\,e^{(x^2)} \Rightarrow$$

$Q(x)=\frac{a_1}{2}$, $Q(-x)=-Q(x)$

$\gamma(P)>1$: Induktion über $n:=\gamma(P)$

Ann:Beh $\forall\ \gamma(P)=k<n$, Sei $\gamma(P)=n$

$$\int P(x)\,e^{(x^2)}\,dx = \int \underbrace{\frac{P(x)}{2x}}_{G(x)}\underbrace{2xe^{(x^2)}}_{f(x)}\,dx = (\underbrace{\frac{P(x)}{2x}}_{G(x)} - \int \underbrace{\frac{P'(x)2x-2P(x)}{4x^2}}_{P_\ell}\,dx)\underbrace{e^{(x^2)}}_{F(x)}$$

$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, $P'(x)=\sum_{k=1}^{n} ka_kx^{k-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k$

$$\tilde{Q}(-x)=\frac{P(-x)}{2(-x)}=\frac{-P(x)}{-2x}=\frac{P(x)}{2x}=\tilde{Q}(x)$$

$\gamma(P)=n \Rightarrow \gamma(P')=n-1 \Rightarrow \gamma(P'(x))*x=n$, $\gamma(P_\ell)\leq n-2$, $P_\ell(-x)=-P_\ell(x)$:

$$\left.\begin{aligned}(P(-x))' &= P'(-x)(-1)\\ (-P(x))' &= -P'(x)\end{aligned}\right\} -P'(-x)=-P'(x) \Rightarrow P'(-x)=P'(x) \Rightarrow$$

$$P_\ell(-x)=\frac{P'(-x)2(-x)-P(-x)2}{4(-x)^2}=-\frac{P'(x)2x-P(x)2}{4x^2}=-P_\ell(x)\ \&\ \gamma(P_\ell)\leq n-2 \underset{IH\ auf\ P_\ell}{\underbrace{\Rightarrow}}$$

$$\frac{P(x)}{2x}\,e^{(x^2)}-Q_\ell(x)\,e^{(x^2)}=(\frac{P(x)}{2x}-Q_\ell(x))\,e^{(x^2)}$$

$P(x)\,e^{(x^2)}=(Q(x)\,e^{(x^2)})'=Q'(x)\,e^{(x^2)}+Q(x)2x\,e^{(x^2)}$

Koeffizientenvergleich

A6.4.3 Berechne die folgenden Integrale

a) $\int_0^{1/2} \arccos x dx$

//**S6.4.1**(3400) Partielle Integration//
// Seien f,g über [a,b] integrierbar und seien F bzw G //
// Stammfunktionen zu f bzw g. Dann gilt//

// $\int_a^b f(x)G(x)dx=F(x)G(x)|_a^b-\int_a^b F(x)g(x)dx$.//

*//**S5.2.12** (2864)Trigonometrische Funktionen//*
//Vor:Sei $\pi/2\in(1,2)$ die kleinste positive Nullstelle von cos x.
//Beh://4.)Bezeichnet arcsin y, $-1\le y\le 1$, die Umkehrfunktion von //
// sin x, $-\pi/2\le x\le\pi/2$ und arccos y, $-1\le y\le 1$, die//
// Umkehrfunktion von cos x, $0\le x\le\pi$, so gilt//

// $\arcsin' y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ und $\arccos' y=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, $-1 \le y \le 1$.//

Lös: $\int_0^{1/2} \underbrace{1}_{f(x)} \underbrace{\arccos x}_{G(x)} dx \underset{S5.2.12}{=} = \underbrace{x}_{F(x)} * \underbrace{\arccos x}_{G(x)} \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \underbrace{x}_{F(x)} \underbrace{\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}_{g(x)=G'(x)} dx=$

$X*\arccos x\Big|_0^{1/2} -1/2 \int_0^{1/2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$

(Subst:$1-x^2=u$, $-2xdx=du$, $x=0 \Rightarrow u=1$, $x=1/2 \Rightarrow u=3/4$)

$x\arccos x\Big|_0^{1/2} -1/2 \int_1^{3/4} \frac{1}{\sqrt{u}}du=x\arccos x\Big|_0^{1/2} -1/2(2\sqrt{u})\Big|_1^{3/4} =$

$\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}-(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)=\frac{\pi}{6}+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\int_1^e \frac{1}{x}(\log x)^5dx$

Lös:Substitution $u=\log x$, $du=\frac{1}{x}dx$, $x=1 \Rightarrow u=0$, $x=e \Rightarrow u=1$

$\ldots=\int_0^1 u^5du=\frac{1}{6}u^6\Big|_0^1 =1/6$

c) $\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \sin x\cos x dx$

Lös: $\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \underbrace{\sin x}_{u}\underbrace{\cos x}_{v'}dx=\sin^2 x\Big|_{5\pi/4}^{3\pi/2}-\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \cos x\sin x dx \Rightarrow$

$2\int_{5\pi/4}^{3\pi/2} \sin x\cos x dx=\frac{1}{2}\sin^2 x\Big|_{5\pi/4}^{3\pi/2} =1/2((-1)^2-(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=\frac{1}{2}(1-2/4)=1/4$

d) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=\int_1^4 2ue^udu=2ue^u\Big|_1^2-\int_1^2 2e^udu=2ue^u\Big|_1^2 -2e^u\Big|_1^2 =4e^2-2e-(2e^2-2e)=2e^2$

A6.4.4 Berechne die folgenden Integrale durch die angegebene Substitution

a) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx$, t=sin x

Lös: $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$, $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-t^2$,

$x=0 \Rightarrow t=0$, $x=\pi/2 \Rightarrow t=1$

$\ldots=t+\frac{1}{2}t^2\Big|_0^1=1+1/2=3/2$

b) $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^3} dx$, x=sin t

Lös: $x=\sin t \Rightarrow t=\arcsin x$, $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$,

$x=0 \Rightarrow t=0$, $x=1/2 \Rightarrow t=\pi/6$

$$\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t}dt=\int_0^{\pi/6} \tan^2 dt=\tan t-t\Big|_0^{\pi/6}=\tan\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6}$$

A6.4.5 Finde eine Potenzreihenentwicklung für arctan x und Entwicklungspunkt 0

Lös: Aus dem 1. Hauptsatz folgt wegen arctan 0=0, dass

$\arctan x=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt \ \forall \ x\in\mathbb{R}$. Aus der geometrischen Reihe

folgt $\frac{1}{1+t^2}=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} \ \forall \ |t|<1$ und die Reihe ist sogar gleichmäßig konvergent für $|t| \leq r$ mit beliebigem $r<1$..

Deshalb folgt aus S????, dass $\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

zunächst nur für $|x| \leq r$, aber, da ja r beliebig dicht bei 1 sein kann, ist dies sogar richtig $\forall \ x:|x|<1$.

A6.4.6 Berechne $\int_0^{\pi} x\cos x dx$ mit partieller Integration.

A6.4.7 Berechne $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$ mit partieller Integration.

A6.4.8 Berechne $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ mit der Sustitutionsregel.

A6.4.9 Zeige mit Substitutionsregel, dass $\int_0^a f(x)dx=\int_{-a}^0 f(-x)dx$. Benutze dies, um zu zeigen, dass das Integral einer ungeraden Funktion über ein Intervall [-a,a] immer 0 ergibt.

A6.4.10 Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $a_1,...a_n\in\mathbb{R}$. Zeige, dass die durch $f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k\cos(kx)$ gegebene Funktion im Intervall $(0,\pi)$ mindestens eine Nullstelle hat.

//**S6.4.4**(3407) Mittelwertsatz der Integralrechnung//
// Sei f über [a,b] integrierbar und sei μ der Mittelwert von f //
// über [a,b]. //
// ● Dann ist $\underline{M}=\inf\{f(x):a\le x\le b\}\le\mu\le\sup\{f(x):a\le x\le b\}=\overline{M}$. //
// ●● Falls f auf [a,b]stetig ist, existiert ein $\xi\in[a,b]$ mit $\mu=f(\xi)$//
Lös:Vor. 1.MWS, f über [a,b] integrierbar, f auf [a,b] stetig erfüllt

$$\int_0^\pi f(x)dx=\sum_{k=0}^{n} a_k\int_0^\pi \cos(kx)=\sum_{k=0}^{n} a_k\frac{1}{k}\sin(kx)\Big|_0^\pi=0 \underset{S6.4.4}{\Rightarrow} \xi\in[0,\pi],$$

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi f(x)dx=0$$

A6.4.11 Finde eine Potenzreihenentwicklung für log(1+x) und Entwicklungspunkt 0. Bestimme auch den Konvergenzradius.
*//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//13.)Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in N_0$ mit $z\in U_1(0)$ gilt $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1-\underset{\neq 1}{z}}$, geom Reihe//

Lös:$\log(1+x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$, HS & $\log(1)=0$,

$$\frac{1}{1+t}=\sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k \text{ für } |t|\le r<1, \text{ gleichmäßig konvergent.}$$

$\forall$ r<1 auf [0,r) gleichmäßig, auf [0,1] nicht gleichmäßig konvergent.

$$\int(-t)^k dt=\frac{1}{k+1}(-x)^{k+1} \text{ integrierbar} \Rightarrow$$

$$\int\frac{1}{1+t}dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^{k+1}}{k+1}=\log(1+x)\quad\forall\ |x|<1.$$

Konvergenzradius $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=\left|\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}}\right|=1$