2.2(1300) Reelle, insbesondere monotone Folgen

(Aufgaben stehen manchmal nicht unmittelbar hinter Sätzen)

D2.2.1(1300) Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ heißt (streng) monoton wachsend:
$\Leftrightarrow$ $a_n \le a_{n+1}$ ($a_n < a_{n+1}$) $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.
Bez $a_n \nearrow$, $a_n \searrow$
(a_n) aus $\mathbb{R}$ heißt (streng) monoton fallend : $\Leftrightarrow a_{n+1} \le a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) $\forall$ $n \in \mathbb{N}$
Bez: $a_n \uparrow$, $a_n \downarrow$

*//**S1.5.6** (715)Bernoulli $x \in R$, $x \ge -1$, $n \in N$; $(1+x)^n \ge 1+nx$, „=" $\Leftrightarrow$ $x=0^\wedge$ $n=0^\wedge$ $n=1$*

Bsp: ($a_n = (1+x/n)^n$, $x>0$.
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} = \frac{\left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+x}{n}\right)^n} =$$
$$\frac{\left(\frac{n+1+x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+x}{n}\right)^{n+1}} \left(\frac{n+x}{n}\right) = \left(\frac{\frac{n+1+x}{n+1}}{\frac{n+x}{n}}\right)^{n+1} \left(\frac{n+x}{n}\right) =$$
$$\left(\frac{n+x}{n}\right) \left(\frac{(n+1+x)n}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{\underbrace{(n+1)(n+x)}_{<1}}\right)^{n+1} \underbrace{\ge}_{S1.5.6}$$
$$\left(\frac{n+x}{n}\right) \left(1 - \frac{x(n+1)}{(n+1)(n+x)}\right) =$$
$$\left(\frac{n+x}{n}\right) \left(\frac{n+x-x}{n+x}\right) = \left(\frac{n+x}{n}\right) \left(\frac{n}{n+x}\right) = 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}, x>0: \quad \nearrow$$

D2.2.2(1300)
Eine Folge (b_n) heißt Teilfolge der Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$: $\Leftrightarrow$
$\exists$ eine Folge $(\nu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ mit $\nu_n < \nu_{n+1}$ und $b_n = a_{\nu_n}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$
$(b_n) = (a_{\nu_n}) = (a_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$ Teilfolge von $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ wenn $\nu_n < \nu_{n+1}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

Andere Formulierung:
Sei (x_n) eine beliebige Folge aus $\mathbb{K}$.
Sei $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt die Folge ($x_{\phi(n)}$) eine Teilfolge von (x_n)
ϕ (streng monoton wachsend): $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ...also ϕ z.B.nicht $\sqrt{n}$, aber $\phi(n) = 2n$

Andere Formulierung:
Eine komplexe Folge (w_n) heißt Teilfolge einer komplexen Folge (z_n), wenn es eine streng monoton wachsende Folge von Zahlen n gibt, sodass gilt: $w_n = z_{\nu_n}$ $\forall$ n

D2.2.3(1300) Sei $\phi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv.
Dann heißt die Folge ($x_{\phi(n)}$) eine Umordnung von (x_n)

D2.2.4(1300) Sei (y_n) eine Folge aus $\mathbb{K}$ mit $y_n = x_n$ für alle $n \ge n_0$.
Dann heißt (y_n) eine triviale Abänderung von (x_n).

S2.2.1(1301)
Vor:Sei z_n konvergent mit $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$
Beh:Jede (.)Teilfolge (z_{ν_n}) von (z_n), (.) Umordnung und (..)triviale Abänderung ist konvergent mit $z_{\nu_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} z$
Bew:Sei $\varepsilon>0$ und $n_0\in\mathbb{N}$ so, dass $\forall\ n\geq n_0$ gilt $|z_n-z|<\varepsilon$.
(.)Sei $\phi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ entweder streng monoton (#D2.2.2 Teilfolge #)oder bijektiv (#D2.2.3 Umordnung#).
Dann kann $\phi(n)<n_0$ nur für endlich viele n richtig sein. Daher muss es ein $n_1\in\mathbb{N}$ geben, für welches $\phi(n)\geq n_0$ ist $\forall\ n\geq n_1$, und für solche n folgt $|z_{\phi(n)}-z|<\varepsilon$. Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} z_{\phi(n)}=z$.
(..)Sei jetzt (y_n) eine triviale Abänderung von (z_n), also $y_n=z_n\ \forall\ n\geq n_1$, und seien ε und n_0 wie oben. Dann ist offenbar
(.) (..) $|y_n-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq\max\{n_0,n_1\}$, woraus die Beh folgt.

Andere Formulierung; Teilfolge:
Bew: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N},\ |z_n-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$
$(z_{\nu_n})_{n=1}^{\infty}$, $\nu_n<\nu_{n+1}$, $\nu_n\in\mathbb{N}\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow \nu_n\geq n\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$|z_{\nu_n}-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$, da $\nu_n\geq n_0\ \forall\ n\geq n_0$

Andere Formulierung; Teilfolge:
Jede Teilfolge einer konvergenten Folge (z_n) ist wiederum konvergent gegen den Grenzwert von (z_n)
Bew: (z_{ν_n}) Teilfolge von (z_n), $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $|z_n-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon)$
$\exists\ n_1(\varepsilon): \nu_{n_1}\leq n_0(\varepsilon)<\nu_{n_1+1} \Rightarrow |z_{\nu_n}-z|<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_1(\varepsilon)+1$

S2.2.2(1301) (Monotone Konvergenz)
Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt
Beh: $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

*//**D1.3.2** (504) $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ vollständig (bezgl <): $\Leftrightarrow$ //*
$\forall\ T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists\ \sup T\in\mathbb{K}$.//
// Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt//
// Körper //der rellen Zahlen $\mathbb{R}$//
*//**S1.3.1** (501)Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
// 1.) $\bar{s}=\sup T$: $\Leftrightarrow$ α) $\bar{s}$ ist obere Schranke von T und //
// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\bar{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T //
// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T$: $t\leq\bar{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\bar{s}-\varepsilon$//
Bew: $a_n \nearrow$ (falls $a_n \searrow$ so betrachte $-a_n \nearrow$)
$T:=\{a_n|n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}$, $T\neq\emptyset$, $|a_n|\leq k\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ T hat Schranke k $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}$ $\exists\ a:=\sup T \Rightarrow$
$a_n\leq a\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 1.)}$ $\forall\varepsilon>0$ ist $a-\varepsilon$ keine obere Schranke für T $\Rightarrow$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}_0$ sodass $a_{n_0}>a-\varepsilon \Rightarrow \forall\ n\geq n_0$: $a_n\geq a_{n_0}>a-\varepsilon \Rightarrow |a_n-a|=a-a_n<\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$

Bem: $a_n\nearrow$ und (a_n) beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$
$a_n\searrow$ und (a_n) beschränkt $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\inf\{a_n|n\in\mathbb{N}\}$

Andere Formulierung:

Sei (x_n) monotone Folge in $\mathbb{R}$. Genau dann ist (x_n) konvergent, wenn die Folge beschränkt ist. Ist dies der Fall, so ist ihr Grenzwert gleich $\sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, falls die Folge wachsend ist, bzw gleich $\inf\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, falls die Folge fallend ist. Ist die Folge unbeschränkt, so ist sie bestimmt divergent und zwar gegen ∞ bzw $-\infty$, wenn sie wächst bzw fällt.

Bew:ObdA sei die Folge wachsend(sonst betrachte die Folge $(-x_n)$), und sei $\xi=\sup\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$

1.Fall: $\xi=\infty$. Sei $K\in\mathbb{R}_+$, dann gibt es nach Def des Supremums ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $x_{n_0}\geq K$. Wegen der Monotonie folgt dann aber $x_n\geq K\ \forall\ n\geq n_0$, und daher ist die Folge bestimmt divergent gegen ∞.

2. Fall: $\xi\in\mathbb{R}$. Sei $\varepsilon>0$, dann gibt es nach Def des Supremums ein $n_0\in\mathbb{N}$ mit $x_{n_0}>\xi-\varepsilon$. Wieder folgt mit der Monotonie $x_n>\xi-\varepsilon\ \forall\ n\geq n_0$, aber $x_n\leq\xi$ aufgrund der Def von ξ. Daraus folgt die Konvergenz der Folge gegen ξ.

Da die Fallunterscheidung vollständig ist, folgt die Beh.

*//**S1.7.1**(901) $m\leq n\in N$, $a_k\in C$, $m\leq k\leq n$: $\sum_{k=m,n\geq m}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_m-a_{n+1}$ //*

Bsp:1.) $b_k\geq 0\ \forall\ k\in\mathbb{N}$, $a_n:=\sum_{k=1}^{n} b_k\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow a_{n+1}-a_n=b_{n+1}\geq 0 \Rightarrow a_n\leq a_{n+1}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$,

- $b_k=\frac{1}{k}$, $a_{2n}-a_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\frac{1}{2n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2n}n=1/2 \Rightarrow$ (a_n) ist nicht beschränkt ($\Rightarrow$ nicht konvergent)

oder auch $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})\ldots.+\frac{1}{n}+..\geq$

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+\ldots.+\frac{1}{n}+..=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{n}\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}\infty$$

- • $b_k=1/k^2\leq\frac{1}{(k-1)k}=\frac{1}{k-1}-1/k$

$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}>0\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow (a_n)\uparrow$ und beschränkt durch 2

$a_n=\sum_{k=1}^{n}1/k^2=1+\sum_{k=2}^{n}1/k^2\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}=1+\sum_{k=2}^{n}(\frac{1}{k-1}-1/k)\underbrace{=}_{S1.7.1}$

$1+1-1/n\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}2\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ konvergent

#$1+1-1/(n+1)\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}2-1/n\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty}2\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ konvergent

2.) Babylonisches Wurzelziehen

Geg. $a>0$, $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right) \quad \forall\ n>1$

NR1 unten: $a_2=\frac{1}{2}\left(\underbrace{a_1}_{1}+a\right)\geq\sqrt{a}$. Annahme (a_n) konvergiert, dann Grenzwert

vorhanden $\alpha=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{a}{\alpha}\right) \Leftrightarrow$ NR2: $\alpha^2=a$, $\alpha=\sqrt{a}$,

$$(a_{n+1}-\sqrt{a})=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{(\sqrt{a})^2}{a_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{a_n^2+(\sqrt{n})^2-2a_n\sqrt{a}}{2a_n}=\underbrace{\frac{1}{2a_n}}_{>0}\underbrace{\left(a_n-\sqrt{a}\right)^2}_{\geq 0}\geq 0$$

d.h., a_n nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{(a_n)^2}\right)\underbrace{\leq}_{\forall\, n\geq 2,\, a_n\geq\sqrt{a}}\frac{1}{2}(1+1)=1$$ monoton ↘ und nach unten

durch $\sqrt{a}$ beschränkt $\Rightarrow$ konvergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}$

$(a_{n+1}-\sqrt{a})\leq\frac{1}{2\sqrt{a}}(a_n-\sqrt{a})^2$.

NR1: $(1-a)^2\geq 0 \Rightarrow 1-2a+a^2\geq 0 \Rightarrow 1+a^2\geq 2a \Rightarrow 1+2a+a^2\geq 4a \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{4}(1+a)^2\geq a \Rightarrow \frac{1}{2}(1+a)\geq\sqrt{a}$

NR2: $2\alpha=\alpha+\frac{a}{\alpha} \Rightarrow \alpha=\frac{a}{\alpha} \Rightarrow \alpha^2=a \Rightarrow \alpha=\sqrt{a}$

A2.2.1 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_{n+1}:=\sqrt{a_n}+\frac{1}{n}$, $n_1:=2$ Zu zeigen: $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} a$ und a?

Lös: Monotoniekriterium: Monoton & beschränkt

Beschränkt: Behauptung $a_n\geq 1\ \forall\ n$. Bew durch Induktion

IA: $a_1=1$, $a_2=2\geq 1$

IH: n, $a_n\geq 1$ gelte für ein n

IS: Zeige $a_{n+1}\geq 1$. $A_{n+1}=\sqrt{\underbrace{a_n}_{a_n\geq 1}}+\frac{1}{n}\geq 1+\frac{1}{n}$

Monotonie: $a_{n+1}\leq\sqrt{\sqrt{2}+1}\ a_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, Induktion

IA: n=2: $a_3 \dashv\!| \leq a_n$ da $\sqrt{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2}\leq\sqrt{2}+1 \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{2}+1}\leq\sqrt{2}+\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}+1\leq 2+\frac{2\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow$

$0\leq 1+\frac{1}{4}$

IH: $a_{n+1}\leq a_n$ gelte für $n\geq 2$

IS: Zeigen $a_{n+2}\leq a_{n+1}$

$a_{n+2}=\dashv\!|\ \sqrt{a_{n+1}}+\frac{1}{n+1}\underbrace{\leq}_{IH}\sqrt{a_n}+\frac{1}{n+1}\leq\sqrt{a_n}+\frac{1}{n}=a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1}\leq a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$

Monotonieprinzip: $a_n\underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} a$, $a\geq 1$, es gilt $a=\sqrt{a} \Leftrightarrow a^2-a=0 \Leftrightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow$

$a=1$ & $a\neq 0$

A2.2.2 a) Zeige, dass für alle $n\in\mathbb{N}$ die Funktion $f(x)=x^n$ auf dem Intervall $[0,\infty]$ streng monoton wächst.

Lös: Es gilt $y^n-x^n=(y-x)\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^{n-1-k}y^k$, und für $0<x<y$ ist die rechtsstehende Summe positiv. Daher folgt die Beh.

b) Untersuche das Konvergenzverhalten (konvergent, divergent oder bestimmt divergent) und bestimme ggf den Grenzwert

c) $x_n=n^n/n!$

Lös:= $\frac{n*n*n\ldots*n}{(n)(n-1)\ldots*1}$ =1* $\underbrace{\frac{n}{n-1}}_{>1}$ …* $\underbrace{\frac{n}{2}}_{>1;\ n\geq 3}$ *n. Sei N=K∈$\mathbb{R}_+$, dann ∀ n∈$\mathbb{N}$, n≥N

⇒ $x_n=n^n/n!>n\geq N=K$ ⇒ bestimmt divergent $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$

d) $x_n=P(n)/Q(n)$, P,Q reelle Polynome mit γ(P)> γ(Q) und $Q(n)\neq 0$ ∀ n∈$\mathbb{N}$.

Lös: $x_n=\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k n^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k n^k}$ (γ(P)< γ(Q), $x_n\to 0$; γ(P)=γ(Q)=m, $x_n\to a_m/b_m$)

$P=Q_1Q+R$ ⇒ $P(n)/Q(n)=Q_1(n)+\underbrace{\frac{R(n)}{Q(n)}}_{\to 0(n\to\infty)}$, $P:Q=\frac{a_\ell x^n+\ldots}{b_\ell x^\ell+\ldots}$, sign $c_M=\frac{sign\ \cancel{\to} a_m}{sign\ \cancel{\to} b_\ell}$

$Q_1(n)=\sum_{k=0}^{M} c_k n^k=n^M(\underbrace{\sum_{k=0}^{M-1}\frac{c_k}{n^{M-k}}}_{\to 0(n\to\infty)}+c_M)=\begin{cases}+\infty\ falls\ c_M>0\\ -\infty\ falls\ c_M<0\end{cases}$

e) $x_n=\sum_{k=0}^{n} q^k$, |q|<1

Lös: $x_n=\frac{1-q^{k+1}}{1-q}\underbrace{\to}_{n\to\infty}\frac{1}{1-q}$ da |q|<1 ($q^n\underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ d.h. konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$)

A2.2.3 n∈$\mathbb{N}_0$, k∈$\mathbb{N}$, x_0∈$\mathbb{R}$ mit $x_0^k>a>0$.

a) Zeige: $x_{n+1}=\frac{1}{k}((k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}})$, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert.

*//**S1.5.6** (715) x∈R, x≥-1, n∈N; $(1+x)^n\geq 1+nx$, „=" ⇔ x=0^ n=0^ n=1//*

Bew: $x_0^k>a>0$, # $x_0>\sqrt[k]{a}$, $x_0^{k-1}>\sqrt[k]{a^{k-1}}$ #

(.) $x_n^k>a$ ∀ n∈$\mathbb{N}_0$, Bew durch Induktion nach n

n=0: $x_1=\frac{1}{k}((k-1)x_0+\frac{a}{x_0^{k-1}})$ #> $\frac{1}{k}((k-1)\sqrt[k]{a}+\frac{a}{\sqrt[k]{a^{k-1}}})=\frac{1}{k}((k-1)\sqrt[k]{a}+\sqrt[k]{\frac{a^k}{a^{k-1}}})=$

$\frac{1}{k}((k-1)\sqrt[k]{a}+\sqrt[k]{a})=\sqrt[k]{a}$ ⇒ $x_1^k>a$#, richtig

n n+1: Für ein n∈$\mathbb{N}_0$ gelte $x_n^k>a$ ⇒ $x_{n+1}^k=(x_n+\frac{1}{k}(\frac{a}{x_n^{k-1}}-x_n))^k=$

$(x_n(1+\frac{1}{k}(\frac{a}{x_n^k}-1))^k=x_n^k(1+\underbrace{\frac{1}{k}(\frac{a}{x_n^k}-1)}_{>-1\neq 0})^k\underbrace{\geq}_{S1.5.6} x_n^k(1+\frac{a}{x_n^k}-1)=a$

(..) $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ monoton fallend

Bew: $x_{n+1}=\frac{1}{k}((k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}})=x_n\frac{1}{k}(k-1+\underbrace{\frac{a}{x_n^k}}_{\leq 1})\leq x_n\frac{1}{k}(k-1+1)=x_n$.

Aus (.) und (..) folgt $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert. Obere Schranke >0 da x_n↘ #$x_n^k>a>0$

b) Zeige mit Hilfe der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ aus Teil a), dass zu jedem a>0 genau ein b>0 mit $b^k=a$ existiert.

Bew: Es gelte $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} \Rightarrow x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k}\left((k-1)x_n+\frac{a}{x_n^{k-1}}\right) \underbrace{=}_{GWregeln} \frac{1}{k}\left((k-1)x+\frac{a}{x^{k-1}}\right) \Rightarrow$

$kx=(k-1)x+\frac{a}{x^{k-1}} \Rightarrow x=\frac{a}{x^{k-1}} \Rightarrow x^k=a$

Eindeutigkeit:

Es sei $\tilde{x}>0$ mit $\tilde{x}^k=a$: wenn $x<\tilde{x} \Rightarrow x^k<\tilde{x}^k \Rightarrow a<\tilde{x}^k$ Widerspruch

wenn $\tilde{x}>x \Rightarrow \tilde{x}^k<x^k \Rightarrow \tilde{x}^k<a$ Widerspruch $\Rightarrow$

$\tilde{x}=x$

A2.2.4 (Umordnung einer Folge). Es sei $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine Folge und φ: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine bijektive Funktion.

Beweise: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert genau dann, wenn $(a_{\varphi(n)})_{n=1}^{\infty}$ konvergiert.

Bew: (.) $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\ \forall\ n\geq n_0(\varepsilon): |a_n-a|<\varepsilon$. Z.z.: $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a$.

Sei $\varepsilon_0>0$ baf. Definiere $n_1(\varepsilon)=\max\{\varphi^{-1}(k)\,|\,1\leq k\leq n_0(\varepsilon)\}+1$.

Dann gilt $\forall\ n>n_1: \varphi(n)\geq n_0$, (denn sonst wäre $\varphi(n)=k$ für ein k zwischen 1 und $n_0(\varepsilon)$) $\Rightarrow |a_{\varphi(n)}-a|<\varepsilon$

#Beispiel:

1 2 3 4 5 ….. $n_0(\varepsilon)$ ... $n_1(\varepsilon)$ $n>n_1$….

Nicht möglich, da alle Plätze

1 2 3 4 5 ….. $n_0(\varepsilon)$ 1... $n_0(\varepsilon)$ besetzt

(..) Es gelte $a_{\varphi(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a$. Setze $b_n=a_{\varphi(n)} \Rightarrow a_n=b_{\phi^{-1}(n)} \xrightarrow{n\to\infty} a$ nach (.)

A2.2.5 Zeige: Ist (z_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{K}$, so sind (z_{2n}) und (z_{2n+1}) Teilfolgen

A2.2.6 Zeige: Ist (x_n) eine beliebige Folge in $\mathbb{K}$, so ist (y_n) mit $y_n=\begin{cases} x_{n-1} \text{ für } n \text{ gerade} \\ x_{n+1} \text{ für } n \text{ ungerade}\end{cases}$ eine Umordnung von (x_n).

A2.2.7 Sei ϕ: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ beliebig. Finde eine genaue Bedingung, unter welcher der Schluß $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{\phi(n)}=x$ für alle Folgen in $\mathbb{K}$ richtig ist

(Hinweis: Analysiere den Beweis S2.2.1, um diese Bedingung zu finden).

*//**S2.2.1** (1301) Vor: z_n konvergent mit $z_n\to z(n\to\infty)$//*

//Beh: Jede Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n), Umordnung und triviale Abänderung//

// ist konvergent mit $z_{v_n}\to z(n\to\infty)$//

A2.2.8

a) $x_n=(-1)^n \frac{n-8n+1}{n+16}$

//**S2.2.2**(1301) Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt. Beh:$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//

Lös:$x_{2k}= 1^{(2k)^2} \frac{(2k)^2-16k+1}{(2k)^2+16} \underbrace{\to}_{k\to\infty} 1$. $x_{2k+1} \underbrace{\to}_{k\to\infty} =-1$.

$\exists$ 2 konvergente Teilfolgen mit unterschiedlichen Grenzwerten. Nach **S2.2.2** x_n nicht konvergent.

$\left.\begin{array}{r} x_{2n} konv \Rightarrow beschränkt \\ x_{2n-1} konv \Rightarrow beschränkt \end{array}\right\}$ x_n beschränkt, nicht bestimmt divergent

A2.2.9 Von der Folge (x_n) in $\mathbb{K}$ sei bekannt, dass die Teilfolgen (x_{2n}), (x_{2n-1}) und (x_{3n}) konvergieren. Konvergiert dann (x_n) selbst (Beweis oder Gegenbeispiel)?

Lös:$x_n\to?$, $(x_{2n})\to\alpha$, $(x_{2n-1})\to\beta$, $(x_{3n})\to\gamma$,

x_{6n} ist Teilfolge von x_{2n}, also $x_{6n}\to\alpha$,

x_{6n} ist Teilfolge von x_{3n}, also $x_{6n}\to\gamma$,

Eindeutigkeit der Grenzwerte $\Rightarrow$ $\alpha=\gamma$

x_{6n-3} ist Teilfolge von x_{2n-1}, also $x_{6n-3}\to\beta$,

x_{6n-3} ist Teilfolge von x_{3n}, also $x_{6n-3}\to\gamma$,

Eindeutigkeit der Grenzwerte $\Rightarrow$ $\beta=\gamma$, $\alpha=\beta=\gamma$

Mit 2n und 2n-1 ganz $\mathbb{N}$. $x_n\to\alpha=\beta=\gamma$, d.h. x_n konvergent.

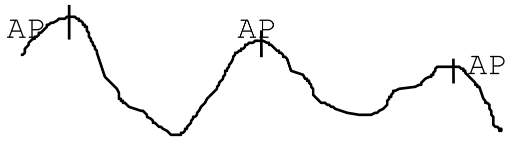
A2.2.10 Die Folgen (a_n) und (b_n) seien gegeben durch

$0<a_1<b_1$, $a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$, $b_{n+1}=1/2(a_n+b_n)$. Zeige, dass die Folgen (a_n) und (b_n) gegen denselben Grenzwert streben und bestimme diesen.

Hinweise: Man zeige, dass (a_n) eine wachsende, (b_n) eine fallende Folge und a_nb_n konstant ist.

S2.2.3(1307) Jede Folge $(a_n)\subset\mathbb{R}$ besitzt eine monotone Teilfolge

Bew: (a_m) aus $\mathbb{R}$, a_m heißt Aussichtspunkt (AP) von $(a_n)_{n=0}^{\infty}$,
wenn $a_m>a_n\ \forall\ n>m$ AP



1.Fall $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ enthält unendlich viele AP.
Wähle einen AP a_{ν_1} $\Rightarrow$
$\exists$ AP a_{ν_2} mit $\nu_2>\nu_1$ (und $a_{\nu_1}>a_{\nu_2}$) $\Rightarrow$ $\exists$ AP a_{ν_3} mit $\nu_3>\nu_2$ und $a_{\nu_2}>a_{\nu_3}$.
Da die Folge (a_n) unendlich viele AP enthält, $\exists$ eine Teilfolge $\left(a_{\nu_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ von AP in $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ mit $\nu_{n+1}>\nu_n$ und $a_{\nu_n}>a_{\nu_{n+1}}$ $\forall\ n\in\mathbb{N}$

2.Fall $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ enthält nur endlich viele AP (oder keine) $\Rightarrow$
$\exists\ m\in\mathbb{N}$: a_n ist kein AP $\forall\ n\geq m$. Wähle a_{k_1} mit $k_1\geq m$.
Da a_{k_1} kein AP $\Rightarrow$ $\exists\ k_2>k_1$: $a_{k_2}\geq a_{k_1}$.
Da a_{k_2} kein AP $\Rightarrow$ $\exists\ k_3>k_2$: $a_{k_3}\geq a_{k_2}$
Sei schon $k_n>k_{n-1}$ mit $a_{k_{n-1}}\leq a_{k_n}$ gewählt $a_{k_1}\leq a_{k_2}\leq\ldots\leq a_{k_n}$ mit $k_1<k_2<\ldots<k_n$
Da a_{k_n} kein AP $\Rightarrow$ $\exists\ k_{n+1}>k_n$ mit $a_{k_n}\leq a_{k_{n+1}}$ ($\forall\ n\in\mathbb{N}$)
Im 1.ersten Fall $\exists$ eine streng monoton fallende Teilfolge (a_{ν_n}) von (a_n) und im 2. Fall eine monoton wachsende Teilfolge (a_{k_n}) von (a_n).

Andere Formulierung:
*Def induktiv $\nu_1=1$,
$\nu_2=\min\{n\geq\nu_1: a_n>a_k\ \forall\ k>n\}\subset\mathbb{N}$ falls $\{n\geq\nu_1: a_n>a_k\ \forall\ k>n\}\neq\emptyset$.
$\nu_{\ +1}=\min\{n\geq\nu\ : a_n>a_k\ \forall\ k>n\}$ falls $\{n\geq\nu\ : a_n>a_k\ \forall\ k>n\}\neq\emptyset$, so lange, bis $\{\ldots\}=\emptyset$.
Mit $M=\{\nu_n\}$ gibt es
1.Fall: $|M|=\infty$ $(a_{\nu_n})_{n=2}^{\infty}\downarrow$ und somit monotone Teilfolge.
2.Fall: $|M|=r$ $\underbrace{\Rightarrow}_{Def}$ $\forall\ m>\nu_r\ \exists\ k=f(m)\in\mathbb{N}: a_k\geq a_m$ (*)
Definiere induktiv $\mu_1=\nu_r+1$. $\mu_{\ +1}=\min\{n>\nu\ : a_n>a_{\nu_\ell}\}\neq\emptyset,\subset\mathbb{N}$
$*\Rightarrow$ $(a_{\mu_\ell})\nearrow$ $\Rightarrow$ (*) monotone Teilfolge

S2.2.4(1308) Bolzano Weierstraß (BW)(siehe auch S2.4.1)
Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge

*//**S2.2.2** (1301)Vor: $(a_n) \subset R$ monoton ∧ beschränkt. Beh: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//*

*//**S2.2.3** (1306)Jede Folge $(a_n) \subset R$ besitzt eine monotone Teilfolge//*

Bew:1.Fall:Folge ist reell (a_n). Nach S2.2.3 besitzt (a_n) eine monotone und nach Voraussetzung auch beschränkte Teilfolge, diese ist nach S2.2.2 konvergent.

2.Fall:Komplexe Folge(z_n),
$Re(z_n)=:(a_n)$ $Im(z_n)=:(b_n)$ ⇒
$\exists\ \alpha\in R,\ (a_{n_{k_\ell}}): a_{n_{k_\ell}} \to \alpha,\ \exists\ \beta\in R,\ (b_{n_{k_\ell}}): b_{n_{k_\ell}} \to \beta,$
$z_{n_{k_\ell}} \to \alpha+i\beta$ konvergiert

S2.2.5(1308)Konvergenzkriterium von Cauchy
(ist notwendig und hinreichend).
Eine komplexe Folge $(z_n)\subset C$ ist <u>genau dann</u> konvergent, wenn sie das Cauchy Kriterium erfüllt:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\ge n_1(\varepsilon)$ ⇔
$Re(z_n)$ und $Im(z_n)$ sind Cauchyfolgen.
Bem:(Vollständigkeit von R) Jede relle Cauchy Folge konvergiert in R und eine rationale Cauchy Folge hat einen rellen aber im allgemeinen keinen rationalen Limes.

*//**S2.1.2** (1250) Vor: (z_n) aus C, konvergent mit $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z$, $z_0\in C$.//*
//2.) $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ Cauchy Folge, d.h. $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\ge n_0$//
// Bem: $z_n\to z\,(n\to\infty)$ ⇒ $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in N: |z_n-z_m|\le\varepsilon\ \ \forall\ n,m\ge n_1(\varepsilon)$//
*//**S2.2.1** (1301) Vor: z_n konvergent mit $z_n\to z\,(n\to\infty)$//*
//Beh:Jede Teilfolge (z_{v_n}) von (z_n), Umordnung und triviale Abänderung//
// ist konvergent mit $z_{v_n}\to z\,(n\to\infty)$//
*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton ∧ beschränkt Beh: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//*
*//**S2.2.3**(1306) Jede Folge $(a_n)\subset R$ besitzt eine monotone Teilfolge//*
Bew:"⇒" S2.1.2 2.) ⇒ (muß noch geprüft werden)
$|z_n-z| \le \underbrace{|z_n-z_{n_k}|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|z_{n_k}-z|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$ falls $n\ge n_0(\varepsilon)$ mit
$k_1:=\min\{k\ge k_0(\varepsilon): n_k\ge n_1(\varepsilon)\}$, $n_0(\varepsilon):=n_{k_1}$
„⇐"(z_n) ist beschränkt, denn zu $\varepsilon=1\ \exists\ n_1(1): |z_n-z_m|\le 1\ \ \forall\ n,m\ge n_1(1)$ ⇒
$|z_n|-|z_{n_1}|\le|z_n-z_{n_1}|\le 1\ \ \forall\ n\ge n_1(1)$ ⇒
$|z_n|\le|z_n-z_{n_1}|+|z_{n_1}|<1+|z_{n_1}|\ \ \forall\ n\ge n_1(1)$
$|z_n|\le\max\{|z_1|,|z_2|,...|z_{n_1-1}|,1+|z_{n_1}|\}=:K\ \ \forall\ n\in N \underset{S2.2.3,\ S2.2.2}{\Rightarrow}$
$\exists\ z\in C,\ \exists$ Teilfolge $(z_{n_k}): z_{n_k} \underset{n\to\infty}{\to} z$ ⇒
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ k_0(\varepsilon): |z_{n_k}-z|<\varepsilon\ \ \forall\ k\ge k_0(\varepsilon)$.
$\forall\ \varepsilon/2\ \exists\ n_1(\varepsilon/2)\in N$ mit $|z_{v_n}-z|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n\ge n_1(\varepsilon/2)\wedge$
$\forall\ \varepsilon/2\ \exists\ n_0(\varepsilon/2)\in N$ mit $|z_n-z_m|<\varepsilon/2\ \ \forall\ n\ge n_0(\varepsilon/2)$,
$n_2:=\max\{n_0(\varepsilon/2),\ n_1(\varepsilon/2)\}$ ⇒ $\forall\ n\ge n_2$ gilt
$|z_n-z|\le|z_n-\underbrace{z_{v_n}}_{m}|+|z_{v_n}-z|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ da $v_n\ge n_1\ge n_2$
Bem:Gilt für eine konvergente Folge (w_n) und eine Konstante K>0 für eine Folge (z_n): $|z_n-z_m|\le K|w_n-w_m|$ so ist die Folge konvergent.

Bez: Eine Folge, die die Cauchybedingung erfüllt, heißt eine Cauchyfolge

Beachte, dass das Cauchykriterium eine Bedingung für die Konvergenz einer Folge liefert, in die der Grenzwert nicht explizit eingeht. Dieser Umstand ist sehr wichtig, denn er erlaubt die Konvergenz von Folgen zu zeigen, deren Grenzwert nicht bekannt ist.

*//**S2.2.2** (1302)Bsp 2.) Geg. $a>0$, $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a}{a_n})$ $\forall$ $n>1$ $\Rightarrow$*

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}$ //

//**S2.2.5**(1307) Eine komplexe Folge $(z_n)\subset \mathbb{C}$ ist <u>genau dann</u> konvergent,//
//wenn sie das Cauchy Kriterium erfüllt://
//$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $|z_n-z_m|<\varepsilon$ $\forall$ $n,m\geq n_1(\varepsilon)$ $\Leftrightarrow$ //
// Re(z_n) und Im(z_n) sind Cauchyfolgen.//

Bsp:1.) $a_1:=1$, $a_{n+1}=1/2(a_n+\frac{2}{a_n})\in\mathbb{Q}$, $a_n\to\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. (siehe S2.2.5)

2.) $a_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $b_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum\limits_{k=1}^{n}(1/k-\frac{1}{k+1})$

$\underbrace{=}_{\text{Teleskops.}} 1-\frac{1}{n+1} \nearrow 1\,(n\to\infty) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{monoton, beschr}}$ (b_n) ist Cauchy Folge

$\Rightarrow$ Für $n>m$: $|a_n-a_m|=|\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{(-1)^k}{k(k+1)}|\leq\sum\limits_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=b_n-b_m$

Zu $\varepsilon>0$ $\exists$ $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$: $b_n-b_m<\varepsilon$ $\forall$ $n>m\geq n_0(\varepsilon)$,

$|a_n-a_m|<\varepsilon$ $\forall$ $n>m>n_0(\varepsilon)\Rightarrow$ (a_n) Cauchy Folge $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.5}$ $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a\in\mathbb{R}$

A2.3.11

Sei $x_n=\sum\limits_{j=1}^{n}1/j$, $n\in\mathbb{N}$. Benutze die Monotonie von $(1/j)$, um zu zeigen,daß $x_{2n}-x_n>n/(2n)\geq1/2$ ist. Zeige daß (x_n) keine Cauchyfolge ist. Schließe daraus $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

Lös:x_n streng monoton wachsend **S2.1.2** Bsp 3.

$x_{\underbrace{2n}_{m}}-x_n=\sum\limits_{j=n+1}^{2n}1/j\geq n\frac{1}{2n}=1/2$. Keine Cauchyfolge $\Rightarrow$ nicht konvergent

$\Rightarrow$ bestimmt divergent

D2.2.5(1309) Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{R}$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw $-\infty$): $\Leftrightarrow$ $\forall$ $K\in\mathbb{R}$ $\exists$ $n_K\in\mathbb{N}$ mit $a_n \underset{(\leq)}{\geq} K$ $\forall$ $n\geq n_K$, und man schreibt:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty(-\infty)$ bzw $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty(-\infty)$

Andere Formulierung:

Eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ aus $\mathbb{R}$ heißt bestimmt divergent gegen ∞, wenn gilt:
$\forall$ $K\in\mathbb{R}_+$ $\exists$ $N\in\mathbb{R}_+$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$: $n\geq N$ $\Rightarrow$ $x_n\geq K$

Bez: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ oder $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$. $\lim\limits_{n\to\infty} -x_n=\infty$ $\Rightarrow$ Folge (x_n) ist bestimmte divergent gegen $-\infty$.

Bem:1.) Eine Folge (a_n) aus $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt $\Leftrightarrow$
$\exists$ Teilfolge $\left(a_{\nu_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ von (a_n) mit $|a_{\nu_n}| \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} \infty \nearrow$

*//**S1.5.5** (706) Wohlordnungss, Vor: $M\subset N$ und $M\neq\emptyset$, Beh: $\exists$ minM//*

Bew: "$\Rightarrow$" $T_n:=\{k\in\mathbb{N} \,|\, |a_k|>n\}$ $\Rightarrow$ $T_n\subset \mathbb{N}$, $T_n\neq\emptyset$, da (a_n) unbeschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.5}$

$\exists$ $\nu_n:=\min T_n \Rightarrow |a_{\nu_n}|>n \wedge T_{n+1}\subset T_n \Rightarrow$

$\nu_{n+1}>\nu_n$, $n\in\mathbb{N}$, $|a_{\nu_n}| \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} \infty$

2.) Eine monotone Folge ist entweder konvergent oder uneigentlich konvergent

3.) Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ und $a_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$. Dann gilt: $a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} \infty$

A2.2.11 Zeige
a) Die Folge $(x_n=n)$ ist bestimmt divergent gegen ∞
b) Folge $S_n:=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$

Lös: Sei $m=2n+1>n+1$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$S_m-S_n=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}=a_{n+1}>\frac{1}{2}\geq\varepsilon$... Cauchykriterium nicht erfüllt.

$S_n\uparrow$ also nicht beschränkt $\Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}=+\infty$

A2.2.12 Finde ein Beispiel einer Folge, welche divergent aber nicht bestimmt divergent ist.

A2.2.13 Es sei $0\le q<1$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit der Eigenschaft:

$|a_{n+1}-a_n|\le q|a_n-a_{n-1}| \ \ \forall\ n\ge n_0\in\mathbb{N}$.

a) Zeige, dass $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy Folge ist.

*// **S2.2.5** (1307) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|<\varepsilon \ \ \forall\ n,m\ge n_1(\varepsilon)$ $\Leftrightarrow$//*
// Re(z_n) und Im(z_n) sind Cauchyfolgen.//

Lös: Motiviert durch $|a_{n+1}-a_n|\le q|a_n-a_{n-1}|\le q^2|a_{n-1}-a_{n-2}|\ldots\le q^n|a_1-a_0|$

vermutet man: (*) $|a_{n+1}-a_n|\le q^n|a_1-a_0| \ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

Z.z. $\forall\varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |a_n-a_m|<\varepsilon \ \ \forall\ n,m\le n_0$,

$|a_{n+1}-a_n|\le q \underbrace{|a_n-a_{n-1}|}_{\le q|a_{n-1}-a_{n-2}|} \ldots\le q^n|a_1-a_0| \ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, Induktion:

n=0: $|a_1-a_0|\le|a_1-a_0|=q^0|a_1-a_0|$

#n=1: $|a_2-a_1|\le q|a_1-a_0|=q^1|a_1-a_0|$

n n+1, $n\ge 0$: $|a_{n+2}-a_{n+1}|\le q \underbrace{|a_{n+1}-a_n|}_{\le q^n|a_1-a_0|} \le qq^n|a_1-a_0|=q^{n+1}|a_1-a_0|$

Für $n\ge m$: $|a_n-a_m|=|\underbrace{\sum_{\nu=m}^{n-1}\left(a_{\nu+1}-a_\nu\right)}_{Teleskop:\ a_m-a_n})|\le\sum_{\nu=m}^{n-1}|a_{\nu+1}-a_\nu| \underset{*}{\le} \sum_{\nu=m}^{n-1} q^\nu|a_1-a_0|=$

$q^m|a_1-a_0|$ ¿ $\underbrace{\sum_{\nu=0}^{n-m-1} q^\nu}_{\frac{1-q^{n-m}}{1-q}\le\frac{1}{1-q}} \le \frac{q^m}{1-q}|a_1-a_0|$

1.Fall: $a_1=a_0$: $|a_{n+1}-a_n|=0, a_n=a_0 \ \ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow (a_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy Folge

(Zu $\varepsilon>0$ wähle $n_0\in\mathbb{N}$ bel, dann $|a_n-a_m|=0<\varepsilon \ \ \forall\ n\ge n_0$

2.Fall: $a_1\ne a_0$ Sei $\varepsilon>0$ beliebig, fest, $q^m \underbrace{\to}_{m\to\infty} 0$ (Wg $|q|<1$)

$\Rightarrow\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}: |q^m|<\frac{1-q}{|a_1-a_0|}\varepsilon = \tilde{e} \ \ \forall\ m\ge n_0$ (beachte $|a_1-a_0|\ne 0$)

$\Rightarrow |a_n-a_m| \le |a_1-a_0| \underbrace{q^m}_{|q^m|} \frac{1}{1-q} <\varepsilon \ \ \forall\ n,m\ge n_0$ mit $n\ge m \Rightarrow$

$\underbrace{|a_n-a_m|}_{|a_m-a_n|} \le q^m \frac{a_1-a_0}{|1-q|}\varepsilon <\varepsilon \ \ \forall\ n\ge m\ge n_0 \Rightarrow (a_n)$ ist Cauchy Folge $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.5}$

(a_n) konvergiert

Sei $a:=\lim_{n\to\infty} a_n \Rightarrow$ Fehlerabschätzung: $|a-a_m|\le\frac{q^m}{1-q}|a_1-a_0| \ \ \forall\ m\in\mathbb{N}_0$,

denn $|a-a_m|=|\lim_{n\to\infty} a_n-a_m|=\lim_{n\to\infty}|a_n-a_m|\le\frac{q^m}{1-q}|a_1-a_0|$

b) Genügt es, zu fordern, dass $|a_{n+1}-a_n|<|a_n-a_{n-1}|\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Lös: Es genügt <u>nicht</u> $|a_{n+1}-a_n|<|a_n-a_{n-1}| \ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$ zu fordern, denn z.B.

$a_n:=\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu \Rightarrow a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1} \ \ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, also

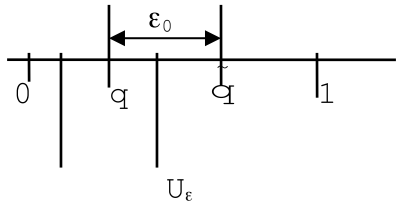
$|a_{n+1}-a_n|=\frac{1}{n+1}<1/n=|a_n-a_{n-1}| \ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, aber $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ divergiert, d.h.

(a_n) ist keine Cauchy Folge, (Harmonische Reihe und $\sum_{\nu=1}^{n} 1/\nu=\infty$)

A2.2.14 Es sei q>0 und $x_n>0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q$

a) Zeige, daß für q<1 die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert

1.Bew:Z.z $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$



Sei $\varepsilon_0>0$ fest mit $\tilde{q}:=q+\varepsilon_0<1$

(z.B. $\varepsilon_0=\frac{1-q}{2}$ d.h. $q+\frac{1-q}{2}=\frac{\overbrace{1+q}^{<2}}{2}<1$)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q \Rightarrow \exists\ n_0\in\mathbb{N}: \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-q\right|<\varepsilon_0\quad \forall\ n\geq n_0$

d.h. $-\varepsilon_0<\frac{x_{n+1}}{x_n}-q<\varepsilon_0 \Rightarrow \frac{x_{n+1}}{x_n}<q+\varepsilon_0=\tilde{q}\quad\forall\ n\geq n_0\Rightarrow$

$x_{n+1}<\tilde{q}\,x_n\ \forall\ n\geq n_0 \underset{0<\tilde{q}<1}{\Rightarrow} 0\leq x_n<\underbrace{\tilde{q}^{\,n-n_0}x_{n_0}}_{=\underbrace{\tilde{q}^n}_{\to 0}x^{-n_0}x_{n_0}\underset{n\to\infty}{\to}0} \underset{\text{S2.1.3 3.)}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0\ldots\ 0<\tilde{q}<1$

Bew Induktion ab n_0, $\underbrace{\tilde{q}^n}_{\to 0(n\to\infty)} q^{-n_0}x_{n_0}\ \forall\ n\geq n_0$

*//**S2.1.3** (1255) $(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus R: $a_n\to a, b_n\to b, (n\to\infty)$ und $\alpha\in R$//*
// 3.) $a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b \Rightarrow c_n\to a\ (n\to\infty)$ $a_n\to a$, $b_n\to b=a$//

2.Bew: $x_{n+1}<\tilde{q}\,x_n \underset{\tilde{q}<1}{<} x_n\ \ \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ ist streng monoton fallend und

$\underset{(x_n)_{n=n_0}^{\infty}\text{nach unten beschr}, x_n>0}{\Rightarrow} (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ konvergent. $\underbrace{(1-q)}_{\neq 0}$

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow a=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}$ Teilfolge konvergiert gegen

Grenzwert $\Rightarrow a=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=qa \Rightarrow \underbrace{(1-q)}_{\neq 0}a=0 \underset{q\neq 1}{\Rightarrow} a=0$

b) Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, falls $q>1$

*//**D2.2.5** (1309) $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw $-\infty$) :⇔ //*
// $\forall\ K\in R\ \exists\ n_K\in N$ mit $a_n \underset{(\le)}{\ge} K\ \forall\ n\ge n_K$, und man schreibt://
// $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty(-\infty)$ bzw $a_n\to\infty(-\infty)$ $(n\to\infty)$//

//Bem: 3.) Sei $(a_n)\subset R$ und $a_n\neq 0\ \forall\ n\ge n_0$. Dann gilt: $a_n\to 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|a_n|}\to\infty (n\to\infty)$//

1.Bew: Sei $\tilde{x}_n=1/x_n$, $n\in$ N, $\tilde{q}:=1/\underbrace{q}_{>1}<1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\frac{\tilde{x}_{n+1}}{\tilde{x}_n}}_{\frac{x_n}{x_{n+1}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}} = 1/q=\tilde{q}<1 \underbrace{\Rightarrow}_{a)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{x}_n=0 \underbrace{\Rightarrow}_{D2.2.5\ Bem3} \underbrace{\frac{1}{|\tilde{x}_n|}}_{=x_n} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset R$ monoton ∧ beschränkt Beh: $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//*
*//**D2.2.5** (1309) $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset R$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ (bzw $-\infty$) :⇔ //*
// $\forall\ K\in R\ \exists\ n_K\in N$ mit $a_n \underset{(\le)}{\ge} K\ \forall\ n\ge n_K$, und man schreibt://
// $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty(-\infty)$ bzw $a_n\to\infty(-\infty)$ $(n\to\infty)$//
//Bem:2.) Eine monotone Folge ist entweder konvergent oder uneigentlich//
// konvergent//

2.Bew: Wähle $\varepsilon_0>0$ mit $\tilde{q}:=q-\varepsilon_0>1$ (z.B. $\varepsilon_0=\frac{q-1}{2}$).

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=q \Rightarrow \exists\ n_0\in$ N: $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}-q\right|<\varepsilon_0\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow -\varepsilon_0<\frac{x_{n+1}}{x_n}-q<\varepsilon_0 \Rightarrow$

$\frac{x_{n+1}}{x_n}>q-\varepsilon_0\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow x_{n+1}>\underbrace{(q-e_0)}_{>1}x_n>x_n\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ ↗

Ann (x_n) ist nach oben beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ (x_n) konvergiert.

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty} x_n \underbrace{\Rightarrow}_{\text{vgl } a)} a=qa \underbrace{\Rightarrow}_{q\neq 1} a=0$ Widerspruch, da $x_n\ge x_{n_0}>0\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow$

(x_n) ist unbeschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{(x_n)\text{ monot } wachsend}$ $x_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \infty$ nach Bem 2 **D2.2.5**

c) Belege jeweils durch ein Bsp, dass für $q=1$ die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren bzw. divergieren kann

(.) Sei $x_n:=1$, $n\in$ N $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty} 1/1=1=q$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{x_n}_{=1}=1$ d.h.

d.h. x_n konvergiert

(..) Sei $x_n:=n$, $n\in$ N $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)=1+0=1$ und x_n divergiert,

da x_n nicht beschränkt.

A2.2.15 $c>0$, $p\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, $a_0>0$, $a_0^p>c$, $a_{n+1}:=a_n-\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}}=\frac{(p-1)a_n^p+c}{pa_n^{p-1}}>0$.

Zeige, dass $a_n\searrow\sqrt[p]{c}$ $(n\to\infty)$.
Hinweis: Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung erkennt man, dass $a_n^p\geq c$ ist.

Bem:Wegen $a_0>0$ und $a_{n+1}=\frac{(p-1)a_n^p+c}{pa_n^{p-1}}$ sieht man induktiv: $a_n>0\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, insbesondere $a_n\neq 0$.

Bew:Wir zeigen
(.) $a_n\geq\sqrt[p]{c}\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$, d.h. (a_n) ist nach unten durch $\sqrt[p]{c}$ beschränkt.
(..) $a_n\searrow$ d.h. $a_{n+1}\leq a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$
(...) (a_n) konv $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt[p]{c}$

Zu(.) Induktion nach n

$n=0$: $a_0^p>\underbrace{c}_{(\sqrt[p]{c})^p}\Rightarrow a_0>\sqrt[p]{c}$

$n\mapsto n+1$: $a_{n+1}^p=\left(a_n-\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}}\right)^p=a_n^p\left(1+\underbrace{\frac{c-a_n^p}{pa_n^p}}_{=x}\right)^p\underbrace{\geq}_{\text{Bernoulli Ungl siehe auch}**}$

$a_n^p(1+px)=a_n^p\left(1+p\frac{c-a_n^p}{a_n^p p}\right)=a_n^p+c-a_n^p=c\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Bem unten}}a_{n+1}\geq\sqrt[p]{c}$

* $x=\frac{c-a_n^p}{a_n^p p}=\frac{c}{\underbrace{a_n^p p}_{>0}}-1/p>-1/p\underset{p\geq 2}{\geq}-1/2>-1$..Vor für Bernoulli ok

Zu (..) $a_{n+1}=a_n-\underbrace{\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}}}_{\geq 0\text{ nach(.)}a_n^p\geq c,\,p\geq 2,\,a_n>0}\leq a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$

Zu(...) $a_n\searrow$ und nach unten beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.1}$ a_n konvergiert

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\underbrace{\Rightarrow}_{a_n\geq\sqrt[p]{c}}a\geq\sqrt[p]{c}>0$, insbesondere $a\neq 0\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$

$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{a_n^p-c}{pa_n^{p-1}}\right)\underbrace{=}_{S2.1.2,\,a\neq 0}\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\frac{(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^p-c}{p\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^{p-1}}=$

$a-\frac{a^p-c}{pa^{p-1}}\Rightarrow\frac{a^p-c}{pa^{p-1}}=0\Rightarrow a^p=c\Rightarrow a=\sqrt[p]{c}$

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton $\wedge$ beschränkt Beh: $\exists\lim\limits_{n\to\infty}a_n$//*

Bem:Wendet man eine andere Version der Bernoulli-Ungl ($(1+x)^n>1+nx\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $n>2, x>-1$) an, so ergibt sich sogar:
$a_n>\sqrt[p]{c}\ \forall$ n. und $a_n\downarrow$

S2.2.6(1315) **(**Division durch Multiplikation und Addition)
Vor:Sei $c>0$, $0<a_0<1/c$ und die Folge (a_n) sei induktiv (rekursiv) definiert durch $a_{n+1}:=a_n(2-ca_n)$ $\forall$ $n\in\mathbf{N}_0$
Beh:$a_n \nearrow$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1/c$

*//**S2.2.2** (1301) Vor:$(a_n)\subset R$ monoton $\vee$ beschränkt Beh:$\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty}$ a_n//*

Bew:$a_{n+1}-1/c=-1/c+a_n(2-ca_n)=-1/c+2a_n-ca_n^2=-c\left(\frac{1}{c^2}-\frac{2a_n}{c}+a_n^2\right)=-c(1/c-a_n)^2$.

$a_1=\frac{1}{c}-c\underbrace{\left(\frac{1}{c}-a_0\right)^2}_{>0} \Rightarrow a_1<\frac{1}{c}$, $a_1=\underbrace{a_0}_{<\frac{1}{c}}\underbrace{(2-c\overbrace{\underbrace{a_0}_{<1}}^{<\frac{1}{c}})}_{>1}>a_0$

Induktion: $0<a_n<1/c \Rightarrow 0<a_n<a_{n+1}<1/c$
Ind Hyp n : $0<a_n<1/c \Rightarrow 1-ca_n>0 \Rightarrow 2-ca_n>1$
n n+1 : (.) $a_{n+1}=a_n(2-ca_n)>a_n$ $\nearrow$
(..) $a_{n+1}=1/c-\underbrace{c(1/c-a_n)^2}_{>0}<1/c$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(.),(..)\ S2.2.2}$

$\exists$ $a:=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $a\underbrace{=}_{S2.2.2}\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=a(2-ca)\wedge 0<a_0<a_n<1/c$
$\Rightarrow a_0\le a\le 1/c \Rightarrow a\neq 0 \Rightarrow 1=2-ca \Rightarrow a=1/c$
$|a_{n+1}-1/c|=c|a_n-1/c|^2$ „quadratische Konvergenz“

S2.2.7(1315)Wurzelziehen durch Division und Multiplikation und Addition
Vor:Sei $c\ge 1$(falls $0<c<1$, so betrachte $1/c$), $a_0>\sqrt{c}$ und die Folge (a_n) sei induktiv definiert durch * $a_{n+1}:=1/2\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$ $\forall$ $n\in\mathbf{N}_0$

Beh:$a_n \searrow$ und $\lim\limits_{n\to\infty}$ $a_n=\sqrt{c}$

Bem:$a,b>0$, A1.2.9 d):$0<\sqrt{ab}\le 1/2(a+b) \Rightarrow a_{n+1}=1/2\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)\ge\sqrt{a_n\frac{c}{a_n}}=\sqrt{c}$

*//**S2.2.2** (1301)Vor:$(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh:$\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty}$ a_n//*
*//**S2.2.3** (1306)Jede Folge $(a_n)\subset R$ besitzt eine monotone Teilfolge//*

Bew:$a_{n+1}-\underbrace{\sqrt{c}}_{\text{vermuteter Grenzwert}}=1/2\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)-\sqrt{c}=\frac{1}{2}a_n-\sqrt{c}+\frac{c}{2a_n}=$
$\frac{1}{2a_n}(a_n^2-2\sqrt{c}\,a_n+c)=\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{c})^2 \wedge a_0>\sqrt{c}$

\# IH: $a_n>\sqrt{c}>0 \Rightarrow$

\# IS: $\sqrt{c}<\sqrt{c}+\underbrace{\frac{1}{2a_n}(a_n-\sqrt{c})^2}_{>0}=a_{n+1}\underbrace{<}_{IH:c<a_n^2}1/2\left(a_n+\frac{\overbrace{a_n^2}^{IH:c<a_n^2}}{a_n}\right)=1/2(2a_n)=a_n$

\# $a_0>a_n>\sqrt{c}$ Beschränkung $\wedge$ $a_{n+1}<a_n\downarrow$
$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ $\exists$ $a:=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a\ge\sqrt{c}>0 \Rightarrow a>0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.3}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=a$ $\nu_n=n+1 \Rightarrow$
$a=1/2(a+c/a) \Rightarrow 2a=a+c/a \Rightarrow a=c/a \Rightarrow a^2=c \Rightarrow a=\sqrt{c}$

Aus $a_{n+1}:=1/2\left(a_n+\frac{c}{a_n}\right)$ $\forall$ $n\in\mathbf{N}_0$:

$|a_{n+1}-\sqrt{c}|=\frac{1}{2a_n}|a_n-\sqrt{c}|^2\le\frac{1}{2\sqrt{c}}|a_n-\sqrt{c}|^2\le\frac{1}{2}|a_n-\sqrt{c}|^2$ für $c\ge 1$

Andere Formulierung, erst nach S2.2.8 (1318) lesen

*//**S2.2.2** (1301) Vor: $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt Beh: $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//*

Seien $x_0, a \in \mathbb{R}_+$, und sei $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}$ $\forall n \geq 0$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$

Bew: Offenbar ist x_{n+1} das arithmetische Mittel von x_n und a/x_n und deshalb nach der AGM Ungleichung nicht kleiner als das geometrische Mittel, und dieses ist $\sqrt{a}$. Also folgt $x_n \geq \sqrt{a}$ für $n \geq 1$. Das bedeutet aber $x_n^2 \geq a$ oder $x_n \geq a/x_n$, woraus $x_{n+1} \leq x_n$ folgt, jedenfalls für $n \geq 1$. Darum ist die Folge (x_n) nach S2.2.2 konvergent. Sei b der Grenzwert der Folge, dann ist $b \geq \sqrt{a}$, also sicher $\neq 0$. Aus der Rekursion folgt für $n \to \infty$ die Gleichung $2b = b + a/b$ und daraus folgt $b^2 = a$.

$$\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{x + \frac{a}{x}}{2} \Rightarrow x = \frac{x + \frac{a}{x}}{2}$$

A2.2.16 Sei $x_n = \sqrt[n]{x}$ für ein $x \in \mathbb{R}_+$. Zeige : Für $x>1$ ist die Folge (x_n) streng monoton fallend und es gilt immer $x_n > 1$, für $x<1$ ist sie streng monoton wachsend und erfüllt $x_n < 1$ und für $x=1$ ist die Folge konstant. Insbesondere ist die Folge in jedem Fall monoton und beschränkt, also konvergent.

A2.2.17 Sei $x_n = \sqrt[n]{x}$ für ein $x \in \mathbb{R}_+$. Benutze aus **A2.1.8** b) (1207) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und um zu zeigen , dass immer $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ ist.

A2.2.18 Beweise folgendes Intervallschachtelungsprinzip: Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq b_n$ so, daß (a_n) monoton wächst, (b_n) monoton fällt und $(b_n - a_n)$ eine Nullfolge ist. Dann gibt es genau eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \cap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Lös: [……………[]…...] a_n, b_n beschränkt

$a_1 \leq .. \leq a_n \leq b_n \leq … \leq b_1$ Grenzwert $\cap$ der Intervalle

A2.2.19 Es sei $\alpha>0$, $a_1:=\sqrt{\alpha}$, $a_{n+1}:=\sqrt{\alpha+a_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert.
Hinweis: Zeige induktiv, dass $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ streng monoton wächst und durch $1+\sqrt{\alpha}$ nach oben beschränkt ist.

Lös:Beh(.) $(a_n)\uparrow$ streng monoton wachsend, d.h. $a_{n+1}>a_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
(..) $a_n\leq 1+\sqrt{\alpha}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow a_n>0\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}$
(...) a_n konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1/2+\sqrt{\alpha+1/4}=\dfrac{1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$

Bew zu(.) Induktion nach n

$n=1: a_1=\sqrt{\alpha}<\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\alpha+a_1}=a_2$

$n\mapsto n+1: a_{n+2}=\sqrt{\alpha+\underbrace{a_{n+1}}_{>a_n:\text{IndHyp}}}>\sqrt{\alpha+a_n}=a_{n+1}$

Bew zu(..) Induktion nach n

$n=1: a_1=\sqrt{\alpha}\leq 1+\sqrt{\alpha}$

$n\quad n+1: a_{n+1}=\sqrt{\alpha+a_n}\underbrace{\leq}_{IH: a_n<1+\sqrt{\alpha}}\sqrt{\alpha+1+\sqrt{\alpha}}\leq\sqrt{\underbrace{\alpha+1+2\sqrt{\alpha}}_{(\sqrt{\alpha}+1)^2}}=1+\sqrt{\alpha}$

Bem: Man hätte sogar $a_n<1+\sqrt{\alpha}\ \ \forall\ n$ zeigen können

Bew zu(...) Da (.) $a_n\nearrow$ und (..) nach oben beschränkt $\overset{S2.2.2}{\underset{S2.2.3}{\Rightarrow}}$ konvergiert (a_n)

Sei $a:=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \Rightarrow a=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\alpha+a_n}\underbrace{=}_{A2.1.4}\sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha+a_n)}$

$=\sqrt{\alpha+a}\Rightarrow a^2=\alpha+a\Rightarrow\underbrace{a^2-a+(1/2)^2}_{(a-1/2)^2}=\alpha+(1/2)^2\Rightarrow$

$|a-1/2|=\sqrt{\alpha+1/4}\Rightarrow a=1/2+\sqrt{\alpha+1/4}$ oder $\underbrace{\frac{1}{2}-\sqrt{\alpha+\frac{1}{4}}}_{\underbrace{<\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}}=0}_{\text{Widerspruch zu }\alpha>0}}\underbrace{\Rightarrow}_{a\geq a_1=\sqrt{\alpha}>0}$

$a=1/2+\sqrt{\alpha+1/4}=\dfrac{1+\sqrt{4\alpha+1}}{2}$

S2.2.8(1318) (AGM Verfahren...arithmetisch/geometrisches Mittel)

Vor:Sei $0<a\leq b$, $a_0:=a$, $b_0:=b$, und die Folgen $(a_n),(b_n)$ seien induktiv definiert durch

$a_{n+1}:=\sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1}:=\frac{a_n+b_n}{2}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

Beh:$I_n:=[a_n,b_n]\subset[a,b]$, $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ ist eine Intervallschachtelung mit

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=:\alpha\in\mathbb{R}$

(α heißt das arithmetisch- geometrische Mittel von a,b: $\alpha=M(a,b)$).

Bem:$a=b \Rightarrow \alpha=a=b$

*//**S2.2.2** (1301)Vor:$(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh:$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//*

*//**S2.1.3** (1255)$(a_n),(b_n),(c_n)$ Folgen aus R: $a_n\to a, b_n\to b, (n\to\infty)$ und $\alpha\in R$//*

//1.)$a_n\leq\alpha$ $(\geq\alpha)$ für unendlich viele $n\in N \Rightarrow a\leq\alpha$ $(a\geq\alpha)$//

//2.)$a_n\leq b_n$ $(a_n\geq b_n)$ für unendlich viele $n\in N \Rightarrow a\leq b$ $(a\geq b)$//

//3.)$a_n\leq c_n\leq b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b \Rightarrow c_n\to a$ $(n\to\infty)$ $a_n\to a$, $b_n\to b=a$//

//Bem:$a_n<\alpha$ für ∞ viele $n\in N \not\Rightarrow a<\alpha$ sondern $a\leq\alpha$//

Bew: I.H. $a_0\leq a_n\leq b_n\leq b_0$, $\underbrace{\geq}_{b_n>a_n}\sqrt{a_n a_n}=a_n$

$a_n\leq\sqrt{a_n b_n}=:a_{n+1}\underbrace{\leq}_{*}1/2(a_n+b_n)=:b_{n+1}\leq 1/2(b_n+b_n)=b_n \Rightarrow$

$0\leq a_0\leq a_1\nearrow$, $a_n\leq b_0$, $a\leq b_n\searrow$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ $\exists$ $\alpha:=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\exists$ $\beta:=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3}$

$0<a_0\leq\alpha$, $\beta\leq b_0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ $\alpha=\sqrt{\alpha\beta}$, $\beta=1/2(\alpha+\beta) \Rightarrow 1/2(\beta-\alpha)=0 \Rightarrow \alpha=\beta$

* $a_n b_n\leq 1/4(a_n+b_n)^2 \ldots 0\leq(a_n-b_n)^2 \Rightarrow 0\leq(\ldots)^2$ ok

A2.2.20 Berechne mit dem Taschenrechner jeweils a_4,b_4 beim AGM Verfahren für die Startwerte a=1, b=3 bzw a=2, b=10

Lös:Startwerte $a_0=a$, $b_0=b$ mit $0<a\neq b$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$,

$n\in\mathbb{N}_0$.

(.)a=1, b=3:

n	0	1	2	3	4
a_n	1	$\sqrt{3}\approx 1{,}732050808$	1,861209718	1,863616006	1,863616784
b_n	3	2	1,866025404	1,863617561	1,863616784

(..)a=2, b=10

n	0	1	2	3	4
a_n	2	$\sqrt{20}\approx 4{,}472135955$	5,180040129	5,207978710	5,208016382
b_n	10	6	5,236067978	5,208054054	5,208016382

A2.2.21 Zeige für ein beliebiges $c\in\mathbb{R}_+$ ist

$$1\le(1+\frac{c}{n})^n=\sqrt[n]{(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}}\le\sqrt[n]{\exp(c)}$$. Folgere, dass $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n=1$.

//S1.5.6 (715) $x\in R$, $x\ge-1$, $n\in N$, $(1+x)^n\ge1+nx$, $=\ \Leftrightarrow\ x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//
//S2.1.3 (1255) (a_n), (b_n), (c_n) Folgen aus R: $a_n\to a, b_n\to b, (n\to\infty)$//
// 3.) $a_n\le c_n\le b_n$ für fast alle $n\in N$ und $a=b\ \Rightarrow\ c_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$ $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$, $b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} b=a$//

Lös: $c\ge0$, $\frac{c}{n}\ge0\ \Rightarrow\ 1+\frac{c}{n}>1\ \Rightarrow\ (1+\frac{c}{n})^n\ge1\underbrace{>}_{!!!}0$, insbesondere $(1+\frac{c}{n})^n>0$

$\alpha>0\ \Rightarrow\ \alpha=\sqrt[n]{\alpha^n}\ \Rightarrow\ (1+\frac{c}{n})^n=\sqrt[n]{(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}}$,

$x_{n^2}=(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}$ Teilfolge von $x_n=(1+\frac{c}{n^2})^n$.

\# $\frac{c}{(n+1)^2}>-1\ \Rightarrow\ c>-(n+1)^2\ \Rightarrow\ \underbrace{\overbrace{-c}^{<0}}_{>0}<(n+1)^2$ richtig $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

\# $$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(1+\frac{c}{(n+1)^2})^{n+1}}{(1+\frac{c}{n^2})^n}\underbrace{\ge}_{S1.5.6}\frac{1+\frac{c}{(n+1)}}{\frac{(n^2+c)^n}{n^{2n}}}=\frac{n^{2n}+\frac{n^{2n}c}{(n+1)}}{(n^2+c)^n}\ge\frac{n^{2n}+\frac{n^{2n}c}{(n+1)}}{n^{2n}}=1+\frac{c}{n+1}>1$$

$x_n\underbrace{\uparrow}_{S2.3.1}$ für $c\neq0$ und $n>-c$ (d.h. $\forall\ n\in\mathbb{N}$, da $c\in\mathbb{R}_+\ \Rightarrow\ -c\le0$),

für $c=0$, $x_n\equiv1$ konstant, daher $x_n\le\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\exp(c)$.

$\nearrow$ von $\sqrt{\ }\ \Rightarrow\ \sqrt[n]{(1+\frac{c}{n^2})^{n^2}}\le\sqrt[n]{\exp(c)}\underbrace{\to}_{n\to\infty}1\ \underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.3}\ \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{c}{n})^n=1$

A2.2.22 Vor: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, a_n nicht negativ: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ konvergent
Aussage: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\searrow\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}n*a_n=0$

*//**S2.2.5**(1307) Konvergenzkriterium von Cauchy*
// (ist notwendig und hinreichend).
//Eine komplexe Folge $(z_n)\subset\mathbb{C}$ ist <u>genau dann</u> konvergent, wenn sie das
//Cauchy Kriterium erfüllt:
//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}: |z_n-z_m|<\varepsilon\ \ \forall\ n,m\ge n_1(\varepsilon)\ \Leftrightarrow$
//$Re(z_n)$ und $Im(z_n)$ sind Cauchyfolgen.

Lös: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0(\varepsilon): n*|a_n-0|<\varepsilon\ \ \forall\ n\ge n_0$. ε baf: $\sum\limits_{v=1}^{\infty}a_v<\infty\ \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.5}$

$\exists\ n_1\in\mathbb{N}$: $\sum\limits_{v=n_0+1}^{n}a_v<\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\ge n_1$.

$\sum\limits_{v=1}^{\infty}a_v<\infty\ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=0\ \Rightarrow\ \exists\ n_2\in\mathbb{N}: |a_n-0|<\frac{1}{n_1}\frac{\varepsilon}{2}\ \ \forall\ n\ge n_1$.

Wähle $n_0:=\max\{n_1,n_2\}\ \Rightarrow$

$$|n*a_n-0|=(n-n_1)a_n+n_1a_n=(\sum_{v=n_0+1}^{n}\underbrace{a_n}_{\le a_v})+n_1a_n\le(\underbrace{\sum_{v=n_0+1}^{n}a_v}_{\underset{n\ge n_1}{<}\frac{\varepsilon}{2}})+\underbrace{n_1a_n}_{\underset{n\ge n_2}{<}}<\varepsilon\ \ \forall\ n\ge n_0.$$

A2.2.23 Vor: $x_n, x \in \mathbb{R}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent,

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$: $y_n = x_{\phi(n)}$, $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ beliebig

Eigenschaft von φ damit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent? Andernfalls eine Abb φ damit $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ divergent?

a) φ surjektiv

Lös: Sei $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 0, 0, \ldots \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ konvergent,

Bsp: $\varphi(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}n, \text{ falls } n \text{ gerade} \\ 1, \text{ falss } n \text{ ungerade} \end{cases}$ surjektiv, da $\forall\ m \in \mathbb{N}$ 2m Urbild ist $\Rightarrow$

$(y_n)_{n=1}^{\infty} = x_1, x_1, x_1, x_2, x_1, x_3, x_1, x_4, \ldots = 1,1,1,0,1,0,1,0,\ldots$ ist divergent

b) φ injektiv

Lös: $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n)_{n=1}^{\infty} = x \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n \geq n_0$: $x_n \in U_\varepsilon(x)$.

$N = \{n \mid \varphi(n) \leq n_0\} \underbrace{\Rightarrow}_{\phi \text{ injektiv}} N = \varphi^{-1}(1, .. n_0)$ endlich $\Rightarrow \exists\ m_0$: $\varphi(n) \geq n_0\ \forall\ n > m_0 \Rightarrow$

$y_n = x_{\phi(n)} \in U_\varepsilon(x)\ \forall\ n > m_0 \Rightarrow y_n$ konvergent gegen x, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$.

c) φ konstant

Lös: $\varphi(n) = m \Rightarrow y_n = x_m$ konstant $\Rightarrow y_n$=konvergent, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_m$!!!

d) $\varphi \uparrow$

Lös: $\varphi \uparrow \Rightarrow \varphi$ injektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{b)} (y_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergent

A2.2.24 $a_n := 1 - \sqrt{1 - a_n}$; Beweise $a_n = \frac{1}{2}$

Bew: Wohldefiniertheit

$0 \leq a_n \leq 1$, denn $0 \leq a_1 = \frac{1}{2} \leq 1$, $0 \leq a_n \leq 1 \Rightarrow \sqrt{1-0}$

$0 = 1 - \sqrt{1-0} \leq 1 - \sqrt{1 - a_n} = a_{n+1} \leq 1 - \sqrt{1-1} = 1 \Rightarrow a_n$ wohldefiniert und beschränkt

a_n monoton fallend, denn $a_n \geq a_{n+1}$:

A2.2.25 $a_n = \dfrac{1}{((-1)^{n+1} - 2)^n}$

a) a_n=beschränkt?

Lösung: (a_n) enthält Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$.