A2.3.1 Zeige: $\frac{1}{2(n+1)} \leq (e-(1+1/n)^n) \leq \frac{e}{n} \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

*//**S1.5.6** (715) $x\in R$, $x\geq -1$, $n\in N$, $(1+x)^n \geq 1+nx$, $=$ $\Leftrightarrow$ $x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$//*
//S2.3.8 (1402) $x\in\mathbb{R}$ $\wedge$ $x\neq 0$ $\wedge$ $n>-x$ $\wedge$ $x_n=(1+x/n)^n$ $\forall$ $n\in N$: (x_n) ↑//
//S2.3.9 (1403) $b_n:=(1+1/n)^{n+1}$ ↘ //

Bew: $0\leq e-(1+1/n)^n \leq \underbrace{(1+1/n)^{n+1}}_{>e\ldots S2.3.9} - (1+1/n)^n = \underbrace{(1+1/n)^n}_{\leq e\ldots S2.3.8} (1+\frac{1}{n}-1) \leq e/n$ und

$$e-(1+1/n)^n \geq \underbrace{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}_{<e\ldots S2.3.8} - (1+1/n)^n = (1+1/n)^n \left(\frac{(1+\frac{1}{2n})^{2n}}{(1+1/n)^n} - 1 \right) =$$

$$\underbrace{(1+1/n)^n}_{\underset{S2.3.8}{\geq}(1+1/1)^1} \left(\left(\frac{\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2}{\frac{n+1}{n}} \right)^n - 1 \right) \geq 2 \left(\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2} \frac{n}{n+1} \right)^n - 1 \right) =$$

$$2 \left(\left(\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} \right)^n - 1 \right) = 2 \left(\left(1+\underbrace{\frac{1}{4n^2+4n}}_{>-1} \right)^n - 1 \right) \underset{S1.5.6}{\geq} 2 \left(1+\frac{n}{4n^2+4n} - 1 \right) =$$

$$2\,\frac{1}{4n+4} = \frac{1}{2(n+1)}$$

A2.3.2 Zeige, dass die Expotentialfunktion streng monoton wachsend ist. $x<y \Rightarrow e^x<e^y \Rightarrow 1<e^y e^{-x}=e^{y-x}$

A2.3.3 Zeige $\frac{1}{(1+1/n)^{n+1}} = (1-\frac{1}{n+1})^{n+1} \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$ und schließe daraus, dass die Folge $(1+1/n)^{n+1}$ monoton fallend gegen e strebt.

S2.3.19(1451)

Vor:y>0 Beh $\exists$ $x\in\mathbb{R}$: $e^x=y$

Aussage: Die Funktion exp: $\mathbb{R}\rightarrow(0,\infty)$ ist bijektiv ($\exp(x)=e^x$)

*//**D1.3.2**(504) Ein angeordneter Körper (K,+,·,<) heißt vollständig //*

*// (bezüglich <): $\Leftrightarrow$ $\forall$ $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T\in K$.// //**S2.3.18**(1409)10.)(1412)$a_n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} a \Rightarrow \exp(a_n) \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} \exp(a)$//*

// 8.)(1412) $x<y \Leftrightarrow \exp(x)<\exp(y)$ (strenge Monotonie)//

Bew:Injektivität folgt aus S2.3.18 8.)

Surjektivität: $y\in(0,\infty)$, $T=\{t\in\mathbb{R} | e^t\leq y\}\neq\emptyset$ …beschränkt?

$e^{-n}=\frac{1}{e^n}=(1/e)^n \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$ da $0<1/e<1$ $\Rightarrow$

$\exists$ $n_0(y)$: $e^{-n}<y$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\Rightarrow$ $-n\in T$ $\forall$ $n\geq n_0(y)$ $\Rightarrow$ $T\neq\emptyset$

$\forall$ $t\in T$: $t<1+t\leq e^t\leq y$ $\Rightarrow$ y ist obere Schranke von T $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}$ $\exists$ $x:=\sup T$

Beh:$e^x=y$ aus Widerspruch zu $e^x>y$ und $e^x<y$

Annahme: $e^x>y$: $e^{x-\frac{1}{n}} \underbrace{\overbrace{\rightarrow}^{S2.3.18\ 10.)}}_{n\rightarrow\infty} e^x \Rightarrow \exists\ n_0$: $e^{x-\frac{1}{n}}>y$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\Rightarrow$

$\forall$ $t\in T$: $e^t\leq y<e^{x-\frac{1}{n}}$ $\forall$ $n\geq n_0$ $\Rightarrow$ $t<x<x-\frac{1}{n_0}$ $\forall$ $t\in T$ $\Rightarrow$

Widerspruch zur Definition von x

#$\Rightarrow$ $t<x-\frac{1}{n_0}$ $\forall$ $t\in T$ $\Rightarrow$ Widerspruch zur Definition von x,

#da $x-\frac{1}{n_0}$ obere Schranke wäre, x damit nichtkleinste

#obere Schranke

Annahme $e^x<y$: $\Rightarrow$ $e^{x+\frac{1}{n}} \underbrace{\overbrace{\rightarrow}^{S2.3.18\ 10.)}}_{n\rightarrow\infty} e^x<y \Rightarrow e^{x+\frac{1}{n}}<y$ $\forall$ $n\geq n_1(y)$ $\Rightarrow$ $(x+1/n)\in T$ $\forall$ $n\geq n_1$

$\Rightarrow$ Widerspruch zu x (Def von x) obere Schranke

$\Rightarrow$ $e^x=y$ d.h. jedes y vorhanden, e Funktion bijektive Abb $\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^+$,

e transzendente Zahl....keine 0 Stelle eines Polynoms

Andere Formulierung:

***//D1.3.2** (504)Ein angeordneter Körper (K,+,·,<) heißt vollständig //*

// (bezüglich <): ⇔ $\forall$ $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T\in K$.//

$T=\{t\in\mathbb{R}|e^t\le y\}$, $e^{-n}=\frac{1}{e^n}=(\frac{1}{e})^n \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} 0$ da $0<\frac{1}{e}<1 \Rightarrow \exists\ n_0(y): e^{-n}<y\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow$

$-n\in T\ \forall\ n_0(1) \Rightarrow T\neq\emptyset$

$\forall\ t\in T$: $t<1+t\le e^t\le y \Rightarrow$ y ist obere Schranke von T $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}$ $\exists\ x:=\sup(T)$, $y\underbrace{=}_{?}e^x$,

Annahme $e^x>y \underbrace{\Rightarrow}_{S2..3.18\ 10.)} e^{x-\frac{1}{n}} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} e^x \Rightarrow \exists\ n_0: e^{x-\frac{1}{n}}>y\ \forall\ n\ge n_0\ \forall\ t\in T \Rightarrow$

$e^t\le y<e^{x-\frac{1}{n}}\ \forall\ n\ge n_0 \Rightarrow t<x<x-\frac{1}{n_0}\ \ \forall\ t\in T \Rightarrow$ Widerspruch zu Def von x

$e^x<y \Rightarrow e^{x+\frac{1}{n}} \underbrace{\rightarrow}_{n\to\infty} e^x<y\ \forall\ n\ge n_1(y) \Rightarrow x+\frac{1}{n}\in T\ \forall\ n\ge n_1 \Rightarrow$

Widerspruch zu x obere Schranke (Def von x)

$\Rightarrow e^x=y$, jedes y vorhanden.

e Funktion ist bijektive Abb $\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, e transzendente Zahl, keine Nullstelle eines Polynoms

D2.3.2(1452)Die bijektive Funktion zu $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ ist definiert durch $\exp(x)=e^x:=\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n\ \forall\ x\in\mathbb{R}$ heißt (natürliche) Expotentialfunktion mit Basis $e:=\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n$.

Die Umkehrfunktion $\log(0,\infty)\to\mathbb{R}$ der Expotentialfunktion heißt natürlicher Logarithmus oder Logarithmus zur Basis e ($\log x=\ln x$)

Bem: $\log e^x=x\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. $\exp(\log y)=y\ \ \forall\ y>0$, $\log 1=0$

A2.3.4

a) Zeige, dass die Expotentialfunktion $\exp:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ streng monoton wachsend ist

b) Zeige $\exp(x)\ge 1+x\ \forall\ x\ge 0$, und schließe daraus, daß die Funktion exp nach oben unbeschränkt ist.

c) Benutze $\exp(x)\exp(-x)=1$, um zu zeigen:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ K\in\mathbb{R},\ \forall\ x<-K:\exp(x)<\varepsilon$

d) Skizziere den Graphen von exp und log und zeige $\log(xy)=\log(x)+\log(y)$

S2.3.20(1453) Eigenschaften des Logarithmus

1.) $\log e^x = x \ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $e^{\log y} = y \ \forall\ y>0$.
   $\text{Log } 1 = \log e^0 = 0$, $\log e = \log e^1 = 1$

2.) $0<x<y \Leftrightarrow -\infty<\log x<\log y$; $x,y\in\mathbb{R}$, (streng monoton wachsend)

Bew: $0<x<y \Rightarrow \log x<\log y$, $x=\log e^x<y=\log e^y$

#Bem : $0<u<1<v \Rightarrow \log 0<\log u<\underbrace{\log 1}_{=0}<\log v \Rightarrow \underbrace{\to-\infty}_{u\to 0}<\log u<\underbrace{\log 1}_{=0}<\log v<\underbrace{\to\infty}_{v\to\infty} \Rightarrow$

3.) $\log(x\cdot y)=\log x+\log y \ \forall\ x,y>0$ $x,y\in\mathbb{R}$, Additionstheorem oder
   $\log 1/x=-\log x$ Funktionalgleichung

Bew: $e^{\log(xy)} \underbrace{=}_{1.)} xy=(e^{\log x})(e^{\log y})=e^{\log x+\log y} \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Injektivität}}$

$\log(xy)=\log x + \log y$

4.) (.) $a^k=e^{k\log a} \ \forall\ a>0,\ \forall\ k\in\mathbb{Z}$.
  (..) $a^r=e^{r\log a} \ \forall\ a>0,\ r\in\mathbb{Q}$.

Bew: (.) $a>0$, $k\in\mathbb{N}$, Induktion

$k=0$: $a^0=1=e^{0*\log a}$

$k=1$: $a^1=a \underbrace{=}_{1.)} e^{\log a}=e^{1*\log a}$

k: $a^k = aa^{(k-1)} = ae^{(k-1)\log a}=e^{\log a}e^{(k-1)\log a} =e^{\log a+(k-1)\log a}=$
$e^{k\log a}$ Analog $k\in\mathbb{Z}$ (siehe andere Formulierung)

Andere Formulierung:

$k=0$: ok

$k \quad k+1$: $a^{k+1}=a^k*a=e^{k\log a}e^{\log a}=e^{(k+1)\log a}$.

$k\in-\mathbb{N}$: $a^k=1/a^{-k}=\dfrac{1}{e^{(-k)\log a}}=e^{k\log a}$

//S2.3.18(1409) 6.)(1410)(..) $\exp(1/k)=e^{\frac{1}{k}}=\sqrt[k]{e}$ $\forall\ k\in N$, //

Bew: (..) Sei $r\in\mathbb{Q} \Rightarrow \exists\ p\in\mathbb{Z},\ \exists\ q\in\mathbb{N}$ mit $r=p/q \Rightarrow$

$a^r=(a^{1/q})^p=(e^{\frac{1}{q}\log a})^p=e^{p\frac{1}{q}\log a}=e^{r\log a}$

$\exp(r)=\exp(p\cdot 1/q)=[\exp(1/q)]^p \underbrace{=}_{S2.3.16\ 6.)} [e^{\frac{1}{q}}]^p=e^{\frac{p}{q}}=e^r$.

5.) $\sqrt{x}=e^{\frac{1}{2}\log x}$, $a^{1/n}:=\sqrt[n]{a}=e^{\frac{1}{n}\log a}$ $\forall\ a>0$ und $n\in\mathbb{N}$,

Bew: $(e^{\frac{1}{2}\log x})^2=e^{\frac{1}{2}\log x}*e^{\frac{1}{2}\log x}=e^{\log x}=x \Rightarrow e^{\frac{1}{2}\log x}=\sqrt{x}$

$(e^{\frac{1}{n}\log a})^n=e^{(\frac{1}{n}\log a)n}=e^{\log a}\underbrace{=}_{1.)} a$

6.)(.)$1-1/x \le \log x \le x-1 \quad \forall\ x>0$.

// ***S2.3.18****(1409)* 7.)(1409) $1+x \le \exp(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) \le \frac{1}{1-x} \quad \forall\ x<1$//

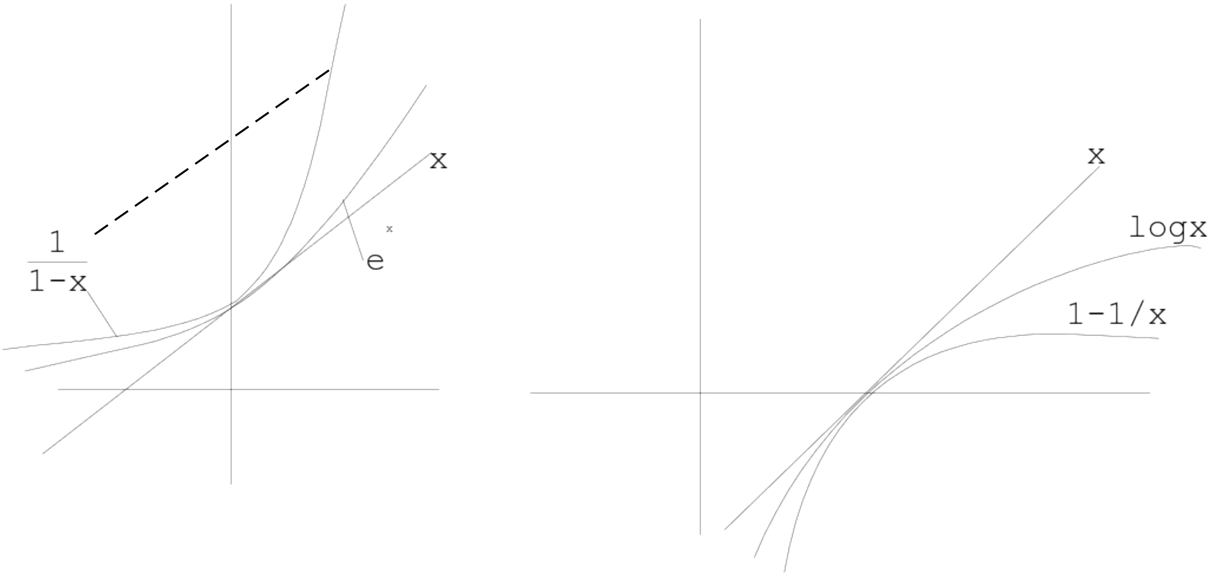
Bew: $1+u \le e^u \quad \forall\ u \in \mathbb{R} \underbrace{\Rightarrow}_{u=x-1} 1+x-1 \le e^{x-1} \Rightarrow x \le e^{x-1} \underbrace{\Rightarrow}_{x>0} \log x \le x-1 \quad \forall\ x>0$.

$$e^u \le \frac{1}{1-u} \text{ für } u<1 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{statt } u:\ \frac{x-1}{x}<1} e^{\frac{x-1}{x}} \le \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \Rightarrow \frac{x-1}{x} \le \log x$$

$$\Rightarrow 1-1/x \le \log x \quad \forall\ \frac{x-1}{x}<1 \Rightarrow 1-1/x<1 \Rightarrow -1/x<0 \Rightarrow x>0$$

Andere Formulierung:

$1+y \le e^y \ \forall\ y \in \mathbb{R}$. $y=\log x \Rightarrow 1+\log x \le e^{\log x} \Rightarrow \log x \le x-1 \quad \forall\ x>0,\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\text{lox} = -\log(1/x) \ge -(1/x-1) = 1-1/x$



7.) $a, a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \log a_n \underset{n\to\infty}{\to} \log a$ Stetigkeit

//6.)(.) $1-1/x \le \log x \le x-1 \quad \forall x>0$.//

Bew: $\log a_n = \log \frac{a_n}{a} + \log a$, $\frac{a_n}{a} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, $1 - \underbrace{\frac{a}{a_n}}_{\sim 1/x} \le \log \frac{a_n}{a} \le \underbrace{\frac{a_n}{a}}_{\sim x} - 1$

$\Rightarrow \log \frac{a_n}{a} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \log a_n \underset{n\to\infty}{\to} \log a$

//2.) $0<x<y \Leftrightarrow -\infty < \log x < \log y$; $x, y \in \mathbb{R}$//
//#Bem: $0<u<1<v \Rightarrow \log 0 < \log u < \underbrace{\log 1}_{=0} < \log v \Rightarrow \underbrace{\to -\infty}_{u\to 0} < \log u < \underbrace{\log 1}_{=0} < \log v < \underbrace{\to \infty}_{v\to\infty}$ //

Bem: Aus 2.) $\log x > 0 \quad \forall x>1$, $\log x < 0 \quad \forall x: 0<x<1$,
$x_n \to \infty (0) \Rightarrow \log x_n \to \infty (-\infty)$

Zur Wiederholung:
Def von a^x..$x \in \mathbb{N}$: $a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{x\,mal}$, $x \in \mathbb{Z}$,
$x<0$: $a^x = (a^{-x})^{-1}$, $x = 1/q$, $q \in \mathbb{N}$, $a^x = \sup\{y \in \mathbb{R} : y^q \le a\}$, $a \ge 0$
$x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $a^x = (a^{\frac{1}{q}})^p$, $a \ge 0$

A2.3.5 Zeige: $|e - (1+1/n)^n| \le e/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

*//**S2.3.8** (1402) $x \in \mathbb{R} \wedge x \ne 0 \wedge n > -x \wedge x_n = (1+x/n)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$: $(x_n) \uparrow$ //*
*// **2.3.9** (1403) $b_n := (1+1/n)^{n+1} \searrow$ //*
//S2.3.10 (1403) $[(1+1/n)^n, (1+1/n)^{n+1}]$ $\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n = \lim_{n\to\infty} (1+1/n)^{n+1} =: e$, $n \in \mathbb{N}$//
Bew: $|e-(1+1/n)^n| = e-(1+1/n)^n \underset{S2.3.9, S2.3.8}{\le} (1+1/n)^{n+1} - (1+1/n)^n = \underbrace{(1+1/n)^n}_{\le e\, S2.3.8, S2.3.5} \underbrace{[(1+1/n)-1]}_{=1/n}$
$\le e/n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

//#S2.3.5 (1401) $g>1$, $a>0$, $g^x = a \Leftrightarrow \exists_1 \; x = \underbrace{{}^g\log a}_{Definition}$ $a \in \mathbb{R}$//

//#Bem: 1.) ${}^g\log 1 = 0$//
// 2.) $x \in (0, +\infty)$, $x \mapsto {}^g\log x \uparrow$ aus 2.3.4 Fall a>1//
// 3.) ${}^g\log a^\rho = \rho * {}^g\log a$//

D2.3.3(1454)
Für $a>0$ sei $a^b := e^{b\, {}^e\log a} \quad \forall b \in \mathbb{R}$(Potenz zur Basis a mit Exponenten b.
Siehe S2.3.18 5.) Bew für $b \in \mathbb{Q}$ #aber $b \in \mathbb{R}$???#
#S2.3.5 ${}^e\log a^b = b * {}^e\log a \Leftrightarrow a^b = e^{{}^e\log a^b} = e^{b\, {}^e\log a}$
$\log_a b := \frac{\log b}{\log a} \quad \forall b \in \mathbb{R}$, $b>0$, $a \ne 1$ Logarithmus von b zur Basis $a \ne 0$.

Bem: $y = a^b = e^{b\, {}^e\log a} \Leftrightarrow {}^e\log y = b * {}^e\log a \Leftrightarrow b = \frac{{}^e\log y}{{}^e\log a} = {}^a\log y \Leftrightarrow b = {}^a\log y$

Hinweis: Verwendet im Bew S2.3.15
Bez: $\sqrt[n]{a} := a^{1/n} := \exp(1/n \log a)$ für $a>0$. $\sqrt[n]{0} := 0$

D2.3.4(1456)
(.) Für $a>0$ heißt a^x: $\mathbb{R} \to (0, \infty)$, $x \quad a^x$ die allgemeine Expotentialfunktion zur Basis $a>0$, $a \ne 1$

(..) $\log_a:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, x $\log_a x$ heißt die Logarithmusfunktion zur Basis $a>0$, $a\neq 1$

(...) $x^\alpha:(0,\infty)\to(0,\infty)$ heißt allgemeine Potenzfunktion mit Potenz $\alpha\in\mathbb{R}$.

$(a^x=e^{x\log a}$, $\log_{(a)} x=\dfrac{\log x}{\log a}$, $x^\alpha=e^{\alpha\log x}, x>0, \alpha\in\mathbb{R})$

(1456) Eigenschaften dieser Funktionen:

Mit $x,y,a,b\in\mathbb{R}$, $a,b>0$ gilt

1.) $a^x a^y=a^{x+y}$

Bew: $a^x a^y=(e^{x\log a})(e^{y\log a})=e^{x\log a+y\log a}=e^{(x+y)\log a}=a^{x+y}$

2.) $(a^x)^y=a^{xy}$

Bew: $(a^x)^y=(e^{x\log a})^y=e^{y\log(e^{x\log a})}=e^{y(x\log a)}=e^{(yx)\log a}=a^{xy}$

3.) $a^x b^x=(ab)^x$

Bew: $a^x b^x=(e^{x\log a})(e^{x\log b})=e^{x\log a+x\log b}=e^{x(\log a+\log b)})=$
$e^{x\log ab}=(ab)^x$

4.) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$ $(x,y\in(0,\infty))$ Funktionalgleichung

Bew: $\log_a(xy)=\dfrac{\log(xy)}{\log a}=\dfrac{\log x+\log y}{\log a}=\log_a x+\log_a y$

5.) $\log_a y:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion von a^x, $a\neq 1$, $\mathbb{R}\to(0,\infty)$

Bew: $y=a^x \Leftrightarrow \log y=\log a^x \Leftrightarrow \log y=\log e^{x\log a}=x\log a \Leftrightarrow$
$x=\dfrac{\log y}{\log a}=\log_a y$

6.) $x^{\frac{1}{\alpha}}$ ist die Umkehrfunktion von x^α für $:\alpha\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$

*//**#S2.3.5**(1401) $g>1$, $a>0$, $g^x=a \Leftrightarrow \exists_1\ x=\underbrace{{}^g\log a}_{Definition}$ $a\in\mathbb{R}$//*

//#Bem: 3.) ${}^g\log a^\rho=\rho*{}^g\log a$//

Bew: $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq 0$, $x>0$, $y>0$, $y=x^\alpha \Leftrightarrow y=e^{\alpha\log x} \Leftrightarrow \log y=\alpha\log x \Leftrightarrow$

$1/\alpha\log y=\log x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{\alpha}\log y}=x \Leftrightarrow y^{\frac{1}{\alpha}}=x \Leftrightarrow x=\sqrt[\alpha]{y}$

Hinweis: $\log a^x=x*\log a$ siehe 2.3.5 Bem 3.) bzw 5.)

7.) $\log a^x=x\log a$

Bsp:1.) *//**S2.3.18**(1409) 10.)(1412) $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a \Rightarrow \exp(a_n) \underbrace{\to}_{n\to\infty} \exp(a)$//*

$a>0$, $\sqrt[n]{a} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1$, $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}=e^{1/n\log a}$, $1/n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$, $(\log a)1/n \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.6\ 10.)}$
$e^{1/n\log a} \underbrace{\to}_{n\to\infty} e^0=1$

2.)//**S2.3.8** *(1402)$x\in\mathbb{R} \wedge x\neq 0 \wedge n>-x \wedge x_n=(1+x/n)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}: (x_n) \uparrow$//*

$\forall\ \alpha>0$ (speziell α klein) gilt $\underbrace{\frac{\log n}{n^\alpha} \rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$,

$n^\alpha=e^{\alpha\log n}\geq(1+\frac{\alpha\log n}{2})^2 \underbrace{\geq}_{S2.3.8} (1+\frac{\alpha\log n}{2})^2\geq\frac{\alpha^2}{4}(\log n)^2 \Leftrightarrow$

$\frac{\log n}{n^\alpha}\leq\frac{4}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{\log n} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$

3.) $\sqrt[n]{n}=n^{1/n}=e^{(1/n)\log n} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} e^0=1$

4.) $\frac{n^\alpha}{e^n} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0 \quad \forall\ \alpha>0$ (α groß), $\frac{n^\alpha}{e^n}=\frac{e^{\alpha\log n}}{e^n}=e^{\alpha\log n}e^{-n}=$

$e^{(\alpha\log n)-n}=e^{n\left(\frac{\alpha\log n}{n}-1\right)}$, $0<\underbrace{\frac{\alpha\log n}{n}}_{2.)}<1/2 \quad \forall\ n\geq n_0(1/2) \Rightarrow$

$e^{n\left(\frac{\alpha\log n}{n}-1\right)}<e^{(-1/2)n} \quad \forall\ n\geq n_0(1/2)$, $e^{(-1/2)n} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 0$

5.) $\sqrt[n]{\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n}}=\frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}}=\frac{e}{n}\sqrt[n]{n!} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 1$ Formel von Stirling

//**S2.3.18***(1409) 11.)(1412)Für $n\geq 2$, $n\in\mathbb{N}$ gilt immer $e\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$ //*

Bew:n : $e(n/e)^n\leq n!\leq e(n/e)^n*n=:A_{(n)} \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

benütze: $(1+1/n)^n<e<(1+1/n)^{n+1}$

n=1 : $A_{(1)}=e\cdot 1/e\leq 1!\leq e*(1/e)^1*1$

$n\rightarrow n+1$: $(A_{(n)}\Rightarrow A_{(n+1)})$,

$(n+1)e(n/e)^n\leq n!(n+1)\leq(n+1)e(n/e)^n n \Rightarrow$

$(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n/e)^n\leq(n+1)!\leq(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}(n/e)^n n \Rightarrow$

$\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}\leq(n+1)!\leq(n+1)\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n} \Rightarrow$

$e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}\leq(n+1)!\leq(n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}e \Rightarrow A_{(n)} \quad \forall\ n\in\mathbb{N}$

$\underbrace{\sqrt[n]{e}}_{\rightarrow 1(n\rightarrow\infty)}\leq\frac{\sqrt[n]{n!}}{\left(\frac{n}{e}\right)}\leq\underbrace{\sqrt[n]{e}\cdot\sqrt[n]{n}}_{\rightarrow 1(n\rightarrow\infty)} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n}{e}} \underbrace{\rightarrow}_{n\rightarrow\infty} 1$

A2.3.6 Zeige:

a) $0<a<b \Rightarrow \begin{cases} a^x<b^x, \text{falls } x>0 \\ a^x>b^x, \text{falls } x<0 \end{cases}$

//S2.3.20 (1452) 2.)$0<x<y \Leftrightarrow -\infty<\log x<\log y$; $x,y\in\mathbb{R}$)//
//S2.3.18(1409) 8.)(1412) $x<y \Leftrightarrow \exp(x)<\exp(y)$//

Bew:(.) $0<a<b$, $x>0$: $a<b \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 2.)} \log a<\log b \underbrace{\Rightarrow}_{x>0}$

$x\log a<x\log b \underbrace{=}_{S2.3.18\ 8.)} \underbrace{e^{x\log a}}_{a^x}<\underbrace{e^{x\log b}}_{b^x}$

(..) $0<a<b,\ -x>0 \underbrace{\Rightarrow}_{(.)} \underbrace{a^{-x}}_{(a^x)^{-1}} < \underbrace{b^{-x}}_{(b^x)^{-1}} \Rightarrow a^x>b^x$

b) $x<y \Rightarrow \begin{cases} a^x<a^y, \text{falls } a>1 \\ a^x>a^y, \text{falls } 0<a<1 \end{cases}$

*//**S2.3.20** (1452)1.) $\log e^x=x\ \forall\ x\in\mathbb{R},\ e^{\log y}=y\ \forall\ y>0.\ \log 1=\log e^0=0$//*
//2.) $0<x<y \Leftrightarrow -\infty<\log x<\log y;\ x,y\in\mathbb{R}$//
//#Bem: $0<u<1<v \Rightarrow \log 0<\log u<\underbrace{\log 1}_{=0}<\log v \Rightarrow \underbrace{\to-\infty}_{u\to 0}<\log u<\underbrace{\log 1}_{=0}<\log v<\underbrace{\to\infty}_{v\to\infty}$ //

*//**S2.3.18**(1409)8.)(1412) $x<y \Leftrightarrow \exp(x)<\exp(y)$ (strenge Monotonie)//*
Bew:(.) $x<y,\ a>1 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 2.)} \log a> \underbrace{\log 1}_{=0 S2.3.20 1.)}=0 \underbrace{\Rightarrow}_{x<y} x\log a<y\log a \underbrace{=}_{S2.3.18\ 8.)} \underbrace{e^{x\log a}}_{a^x} < \underbrace{e^{y\log a}}_{a^y}$

(..) $x<y,\ 0<a<1 \underbrace{\Rightarrow}_{S2.3.20\ 2.)} \log a< \underbrace{\log 1}_{=0\ S2.3.20 1.)}=0 \underbrace{\Rightarrow}_{x<y} x\log a>y\log a \underbrace{=}_{S2.3.18\ 8.)}$
$\underbrace{e^{x\log a}}_{a^x} > \underbrace{e^{y\log a}}_{a^y}$

A2.3.7 Untersuche jeweils die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimme ggf den Grenzwert:

a) $a_n=\left(\frac{n+7}{n-15}\right)^{2n} \ldots = \left(\frac{1+7/n}{1-15/n}\right)^{2n} = \left[\frac{(1+7/n)^n}{(1-15/n)^n}\right]^2 \underset{n\to\infty}{\to} \left(\frac{e^7}{e^{-15}}\right)^2=e^{44}$

b) $a_n=\sqrt[n]{n^\alpha}$ für $\alpha\in\mathbb{R}$ (fest)

$\ldots n^{\frac{\alpha}{n}}=(n^{\frac{1}{n}})^\alpha=(\sqrt[n]{n})^\alpha \underset{n\to\infty}{\to} 1^\alpha=1$, da $\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$, denn die Potenzfunktion ist stetig, d.h. wenn $b_n \underset{n\to\infty}{\to} b$ mit $b_n,b>0\ \forall\ n$, so $(b_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\to} b^\alpha$...Bew:
$(b_n)^\alpha=\exp(\alpha*\log b_n) \underset{n\to\infty}{\to} \exp(\alpha*\log b) \underset{n\to\infty}{\to} b^\alpha$

*//**S2.3.20**(1452) 7.) $a,a_n>0,\ n\in\mathbb{N},\ a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \log a_n \underset{n\to\infty}{\to} \log a$//*
*//**S2.3.18**(1409)10.)(1412) $a_n \underset{n\to\infty}{\to} a \Rightarrow \exp(a_n) \underset{n\to\infty}{\to} \exp(a)$//*

Bew: $(b_n)^\alpha=\exp(\alpha \underbrace{\log b_n}_{\to\log b(\ S2.3.20\ 7.)}) \underbrace{\to}_{S2.3.18\ 10.)} \exp(\alpha\log b)=b^\alpha$

$a_n=\sqrt[n]{n^\alpha}=(n^\alpha)^{\frac{1}{n}}=n^{\alpha\frac{1}{n}}=(n^{\frac{1}{n}})^\alpha=1^\alpha=\exp(\alpha(\log 1)=\exp(0)=1$

c) $a_n = (¿_k^n)\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$ für $k \in \mathbb{N}_0$ und $\lambda>0$ (fest).

Lös: $a_n = \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}}_{\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{1}\underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\frac{n-1}{n}=1-1/n\to 1}\underbrace{\frac{\dots(n-k+1)}{\dots.n}}_{\to 1}}(1-\lambda/n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\left(1+\frac{-\lambda}{n}\right)^n}_{\to e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{1^{-k}=1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

$a_n = \underbrace{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}}_{\frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{1}\underbrace{\frac{(n-1)}{n}}_{\frac{n-1}{n}=1-1/n\to 1}\underbrace{\frac{\dots(n-k+1)}{\dots.n}}_{\to 1}}(1-\lambda/n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!}\underbrace{\frac{n}{n}}_{=1}\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1}\dots\underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1}\underbrace{(1-\lambda/n)^k}_{\to 1} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}$

Bem: Diese Aussage ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung nützlich. Approximation der Binominalverteilung durch die Poissonverteilung allerdings in etwas allgemeinerer Form:

$p_n \in (0,1)\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ \lim_{n\to\infty}(np_n)=\lambda>0 \Rightarrow \binom{k}{n}(1-p_n)^{n-k} \underbrace{\to}_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

A2.3.8 Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert: $a_0:=2,\ a_{n+1}:=a_n-\frac{\log a_n}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Zeige, dass (a_n) konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(Hinweis: zeige zuerst $a_n \geq 1\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

A2.3.9 Ist die durch $a_1:=1$, $a_{n+1}=\frac{2+a_n}{1+a_n}$ rekursiv definierte Folge a_n konvergent?

A2.3.10 Vor: $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$. Beweise: $\lim_{n\to\infty}\log a_n = \log a$

//**S2.3.20**(1452) Eigenschaften des Logarithmus//

//6.)(.) $1-1/x \leq \log x \leq x-1\ \forall\ x>0$.//

Bew: Vor $\Rightarrow \frac{a_n}{a} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 1 \underbrace{\Rightarrow}_{2.3.20\ 6.)} \underbrace{1-\frac{a_n}{a}}_{\substack{\to 0\\ n\to\infty}} \leq \log\frac{a_n}{a} \leq \underbrace{\frac{a_n}{a}-1}_{\substack{\to 0\\ n\to\infty}} \Rightarrow \log\frac{a_n}{a} \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$ d.h.

$\log a_n - \log a \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0 \Rightarrow \log a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} \log a$

S2.3.21(1460)Wichtige Grenzwerte

1.) $\sqrt[n]{n} \overset{n\to\infty}{\to} 1$
Bew:siehe S2.1.2 Bsp 4.)

2.) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall \ a \geq 0$

Bew:a≥1 $\Rightarrow 1 \leq \underbrace{\sqrt[n]{a}}_{\to 1} \leq \sqrt[n]{n} \underbrace{\to}_{1.)} 1 \quad \forall \ n \geq [a]+1$

$0<a<1 \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{1/a}}_{=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}} \overset{n\to\infty}{\to} 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} = 1$

3.) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^\alpha} = 0, \quad \alpha > 0$

Bew: $(1+\frac{x}{n}) \nearrow e^x, \quad x \geq 0, \quad n^\alpha = e^{\alpha \log n} \geq \left(1+\frac{\alpha \log n}{p}\right)^p \quad \forall \ p \in \mathbb{N} \geq \frac{\alpha^p \log^p n}{p^p} \underbrace{\Rightarrow}_{p=2}$

$n^\alpha \geq \frac{\alpha^2 \log^2 n}{2^2} \Rightarrow \frac{2^2}{\alpha^2 \log n} \geq \frac{\log n}{n^\alpha} \overset{n\to\infty}{\to} 0$

4.) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{e^n} = 0 \ (p>0)$

Bew: $\frac{n^p}{e^n} \leq \frac{n^p}{\left(1+\frac{n}{[p]+1}\right)^{[p]+1}} = \frac{n^p([p]+1)^{[p]+1}}{(1+[p]+n)^{[p]+1}} \underbrace{\leq}_{Bin} \frac{n^p([p]+1)^{[p]+1}}{n^{[p]+1}} = \frac{n^p}{n^{[p]+1}} \underbrace{([p]+1)^{[p]+1}}_{c} =$

$\underbrace{\frac{1}{n^\alpha}}_{0 \leq \alpha < 1} c = \left(\frac{1}{n}\right)^\alpha c \overset{n\to\infty}{\to} 0$

5.) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{(e/n)^n}} \to 1 \qquad \underbrace{\sqrt[n]{n*e}}_{\underset{1.),2.)}{\to} 1}$

*//**S2.3.18**(1409) 11.)(1412)Für n≥2, n∈N gilt immer* $e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < ne\left(\frac{n}{e}\right)^n$ *//*

Bew:S2.3.18: $e \leq \frac{n!}{(n/e)^n} \leq n*e \Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{e}}_{\underset{2.)}{\to} 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{n!}{(e/n)^n}}}_{\to 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n*e}}_{\underset{1.),2.)}{\to} 1}$

NR: $x^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log x} < e^{\frac{1}{n}\log y} = y^{1/n} \Leftrightarrow x \leq y$

6.) Vor: $x \in \mathbb{R}, \ |x| > 1$

Aussage: $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

Bew: $\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|^n}{n!} = \frac{\overbrace{|x||x|...|x|}^{n\ Faktoren}}{\underbrace{1*2*,...,*n}_{n\ Faktoren}} = \frac{\overbrace{|x||x|...|x|}^{n\ Faktoren}}{\underbrace{1*2*,...,*n}_{n\ Faktoren}} \underbrace{=}_{M \geq |x|} \underbrace{\frac{\overbrace{|x||x|...|x|}^{M\ Faktoren}}{1*2*,...,*M}}_{=\frac{|z|^M}{M!}} \frac{\overbrace{|x||x|...|x|}^{n\text{-}M\ Faktoren}}{\underbrace{(M+1)*(M+2)*,...,*n}_{n-M\ Faktoren}}$

$\underbrace{\leq}_{\frac{|z|}{M+1},\frac{|z|}{M+2},...,\frac{|z|}{n} \leq \frac{|z|}{M+1}} \quad .... \ ?$