Doppelreihen

D3.2.3(1765)

// **D2.5.1**(1550) Doppelfolge reeller (komplexer) Zahlen
// Abbildung a: $\mathbb{N}^2 \mapsto \mathbb{R}$ #($\mathbb{C}$)#: $(n,m) \mapsto z_{nm}$, $(z_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$

$\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ mit z_{kl} Doppelfolge reeller (komplexer) Zahlen nach D2.5.1 heißt Doppelreihe. Mögliche Bezeichnungen.

$z_{nm} \in \mathbb{R}$ #($\mathbb{C}$)#, $\sum_{n,m=1}^{\infty} z_{nm} := (S_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$, $S_{nm} := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} z_{kl}$ $\forall$ $n, m \in \mathbb{N}$.

D3.2.4(1765)

- $(S_{kl})_{k,l=1}^{\infty} \underset{k,l\to\infty}{\rightrightarrows} S \in \mathbb{R}$ #($\mathbb{C}$)#: $\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ heißt konvergent und $\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl} = S = \lim_{k,l\to\infty} S_{kl}$.

•• $\sum_{k,l=0}^{\infty} z_{kl}$ heißt absolut konvergent: $\sum_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}|$ konvergiert, $\sum_{k,l=0}^{\infty} |z_{kl}| < \infty$

Schreibweisen:Absolutpartialsumme: $\overline{S}_{nm} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |z_{kl}|$,

Folge der Absolutpartialsummen: $(\overline{S}_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$.

Möglichkeiten der Doppelreihenberechnung:
Bsp: (x,x) sind Indizes von Summanden, Pfeile $\to$ entsprechen +
1.) Abzählung nach den Blöcken $\mathbb{N}_n^2 = \{(k,l) \mid k,l=1,\dots,n\} = ((k,l))_{k,l=1}^{n}$
Bijektive Abb f_1: $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$
\begin{array}{cccc}
(1,1)^{(10)} & (1,2)^{(43)} & (1,3)^{(98)} & (1,4)^{(1615)} \\
\downarrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
(2,1)^{(21)} \to & (2,2)^{(32)} & (2,3)^{(87)} & (2,4)^{(1514)} \\
 & & \uparrow & \uparrow \\
(3,1)^{(54)} \to & (3,2)^{(65)} \to & (3,3)^{(76)} & (3,4)^{(1413)} \\
 & & & \uparrow \\
(4,1)^{(109)} \to & (4,2)^{(1110)} \to & (4,3)^{(1211)} \to & (4,4)^{(1312)}
\end{array}
$$

rot Nummerierungsbeginn 0

2.) Cauchysche Abzählung $\mathbb{N}_0^2$ nach den Diagonalen $\Delta_n := \{(k,l) \mid k+l=n\}$

$$\begin{array}{llll}
(0,0)^{(0)} & (0,1)^{(2)} & (0,2)^{(5)} & (0,3)^{(9)} \quad \ldots. \\
(1,0)^{(1)} & (1,1)^{(4)} & (1,2)^{(8)} \quad \ldots. & \\
(2,0)^{(3)} & (2,1)^{(7)} & (2,2)^{(11)} \quad \ldots.. & \\
(3,0)^{(6)} & (3,1)^{(10)} \quad \ldots & &
\end{array}$$

Bijektive Abb $\varphi: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0^2$ mit $\varphi(0) := (0,0)$ und ist $\varphi(j) = (k,l) \Rightarrow$

$$\varphi(j+1) := \begin{cases} (k-1, l+1) & \text{für } k \neq 0 \\ (l+1, 0) & \text{für } k = 0 \end{cases}.$$

Bsp $\varphi(0) := (0,0)$, $\varphi(0+1) := \begin{cases} (k-1, l+1) & \text{für } k \neq 0 \\ (0+1, 0) & \text{für } k = 0 \end{cases} = (1,0)$ usw

Ist $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} z_{k\ell} \underset{D3.2.3}{=}$ eine Doppelreihe, so gilt

$$\sum_{j=0}^{\infty} z_{k(j)\ell(j)} = z_{00} + (z_{10}+z_{01}) + (z_{20}+z_{11}+z_{02}) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k+l=n} z_{kl} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} z_{k,n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} z_{n-\ell,\ell}.$$

Allgemein: Sei $\varphi = (k,l): \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}^2$, $\varphi(j) = (k(j), l(j))$ $\forall\, j \in \mathbb{N}$ eine Abzählung von $\mathbb{N}^2$, d.h. eine bijektive Abb von $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}^2$. Berechnung des Wertes $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ durch Berechnung des Wertes der Abzählung $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$ mit S3.2.7

S3.2.7 (1767)

Vor: $(z_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, bij. Abb $\varphi=(k,l)$: $\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}^2$, $\varphi(j)=(k(j),l(j))\ \forall\ j\in\mathbb{N}$,

d.h. φ zählt $\mathbb{N}^2$ ab (siehe oben), $a_{(k(j)l(j))}{}_{j=1}^{\infty}$

Aussagen: $\bullet \sum_{k,l=1}^{\infty}|z_{kl}| \underbrace{=}_{D3.2.4} S \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}|z_{k(j)l(j)}| \underbrace{=}_{D3.2.4} S \Rightarrow \bullet\bullet \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}=\sum_{j=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$

//**S3.2.5**(1750)//

//Vor:Sei $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu|<\infty$.//

//Beh:Für jede Umordnung $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty}|w_\nu|=\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu|<\infty$//

// und $S=\sum_{\phi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)}=\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$//

*//**S2.5.1**(1250) Cauchysches Konvergenzkriterium//*
//$(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ ist konvergent $\Leftrightarrow$ //
//$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ mit $|a_{n'm'}-a_{nm}|<\varepsilon\ \ \forall\ n,n',m,m'\geq N$ oder //
// $\forall\ n'\geq n\geq N$ und $m'\geq m\geq N$//

// $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.//

*//**S1.2.1**(406) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$//*
// 6.) $|a+b|\leq|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)//

Bew:

● "⇒" Sei $\sum_{k,l=1}^{\infty}\underbrace{|z_{kl}|}_{\geq 0}\underbrace{=}_{D3.2.4} S \Rightarrow (\overline{S}_{k,l})_{k,l=1}^{\infty}$ ist monoton und beschränkt ⇒

$\exists\ \lim_{n\to\infty}\overline{S}_{nn}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k,l=1}^{n}|z_{k\ell}|$ (das ist eine Abzählung über Blöcke $(z_{kl})_{k,l=1}^{n}$)

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.5}$ alle Abzählungen (siehe oben) konvergieren absolut

„⇐" Sei $\sum_{j=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$ für irgendeine Auflistung absolut konvergent $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.5}$

$\overline{S}:=\sum_{j=1}^{\infty}|z_{k(j)l(j)}|=\lim_{n\to\infty}\overline{S}_{nn}=\sum_{n=1}^{\infty}|z_{kl}|$

\# d.h., ist die Summe für irgendeine Auflistung absolut konvergent,
\# so ist sie auch für eine blockweise nach 1.), siehe oben, absolut
\# konvergent. $\overline{S}$ und $\overline{S}_{nn}$ sind zunächst Summen aus Block- oder
\# anderen Auflistungen, noch nicht Summen von Spalten-
\# oder Zeilensummen

$\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N\in\mathbb{N}$: $0\leq\overline{S}-\overline{S}_{nn}<\varepsilon\ \ \forall\ n\geq N \underbrace{\Rightarrow}_{n'>n\geq N,m'>m\geq N}$

$\overline{S}_{n'm'}-\overline{S}_{nm}=\sum_{k=1}^{n'}\sum_{\ell=1}^{m'}|z_{kl}|-\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{m}|z_{kl}|=\sum_{k=n+1}^{n'}\sum_{\ell=m+1}^{m'}|z_{kl}| \underbrace{\leq}_{gewählt\ n'\geq m'}$

$\sum_{k=N+1}^{n'}\sum_{\ell=N+1}^{n'}|z_{kl}|=|\overline{S}_{n'n'}-\overline{S}_{NN}| \underbrace{\leq}_{S1.2.1\ 6.)} |\overline{S}_{n'n'}-\overline{S}|+|\overline{S}-\overline{S}_{NN}|<2\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{S2.5.1}$

$\sum_{k,l=1}^{\infty}|z_{kl}|$ konvergiert $\Rightarrow \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ absolut konvergent

\# $\sum_{k,l=1}^{\infty}|z_{kl}| \underbrace{=}_{D3.2.4} S \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty}|z_{k(j)l(j)}| \underbrace{=}_{D3.2.4} S$ heißt auch, dass

\# $\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ und $\sum_{j=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$ konvergent, aber nicht unbedingt, dass beide
\# Summen gleich sind

$\bullet\bullet$ S_{nm} absolut konv $\Rightarrow$ $S_{nm} \underset{n,m\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} S \Rightarrow S_{nn} \underset{n\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} S \Rightarrow \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}=\sum_{j=1}^{\infty} z_{k(j)l(j)}$

(Beachten S_{nm}, S, S_{nn} sind keine Summen aus Absolutbeträgen)

Bsp:

//**S3.2.2**(1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$.//

//5.)Quotientenkriterium $z_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$ und $\exists$ $0<q<1$ mit //

// $\bullet$ $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leq q<1$ $\forall$ $n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|<\infty$.//

$\sum_{k,l=0}^{\infty} q^k q^{\ell}=\sum_{k,l=0}^{\infty} q^{k+\ell}$, $q\in\mathbb{R} \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} q^{k(j)+\ell(j)} \underset{Bsp2.)\,Cauchy\ Abzählung}{\underbrace{=}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} q^{n-\ell+\ell} \underset{q^{-\ell+\ell}=q^0=1}{\underbrace{=}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$

$\underset{S3.2.2\,5.)}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ absolut konvergent für $|q|<1 \underset{S3.2.6}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{k,l=0}^{\infty} q^{k+\ell}=\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k$.

$$\left|\frac{(k+2)q^{k+1}}{(k+1)q^k}\right| = \left|\frac{(k+2)q}{(k+1)}\right| = \underbrace{\left|\frac{(k+2)}{(k+1)}\right|}_{\xrightarrow[k\to\infty]{} 1} |q| \underset{k\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} |q|<1$$

Aus

//*S2.5.2*(1551) *Vor:* $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ *konvergent,* $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=a$, $\bullet$ $\forall$ $n\in N$ $\exists$ $a_n:=\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm}$

//

// $\bullet\bullet$ $\forall$ $m\in N$ $\exists$ $a_m:=\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm}$//

//*Aussage:* $\bullet$ $\exists$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$: $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *bzw* $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=\lim\limits_{n\to\infty} (\lim\limits_{m\to\infty} a_{nm})$ //

// $\bullet\bullet$ $\exists$ $\lim\limits_{m\to\infty} a_m$: $a=\lim\limits_{m\to\infty} a_m$ bzw $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{nm}=\lim\limits_{m\to\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} a_{nm})$ //

folgt

$$\textbf{S3.2.8}(1768)\quad \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}=S=\lim_{k,l\to\infty} S_{kl} \quad \left\{\begin{array}{l} und \bullet \sum_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}=z_k\ \forall k\in N \underset{S2.5.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}) \\ und \bullet\bullet \sum_{k=1}^{\infty} z_{k\ell}=z_{\ell}\ \forall \ell\in N \underset{S2.5.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}) \end{array}\right\} = \sum_{k,l=1}^{\infty} z_{k\ell}=S$$

S3.2.9(1769) Cauchyscher Doppelreihensatz

Vor: $(z_{kl})_{k,l=1}^{\infty} \in \mathbb{C}$, $S_{nm} := \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} z_{kl}$ $\forall$ $n,m \in \mathbb{N}$, $\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl} := (S_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$.

Bezeichnungen k Zeilenindices, ℓ Spaltenindices

Aussage: $\sum_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}|$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}|\right) \text{ konvergiert, d.h. Zeilenreihen } \sum_{\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}| \text{ konvergieren } \forall\ k \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \left|\sum_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}\right| \le \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}|\right) < +\infty}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_{k\ell}|\right) \text{ konvergiert, d.h. Spaltenreihen } \sum_{k=1}^{\infty} |z_{k\ell}| \text{ konvergieren } \forall\ \ell \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{\ell=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} z_{k\ell}\right| \le \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |z_{k\ell}|\right) < +\infty}$

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} z_{k\ell}\right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} z_{k\ell}\right)}$

*//**S2.2.2**(1301) (Monotone Konvergenz)//*

//Vor:Sei $(a_n) \subset \mathbb{R}$ monoton und beschränkt//

//Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//

*//**S2.5.2**(1551) Iterierter Limes//*

//Vor: $(a_{nm})_{n,m=1}^{\infty}$ konvergent, $\lim_{n,m\to\infty} a_{nm} = a$, • $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \exists\ a_n := \lim_{m\to\infty} a_{nm}$ //

// •• $\forall\ m \in \mathbb{N}\ \exists\ a_m := \lim_{n\to\infty} a_{nm}$//

//Aussage: • $\exists \lim_{n\to\infty} a_n$: $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ bzw $\lim_{n,m\to\infty} a_{nm} = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} a_{nm}\right)$ //

// •• $\exists \lim_{m\to\infty} a_m$: $a = \lim_{m\to\infty} a_m$ bzw $\lim_{n,m\to\infty} a_{nm} = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} a_{nm}\right)$ //

Bew:"$\Rightarrow$" $\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |z_{kl}| \underset{m,n\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} \overline{S}$ $\Rightarrow$ $\forall$ $k,m \in \mathbb{N}, k \le m$: $\sum_{\ell=1}^{m} |z_{k\ell}| \le \sum_{k,l=1}^{m} |z_{k\ell}| \le \sum_{k,l=1}^{\infty} |z_{k\ell}| <$

$+\infty$ $\underset{S2.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$\sum_{\ell=1}^{m} |z_{k\ell}| \underset{m\to\infty}{\underbrace{\rightarrow}} \overline{S}_k$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\lim_{m\to\infty} \overline{S}_{nm} = \lim_{m\to\infty} \overset{n\ \ne\infty}{\sum_{k=1}^{n}} \overset{!}{\sum_{l=1}^{m}} |z_{kl}|$ $\forall$ $k \in \mathbb{N}$ $\underset{S2.5.2}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$\exists$ $\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \overline{S}_{nm}\right)$ und es gilt

$\sum_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}| = \lim_{n,m\to\infty} \overline{S}_{nm} = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \overline{S}_{nm}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} |z_{kl}|\right) =$

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\lim_{m\to\infty} \sum_{l=1}^{m} |z_{kl}|\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |z_{kl}|\right)$ $\Rightarrow$

iterierte Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |z_{kl}|\right)$ konvergiert.

*//**S2.2.2**(1301) (Monotone Konvergenz)//*

//Vor:Sei $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt//

//Beh:∃ $\lim_{n\to\infty} a_n$//

"⇐" $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |z_{kl}|\right)$ konvergent ⇒

$\overline{S}_{nm} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \underbrace{|z_k|}_{>0} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |z_{kl}|\right) < +\infty$ d.h. $\underbrace{(\overline{S}_{nm})_{n,m=1}^{\infty}}_{monoton}$ und $\overline{S}_{nm}$ beschränkt

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ auch Abzählung von

$\sum_{k,l=1}^{\infty} |z_{kl}|$ über die Blöcke $(|z_{kl}|)_{k,\ell=1}^{n}$ konvergiert,

\# d.h. z.B. $\exists\ \overline{S} : \lim_{n\to\infty} \overline{S}_{nn} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k,l=1}^{n} |z_{kl}| = \overline{S}$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.7}$ $\sum_{k,l=1}^{\infty} z_{kl}$ absolut konvergent ⇒ Beh

Andere Formulierung frei nach Skript Uni Greifswald

Zusammenhang zwischen $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$, $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} z_{ij}$, $\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} z_{f(k)}$?

Vor: $z_{ij}\in\mathbb{C}$, $i,j\in\mathbb{N}$, $f: \mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ bijektiv,

$\exists$ $K\in\mathbb{R}$ $\forall$ endliche $M\subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$: $\sum_{(i,j)\in M} |z_{ij}|\le K$.

Aussagen: • Jede Zeilensumme $Z_i := \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$ konvergiert

•• Jede Spaltensumme $S_j := \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$ konvergiert

••• $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$ und $\sum_{j=0}^{\infty} S_j$ konvergieren. $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = \sum_{j=0}^{\infty} S_j =: S$

•••• $\sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)} = S$

*//**S2.2.2**(1301) (Monotone Konvergenz)//*

//Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt//

//Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//

// d.h. *$(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt $\Leftrightarrow$ (a_n) konvergent //*

Bew: Zunächst

L3.2.9 (1780)

$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{z_k}_{\in C}$ ist absolut konvergent $\Leftrightarrow$ $\exists$ $K\in\mathbb{R}$ $\forall$ endliche $M\subset\mathbb{N}$: $\sum_{i\in M} |z_i|\le K$.

Bew L3.2.9: „$\Rightarrow$" $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ abs konv $\underset{S2.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $(S_n := \sum_{k=0}^{n} |z_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\Rightarrow$

$\exists$ $K\in\mathbb{R}$: $S_n\le K$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$. $\underset{M\subset\mathbb{N}\ \text{endlich},\, N=\max M}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\sum_{i\in M} |z_i| \le \sum_{i=0}^{N} |z_i| = S_N\le K$

„$\Leftarrow$" Setze $M:=\{0,1,\ldots,n\}$ $\Rightarrow$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} |z_k| = \sum_{i\in M} |z_{ij}| \le K$ $\Rightarrow$

S_n beschränkt und monoton $\underset{S2.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}}$ $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergent

//**S3.2.5**(1750) Absolut konvergente Reihen sind auch unbedingt konvergent

//Vor:Sei $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| \underbrace{\rightarrow}_{\nu\to\infty} S<\infty$.//

//Aussage:Für jede Umordnung $\sum_{\phi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)}$ von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ gilt $\sum_{\phi(\nu)=0}^{\infty} |z_{\phi(\nu)}| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| =$

$\overline{S}<\infty$ und $S=\sum_{\phi(\nu)=0}^{\infty} z_{\phi(\nu)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$//

//***S3.2.2***(1700)//

//Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}$//

//Beh://

//1.)Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent//

// $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ *konvergent* $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *konvergent.*//

Bem:

#Vergleich L3.2.9 und Vor

#∃ $K\in\mathbb{R}$ ∀ endliche $\boxed{M\subset\mathbb{N}:}$ $\sum_{i\in M} |z_i| \le K \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ ist absolut konvergent

#∃ $K\in\mathbb{R}$ ∀ endliche $\boxed{M\subset \mathbb{N}x\mathbb{N}:}$ $\sum_{(i,j)\in M} |z_{ij}| \le K$, $z_{ij}\in\mathbb{C}$, $i,j\in\mathbb{N}$, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}x\mathbb{N}$ bijektiv.

M sind jeweils endliche Teilmengen von unendlich vielen Indices aller

Summanden und ≤K gilt in beiden Fällen ∀ M,

Vor (siehe oben): $z_{ij}\in\mathbb{C}$, $i,j\in\mathbb{N}$, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}x\mathbb{N}$ bijektiv,

∃ $K\in\mathbb{R}$: $\sum_{(i,j)\in M} |z_{ij}| \le K$ ∀ endliche $M\subset\mathbb{N}x\mathbb{N}$.

Vor $\underbrace{\Leftrightarrow}_{L3.2.9}$ ∃ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}x\mathbb{N}$ bijektiv: $\sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)}$ absolut konvergent

$\Downarrow$

$\underbrace{\Leftrightarrow}_{S3.2.5}$ ∀ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}x\mathbb{N}$ bijektiv: $\sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)}$ absolut konvergent

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)}$ konvergent

Bezeichnung: $S=\sum_{i,j=0}^{\infty} z_{ij}$

Bem und S3.2.5 ⇒ ∀ bij f ∃ ● ● ● ● $S=\sum_{k=0}^{\infty} z_{f(k)}$.

- $M\subset\mathbb{N}$ endlich ⇒ $\{i\}xM$ endlich $\underbrace{\Rightarrow}_{Vor} \sum_{j\in M} |z_{ij}| \underbrace{\le}_{\forall M\subset N} K \underbrace{\Rightarrow}_{L3.2.9} \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$ abs konvergent

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{j=0}^{\infty} z_{ij}$ konvergent

$\bullet\bullet$ Analog $\sum_{i=0}^{\infty} z_{ij}$ abs konvergent $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{i=0}^{\infty} z_{ij}$ konvergent

//**S1.2.1**(406) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b \in K$//
// 6.) $|a+b| \le |a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)//

//**S2.1.3**(1255)Vor:Seien $(a_n),(b_n)$ Folgen aus R mit $a_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} a$, $b_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} b$, $\alpha \in R$//

//Beh: 2.) $a_n \le b_n$ ($a_n \ge b_n$) für unendlich viele $n \in N$ $\Rightarrow$ $a \le b$ ($a \ge b$) //
//**S2.2.2**(1301) (Monotone Konvergenz)//
//Vor:Sei $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt//
//Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//
// d.h. $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt $\Leftrightarrow$ (a_n) konvergent //

$\bullet\bullet\bullet$ $\sum_{i=0}^{m} |\sum_{j=0}^{n} z_{ij}| \underbrace{\le}_{S1.2.16.)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |z_{ij}| \underbrace{\le}_{Vor} K$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} |z_{ij}| = \sum_{i=0}^{m} |Z_i|$ konvergent

$\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S2.1.32.)}}^{\#*} \sum_{i=0}^{\infty} |Z_i| \le K$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2} \sum_{i=0}^{m} Z_i$ absolut konvergent $\Rightarrow$ $\#\sum_{i=0}^{m} Z_i$ konvergent#

Analog $\sum_{j=0}^{m} S_j$ absolut konvergent

$\#{*}a_m = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{\infty} |z_{ij}| \le K$, $a_m = b_m = \sum_{i=0}^{m} |Z_i|$ $\Rightarrow$ $a = b \le K$

Noch zu zeigen $\sum_{j=0}^{\infty} S_j = \sum_{i=0}^{\infty} Z_i = S$, zuerst $\sum_{i=0}^{\infty} Z_i = S$, analog $\sum_{j=0}^{\infty} S_j = S$:

//**S3.1.2**(1602)Rechenregeln und Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

//Vor:Sei $(z_\nu) \subset C$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//

// 5a) Für den Reihenrest $R_m := \sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu = (\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu \to S} - \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m}) \overset{m\to\infty}{\to} 0$, $m \in N_0$, //

//Bem:1.)Cauchy-Konvergenzkriterium S2.4.2 für unendliche Reihen.//

// Sei $(z_n) \subset C$. $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergiert $\Leftrightarrow$ $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_1(\varepsilon) \in N$ mit //

// $|\sum_{\nu=m+1}^{n} z_\nu| < \varepsilon\ \ \forall\ n > m \ge n_1(\varepsilon)$. (d.h. $|S_n - S_m)| < \varepsilon\ \ \forall\ n > m \ge n_1(\varepsilon)$).//

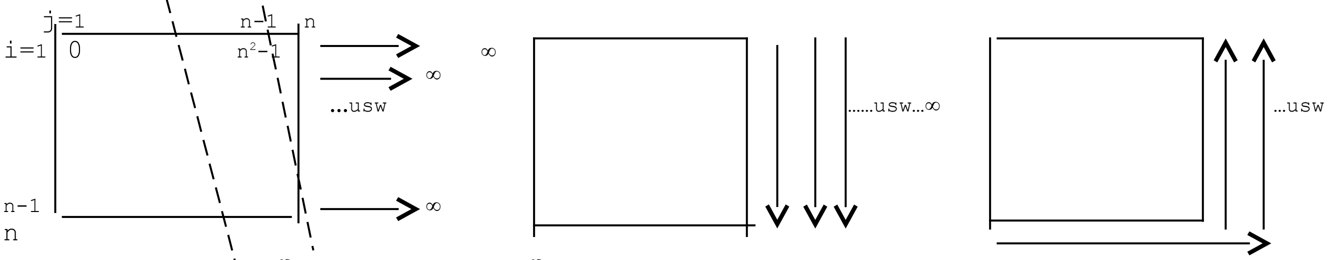
Sei $f_1: N \to NxN$ eine Abzählung nach Blöcken (Seite 1775)

$\underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} z_{f_1(i)}}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}$ absolut konvergent $\underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2,\ Bem\ 1.)}$

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0(\varepsilon): \sum_{k=n^2}^{n^2+p} |z_{f_1(k)}| < \varepsilon\ \ \forall\ n > n_0,\ p > 0 \underbrace{\Rightarrow}_{p\to\infty}$

$\sum_{k=n^2}^{\infty}|z_{f_1(k)}|\le\varepsilon\ \ \forall\ \ n>n_0 \ \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{\infty}|z_{f_1(k)}|=0.$

$|\sum_{k=0}^{n^2-1} z_{f_1(k)} - \sum_{i=0}^{n-1} Z_i| = |\sum_{i=0}^{n-1}\ \sum_{j=n}^{\infty} z_{ij}| \underbrace{\le}_{S1.2.1\ 6.)} \sum_{i=0}^{n-1}\ \sum_{j=n}^{\infty} |z_{ij}| \underbrace{\le}_{*siehe unten} \sum_{j=n}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{n-1} |z_{ij}| \le \sum_{k=n^2}^{\infty} \left|z_{f_1(k)}\right| \underbrace{\to}_{n\to\infty} 0$



$\#n\to\infty:\#\ \ |S-\sum_{i=0}^{\infty} Z_i|=0 \ \Rightarrow\ S=\sum_{i=0}^{\infty} Z_i$

Andere Formulierung

Vor: $z_{kl}\in \mathbb{C}$, $k,l\in\mathbb{N}_0$, $M:=\sup\{\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{l=0}^{n} |z_{kl}|:n\in\mathbb{N}\}<\infty$

Beh: $\sum_{k=0}^{\infty}\ (\sum_{l=0}^{\infty} z_{kl})$, $\sum_{l=0}^{\infty}\ (\sum_{k=0}^{\infty} z_{kl})$, $\sum_{k=0}^{\infty}\ (\sum_{\substack{k,l=0\\k+l=n}} z_{kl})$ konvergieren absolut und haben denselben Grenzwert.

*//**S2.2.2** (1301)Vor:$(a_n)\subset R$ monoton und beschränkt Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//*

*//**S1.2.1** (406) Vor: K angeordnet, $a,b\in K$ 6.)$|a+b|\le|a|+|b|$//*

*//**S2.1.3** (1255)(a_n)Folge aus R: $a_n\to a\,(n\to\infty)$ und $\alpha\in R$//*

//1.)$a_n\le\alpha$ $(\ge\alpha)$ für unendlich viele $n\in N$ $\Rightarrow$ $a\le\alpha$ $(a\ge\alpha)$//

*//**S3.2.2** (1700)Vor:$(z_n)_{n=0}^{\infty}$,$(w_n)_{n=0}^{\infty}\subset \mathbb{C}$, $b_n\ge 0$, $n\in\mathbb{N}_0$.//*

//Beh: 8.) Vor:$(x_k)_{k\in N_0}\subset \mathbb{R}$, $x_k\ge 0$, $k\in\mathbb{N}_0$ und $S_n:=\sum_{k=0}^{n} x_k$, $n\in\mathbb{N}$.//

//   Beh: $\sum_{k=0}^{n} x_k$ konvergent $\Leftrightarrow$ $(s_n)_{n\in N_0}$ beschränkt

Bew: $|z_{kl}|\subset\mathbb{R}$, $|z_{kl}|\ge 0 \Rightarrow \#k\le m:\#\sum_{\ell=1}^{m} |z_{k\ell}| \le \sum_{k,\ell=1}^{m} |z_{k\ell}| \le \sum_{k,\ell=1}^{\infty} |z_{k\ell}| \underbrace{\le}_{Vor} M<+\infty \Rightarrow$

$\sum_{l=0}^{\infty} |z_{k\ell}|\nearrow$ und beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{S2.2.2}$ $S_k:=\sum_{l=0}^{\infty} z_{kl}$ absolut konvergent

Analog $\forall\ \ell,n\in\mathbb{N}_0$: $T_\ell:=\sum_{k=0}^{\infty} z_{k\ell}$ und $V_n:=\sum_{\substack{k,\ell=0\\k+\ell=n}} z_{k\ell}$ sind absolut konvergent $\Rightarrow$

$\sum_{k=0}^{\infty} S_k$, $\sum_{l=0}^{\infty} T_\ell$ und $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ sind wohldefiniert. # Eselsbrücke S_k Spaltensumme

$\sum_{k=0}^{K}\ |\sum_{\ell=0}^{L} z_{k\ell}| \underbrace{\le}_{S1.2.1} \sum_{k=0}^{K}\ \sum_{\ell=0}^{L} |z_{k\ell}| \underbrace{\le}_{Vor} M<\infty \underbrace{\Rightarrow}_{L\to\infty,\ S2.1.3\ 1.)} \sum_{k=0}^{K} S_k = \sum_{k=0}^{K}\ |\sum_{\ell=0}^{\infty} z_{k\ell}| \le M<\infty$

$\underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2\ 8.)}\ \sum_{k=0}^{\infty} S_k$ absolut konvergent.

Analog $\sum_{\ell=0}^{\infty} T_l$ und $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$ sind absolut konv.

$S:=\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ und $V:=\sum_{n=0}^{\infty} V_n$.

Z.z.: S=V

//**S3.1.2**(1602) Vor:Seien $(z_\nu)\subset \mathbb{C}$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//

//*Beh:Notwendiges Konvergenzkriterium*

// *5a) Für den Reihenrest* $R_m := \sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu = (\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu\to S} - \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ m\in\mathbb{N}_0$, //

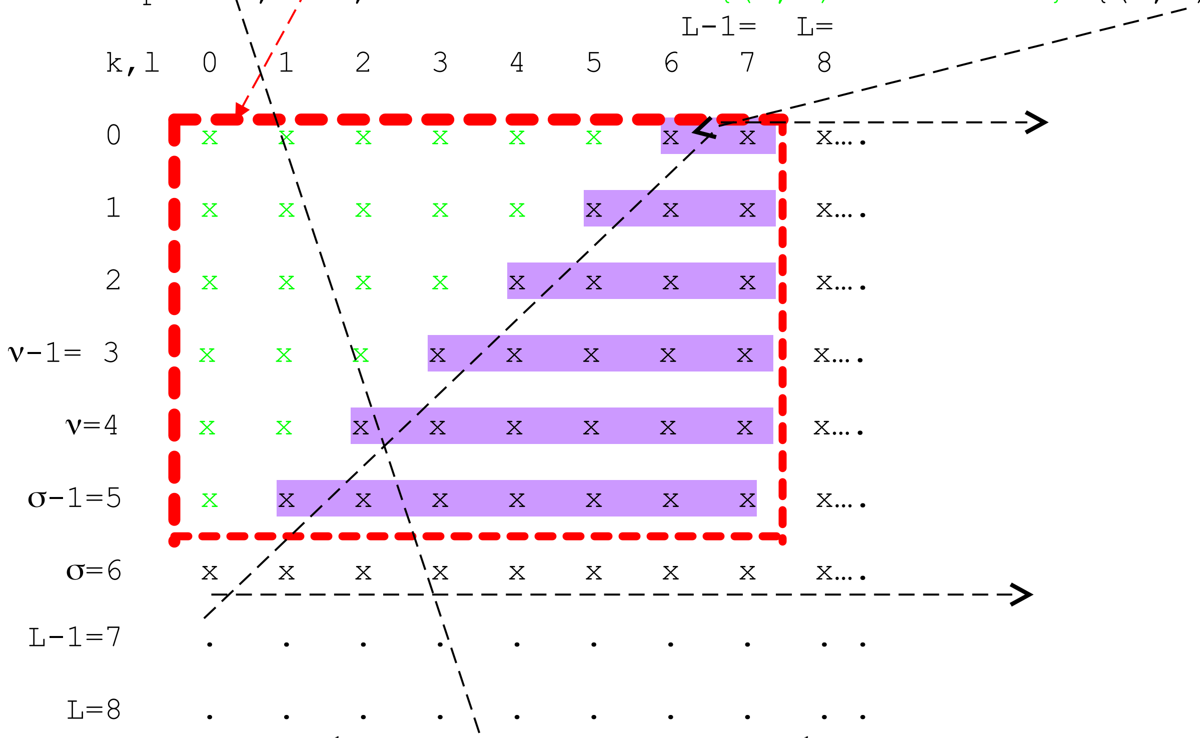
// *d.h. es gilt* $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.//

$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \sigma,\nu\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=\sigma}^{\infty} |S_k| \underset{S3.1.2\,5a)}{<} \frac{\varepsilon}{4}$, $\sum_{n=\nu}^{\infty} |V_n| \underset{S3.1.2\,5a)}{<} \frac{\varepsilon}{4}$ und sei $L>\sigma>\nu$

$Z_L := \{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 : k\le\sigma-1,\ \ell\le L-1\} \setminus \{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 : k+\ell\le\sigma-1\}$

Bsp: $\nu=4$, $\sigma=6$, $L=8$

$\{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 : k+\ell\le\sigma-1\} \subset \{(k,\ell)\in\mathbb{N}^2 : k+\ell\le\sigma\}$



$\Rightarrow\ |V-S| = |V - \sum_{k=0}^{\sigma-1} S_k - \sum_{k=\sigma}^{\infty} S_k| \le \sum_{k=\sigma}^{\infty} |S_k| + |V - \sum_{k=0}^{\sigma-1} S_k| \underset{S3.1.2\,5a)}{<}$

$\frac{\varepsilon}{4} + |V - \sum_{k=0}^{\sigma-1} (\sum_{l=0}^{L-1} z_{kl} + \sum_{l=L}^{\infty} z_{kl}| \underset{S1.2.1}{<}$

$\frac{\varepsilon}{4} + |\sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=L}^{\infty} z_{kl}| + |V - \sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=0}^{L-1} z_{kl}| \underset{S1.2.1}{<}$

$\frac{\varepsilon}{4} + \underbrace{\overbrace{\sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=L}^{\infty} |x_{k\ell}|}^{Reihenrest}}_{endlich\ viele\ Summanden} + |\sum_{n=\nu}^{\infty} V_n| + |\sum_{n=0}^{\nu-1} V_n - \sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=0}^{L-1} |x_{kl}| \underset{S3.1.2\,5a)}{<}$ #ν=σ ändert nix#

$\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + |\sum_{n=0}^{\nu-1} \boxed{V_n - \sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=0}^{L-1}} x_{kl}| = \frac{3\varepsilon}{4} + |\sum_{k,l\in Z_L} x_{kl}| \le \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{k,l\in Z_L} |x_{kl}| \le \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{k+l\ge\nu} |x_{kl}|$

$\le \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$

\# eigener Versuch ab $\underset{S3.1.2\,5a)}{<}$

$$\# \quad \frac{\varepsilon}{4} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\sigma-1} \overbrace{\sum_{l=L}^{\infty} |x_{k\ell}|}^{\text{Reihenrest}}}_{\text{endlich viele Summanden}} + \left|\sum_{n=\sigma}^{\infty} V_n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\sigma-1} V_n - \sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=0}^{L-1} |x_{kl}|\right| \underset{S3.1.2\,5a)}{\leq}$$

$$\# \quad \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \left|\sum_{n=0}^{\sigma-1} \boxed{V_n - \sum_{k=0}^{\sigma-1} \sum_{l=0}^{L-1}} x_{kl}\right| = \frac{3\varepsilon}{4} + \left|\sum_{k,l\in Z_L} x_{kl}\right| \leq \frac{3\varepsilon}{4} + \sum_{k,l\in Z_L} |x_{kl}|$$

$$\leq \frac{3\varepsilon}{4} + \left|\sum_{k+l\geq\sigma} |x_{kl}|\right| \leq \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

Analog $\sum_{\ell=0}^{\infty} T_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$.

Andere Formulierung frei nach Uni Dortmund

Vor: $z_{ij} \in K$ #C#, $i,j \in N$,

$\exists$ Abzählung $((c_i)_{i\in N}$ aller Elemente z_{ij}: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ absolut konvergent.

Aussage:

- Zeilensummen $Z_i = \sum_{j\in N}^{\infty} z_{ij}$ absolut konvergent
- • Spaltensummen $S_j = \sum_{i\in N}^{\infty} z_{ij}$ absolut konvergent
- • • Es gilt $\sum_{i=1}^{\infty} Z_i = \sum_{j=1}^{\infty} S_j = \sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij}$.

//***S2.2.2***(1301) (Monotone Konvergenz)//

//Vor:Sei $(a_n) \subset R$ monoton und beschränkt//

//Beh:$\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$//

//***S3.2.2***(1700)//

//Vor:$(z_n)_{n=0}^{\infty}$//

//Beh://

//1.)Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent//

// $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.//

//***S3.2.5***(1750

//Vor:Sei $(z_\nu)_{\nu=0}^{\infty} \subset C$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| < \infty$.//

//Beh:Für jede Umordnung $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ von $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} |w_\nu| = \sum_{\nu=0}^{\infty} |z_\nu| < \infty$ //

// und $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$.//

//***S3.1.2*** (1602)Vor:$(z_\nu) \subset C$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//

//5.)Für den Reihenrest $R_m := \sum_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu = (\underbrace{\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu \to S} - \underbrace{\sum_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m}) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $m \in N_0$,

// gilt $\lim\limits_{m\to\infty} R_m = 0$

Bew:

- $\forall\ n\in N\ \exists\ N\in N: \sum_{j=1}^{n} |z_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{N} |c_i| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |c_i| \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} |z_{ij}|\right)_{n\in N} \nearrow$ und beschränkt

  $\underset{S2.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}$ absolut konvergent $\underset{S3.2.2}{\underbrace{\Rightarrow}} \sum_{j=1}^{n} z_{ij}$ konvergent

- • Analog •

Bsp Cauchysche Abzählung, i=2, n,k=3, N=8

$(1,1)_1$ $(1,2)_3$ $(1,3)_6$ $(1,4)_{10}$ ….

$(2,1)_2$ $(2,2)_5$ $(2,3)_9$ ….

$(3,1)_4$ $(3,2)_8$ $(3,3)$ …..

$(4,1)_7$ $(4,2)^{)}$ …

Aufzählung entlang Quadranten

$(1,1)_1$ $(1,2)_4$ $(1,3)_9$ $(1,4)$...

$(2,1)_2 \to (2,2)_3$ $(2,3)_8$ $(2,4)$....

$(3,1)_5 \to (3,2)_6 \to (3,3)_7$ $(3,4)$…

$(4,1_{10} \to$ $(4,2)_{11} \to$ $(4,4)$..

- • • Sei $(b_i)_{i\in N}$ Aufzählung entlang Quadranten $\underset{S3.2.5}{\underbrace{\Rightarrow}}$

  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ absolut konvergent: $\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \Rightarrow$

  $$\left|\sum_{i=1}^{k^2} b_i - \sum_{i=1}^{k} Z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{ij}\right| \underset{S1.2.1}{\underbrace{\leq}} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{\infty} |a_{ij}|$$

  $$\leq \sum_{j=k^2+1}^{\infty} |b_j| \overset{\sum_{i=1}^{\infty}|b_i| konvergent,\ S3.1.2}{\overbrace{\underset{k\to\infty}{\underbrace{\to}}}} 0 \Rightarrow$$

  $$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} b_i = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} Z_i = \sum_{i=1}^{\infty} Z_i,\ \text{Analog}\ \sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i=1}^{\infty} S_i.$$

Bsp:

1.) $\sum_{k,l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l}$

//In der numerischen Mathematik bezeichnet Iteration eine Methode,
//sich der exakten Lösung eines Rechenproblems schrittweise
//anzunähern *(sukzessive Approximation)*. Sie besteht in der
//wiederholten // Anwendung desselben Rechenverfahrens.
//Die Ergebnisse eines Schrittes werden als Ausgangswerte des
//jeweils nächsten Schrittes genommen. Die Folge der Ergebnisse muss
//konvergieren. Wenn die Differenz zum vorangegangenen Rechenschritt
//kleiner als der akzeptierte Fehler ist, dann ist das Ergebnis
//hinreichend genau bestimmt, und das Verfahren wird beendet.

Sei $k\geq 2$ fest. $\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l} = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{l+2} = \frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{l} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{1-1/k} = \frac{1}{k^2} \frac{k}{k-1} =$

$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1-k+k}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{N}\right) = 1 \Rightarrow$

iterierte Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l}\right)$ ist absolut konvergent $\underset{S3.2.9}{\Rightarrow}$

$\sum_{k,l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l}$ konvergent & $\sum_{k,l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l} = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{k^l}\right) = 1$

S3.2.9'(1779) Großer Umordnungssatz
(Originalfassung siehe unten „Andere Formulierung")
Vor: J abzählbar unendliche Menge #von Indices#,

Abb in K $j \mapsto a_j$: $\sum_{j\in J} a_j$ absolut konvergent,

Menge J_k, $k\in N$ ist Zerlegung von J.

Aussage: ● $\sum_{j\in J_k} a_j$ absolut konvergent ●● $\sum_{j\in J} a_j=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j\in J_k} a_j\right)$

Bew:● Sei J_k, beliebige Abzählung ⇒ $\sum_{j\in J_k} |a_j| \le \sum_{j\in J} |a_j| \underset{Vor}{\le} K$ ⇒ ●

●● ∀ endliche J_k setze entsprechende $a_j=0$, so, dass J_k abzählbar unendlich wird $\underset{oBdA}{\Rightarrow}$ $J_k=\{(k,\nu):\nu\in N\}$ ⇒ $J=N\times N$ ⇒ $a_{k,\nu}$ statt a_j ⇒

$\sum_{j\in J_k} a_j=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k,\nu}$.

Sei $a=\sum_{j\in J} a_j=\sum_{k,\nu=1}^{\infty} a_{k,\nu}$, $a_k=\sum_{j\in J_k} a_j=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k,\nu}$, $b=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, b=a?

(.)∃ $m(n):|b-\sum_{k=0}^{m} a_k|<\frac{1}{n}$ ∀ $m\ge m(n)$. oBdA $m(n)\uparrow$.

(..)∃ $\mu(n):|\sum_{k=1}^{m(n)}(a_k-\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{k\nu})|<\frac{1}{n}$ ∀ $\mu\ge\mu(n)$. oBdA $\mu(n)\uparrow$.

(.)und(..) $\#|b-\sum_{k=0}^{m(n)} a_k+\sum_{k=1}^{m(n)}(a_k-\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{k\nu})|<|b-\sum_{k=0}^{m(n)} a_k|+|\sum_{k=1}^{m(n)}(a_k-\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{k\nu})|<\frac{2}{n}$

$\Rightarrow |b-\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=0}^{\mu(n)} a_{k\nu}|<\frac{2}{n}$ ∀ $n\in N$????⇒

$\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=0}^{\mu(n)} a_{k\nu}$ sind Partialsummen einer speziellen Abzählung von $J=N\times N$

$Vor: \sum_{j\in J} a_k$ *absolut konvergent* ⇒ *unbedingt konvergent* ⇒ $\sum_{k,\nu\in N} a_{k\nu}=a$ *unbedingt konvergent* $\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=0}^{\mu(n)} a_{k\nu} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$ ⇒ a=b

Andere Formulierung:

Sei J eine abzählbar unendliche Menge und seien J_k, $k\in\mathbb{N}$, eine Zerlegung von J. Sei ferner $j\mapsto a_j$ eine Abb von J in $\mathbb{K}$, so, dass $\sum_{j\in J} a_j$ <u>absolut</u> konvergent ($\sum_{j\in J} |a_j|<\infty$).

Dann konvergieren auch alle (*) $\sum_{j\in J_k} a_j$, $j\in J_k$ absolut und es gilt

$$(**)\quad \sum_{j\in J} a_j=\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{j\in J_k} a_j\Big)$$

Bew: (*) Die absolute Konvergenz der $\sum_{j\in J_k} a_j$ folgt, da (bei einer beliebigen Wahl einer Abzählung von J_k) die Partialsummen von $\sum_{j\in J_k} |a_j|$ niemals größer als $\sum_{j\in J} |a_j|$ sein können.

(**) Falls einige der Mengen J_k endlich sind, können wir sie vergrößern und die entsprechenden $a_j=0$ setzen. Deshalb sei für den Beweis angenommen, daß alle J_k abzählbar unendlich sind und dann können wir oBdA annehmen, daß $J_k=\{(k,\nu):\nu\in\mathbb{N}\}$, also $J=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ist. Wir schreiben dann besser $a_{k,\nu}$ statt a_j sodaß auf der linken Seite von (**) eine Doppelreihe steht, während $\sum_{j\in J_k} a_j=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k,\nu}$ ist.

Sei $a=\sum_{j\in J} a_j=\sum_{k,\nu\in\mathbb{N}} a_{k,\nu}$, $a_k=\sum_{j\in J_k} a_j=\sum_{\nu\in\mathbb{N}} a_{k,\nu}$, $b=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ gesetzt, dann ist zu zeigen, dass $b=a$ ist. Dazu sei ein $n\in\mathbb{N}$ betrachtet. Dann gilt

$|b-\sum_{k=0}^{m} a_k|<1/n$, wenn nur m groß genug ist und wir wählen ein $m(n)$ aus.

ObdA können wir dieses $m(n)$ als streng monoton wachsend annehmen.

Weiter gilt $|\sum_{k=1}^{m(n)} (a_k-\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{k,\nu})|<1/n$, wenn nur μ genügend groß ist und wir wählen wieder ein $\mu(n)$ aus, und zwar ebenfalls streng monoton wachsend. Somit folgt

$$\#\left|b-\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=1}^{\mu(n)} a_{k\nu}\right|=\Big|b-\sum_{k=1}^{m(n)} a_k+\sum_{k=1}^{m(n)} a_k-\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{k,\nu}\Big|\le\Big|b-\sum_{k=1}^{m(n)} a_k\Big|+\Big|\sum_{k=1}^{m(n)} a_k-\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{k,\nu}\Big|$$

$$<2/n$$

$$\left|b-\sum_{k=1}^{m(n)}\sum_{\nu=1}^{\mu(n)} a_{k\nu}\right|<2/n \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Die rechtsstehenden Summen sind aber gewisse Partialsummen einer speziellen Abzählung der Elemente von $J=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ und deshalb folgt aus der unbedingten Konvergenz von $a=\sum_{k,\nu\in\mathbb{N}} a_{k,\nu}$, dass diese Summen für $n\to\infty$ gegen a streben müssen. Daraus folgt aber $a=b$.

Bem:1.) Es darf $S=\pm\infty$ gesetzt werden.

2.) Ist eine Doppelsumme $\sum\limits_{\ell,k=1}^{\infty} a_{k_\ell}$ absolut konvergent, dann darf die Summationsreihenfolge vertauscht werden.

S3.2.10 (1781) Vertauschung von Grenzwerten

Vor: Seien Zahlen $a_{nk}\in K$ $\forall$ $n,k\geq 0$ gegeben, derart dass folgendes gilt:

a) $\exists$ $b_k\in R_+$, für die gilt: $|a_{nk}|\leq b_k$ $\forall$ $n,k\geq 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k<\infty$.

b) Für jedes feste $k\geq 0$ ist die Folge $(a_{nk})_{n=0}^{\infty}$ konvergent und der Grenzwert sei mit a_k bezeichnet.

Aussage: • $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, für jedes $n\geq 0$, und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent* und es gilt

•• $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$.

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}, (w_n)_{n=0}^{\infty}\subset C$, $b_n\geq 0$, $n\in N_0$.//*

//2.) Majkrit $|z_n|\leq b_n$ $\forall$ $n\geq n_0$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent//

*//**S3.1.2** (1602) Vor: $(z_\nu)\subset C$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//*

//5.) Für den Reihenrest $R_m:=\sum\limits_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu=(\underbrace{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu\to S}-\underbrace{\sum\limits_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m})\xrightarrow{m\to\infty} 0$, $m\in N_0$,

// gilt $\lim\limits_{m\to\infty} R_m=0$

*//**S3.2.2** (1700) Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty}, (w_n)_{n=0}^{\infty}\subset C$, $b_n\geq 0$, $n\in N_0$.//*

//2.) Majkrit $|z_n|\leq b_n$ $\forall$ $n\geq n_0$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent//

*//**S3.1.2** (1602) Vor: $(z_\nu)\subset C$ und $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$ konvergent.//*

//5.) Für den Reihenrest $R_m:=\sum\limits_{\nu=m+1}^{\infty} z_\nu=(\underbrace{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} z_\nu}_{S_\nu\to S}-\underbrace{\sum\limits_{\nu=0}^{m} z_\nu}_{=S_m})\xrightarrow{m\to\infty} 0$, $m\in N_0$, gilt $\lim\limits_{m\to\infty} R_m=0/$

Bew:*

$$\begin{array}{cccccc}
 & |\,| \le b_{\underset{=1}{k}} & & |\,| \le b_{\underset{=m}{k}} & |\,| \le b_k \ldots\ldots & \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k<\infty \\
a_{00} & a_{01} & a_{02}\ldots & a_{0m}\ldots & a_{0k}\ldots & \\
a_{10} & a_{11} & a_{12}\ldots & a_{1m}\ldots & a_{1k}\ldots & \\
a_{20} & a_{21} & a_{22}\ldots & a_{2m}\ldots & a_{2k}\ldots & \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{\underset{=2}{n}\,k} \ \text{absolut konv} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n0} & a_{n1} & a_{n2}\ldots & a_{nm}\ldots & a_{nk}\ldots & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
a_{n\underset{=0}{k}} & a_{nk=1} & a_{nk=m}\ldots & a_{nk}\ldots\ldots & \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk} \ \text{abs konv} \ \forall\, n \\
\downarrow_{n\to\infty} & \downarrow_{n\to\infty} & \downarrow_{n\to\infty} & \downarrow_{n\to\infty} & \\
a_{\underset{=0}{k}} & a_{\underset{=1}{k}} & a_{\underset{=m}{k}} & a_k\ldots\ldots & = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \ \text{abs konv}
\end{array}$$

gelb sind Bedingungen, rot und grün Aussagen

- $|a_{nk}| \le b_k \underset{n\to\infty}{\Rightarrow} |a_k| \le b_k, \ \forall\ k\ge 0 \underset{S3.2.2.2.)}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergieren absolut.

- • Geg. $\varepsilon>0$ und $m\in\mathbb{N}$ so groß, dass Reihenrest $\sum\limits_{k=m}^{\infty} b_k \underset{S3.1.2.5.)}{<} \varepsilon \Rightarrow$

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(a_{nk}-a_k)\right| \le \left|\sum_{k=0}^{m-1}(a_{nk}-a_k)\right| + \sum_{k=m}^{\infty}(|a_{nk}|+|a_k|) \le \left|\sum_{k=0}^{m-1}\underbrace{(a_{nk}-a_k)}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}\right| + \underbrace{2\sum_{k=m}^{\infty} b_k}_{<2\varepsilon}.$$

Der 2. Term auf der rechten Seite ist höchstens gleich 2ε und zwar für alle $n\ge 0$, während der 1. Term eine Summe von <u>endlich</u> vielen Nullfolgen (für $n\to\infty$), also selber eine Nullfolge ist. Deshalb gibt es ein N derart, daß für alle $n>N$ die rechte Seite kleiner als 3ε ausfällt. Daher muß auch die linke Seite für $n\to\infty$ eine Nullfolge sein.

Als eine Anwendung S3.2.10 beweisen wir folgende Reihendarstellung für die Expotentialfunktion einer reellen Veränderlichen.

D3.2.5(1782) Expotentialfunktion für komplexe Zahlen:

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! \quad \forall\ z\in\mathbb{C}.$$

S3.2.11 (1783) Expotentialreihe

- Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ ist für alle $z\in\mathbb{C}$ absolut konvergent.

•• $\forall\ z\in\mathbb{R}$ gilt weiter $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!=\exp(z)=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n$.

//***S3.2.2*** *(1700) Vor:* $(z_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$.//

//5.) Quotientenkriterium $z_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0$ *und* $\exists\ 0<q<1$ *mit//*

// $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq q\ \forall\ n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$. $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\geq 1\ \forall\ n\geq n_2 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|=\infty$//

//***S1.7.4*** *(906)* $\alpha\in\mathbb{C}$ ' $n,m,k\in\mathbb{N}_0$, $j\in\mathbb{N}$://

//6.) $\forall\ z\in\ \mathbb{C}$ ' $n\in\mathbb{N}_0$: $(1+z)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k$//

//***S3.2.10*** *(1790) Seien Zahlen* $a_{nk}\in\mathbb{K}\ \forall\ n,k\geq 0$ *gegeben, derart daß folgendes//*
// gilt: //

// a) $\exists\ b_k\in\mathbb{R}_+$, *für die gilt:* $|a_{nk}|\leq b_k\ \forall\ n,k\geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} b_k<\infty$.//

// b) Für jedes feste $k\geq 0$ *ist die Folge* $(a_{nk})_{n=0}^{\infty}$ *konvergent und der//*
// Grenzwert sei mit a_k *bezeichnet.//*

*// Dann sind** $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$, *für jedes* $n\geq 0$, *und* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *absolut konvergent und es gilt*

// $\quad ^{**}\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}=\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.//

Bew: • $\left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right|=\left|\frac{z^{k+1}k!}{z^k(k+1)!}\right|=\frac{|z|}{k+1}\underset{k\to\infty}{\leq} 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$ absolut konvergent.

•• Sei $(1+z/n)^n=\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}$ mit $a_{nk}=0$ für $k>n$ bzw

$$a_{nk}\underset{S1.7.4\,6.)}{=}\binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k=\frac{z^k}{k!}\underbrace{\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k}}_{<1}\#=\frac{z^k}{k!}*\overbrace{\underbrace{1*(1-\frac{1}{n})\ldots(1-\frac{k+1}{n})}_{\underset{n\to\infty}{\to}1}}^{<1}\quad(0\leq k\leq n)\Rightarrow$$

$|a_{nk}|\leq|z^k|/k!\ (=b_k)$ und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k=\sum_{k=0}^{\infty}|z^k|/k!$ konvergiert absolut.

Außerdem ist $a_k=\lim_{n\to\infty}a_{nk}=z^k/k!$ für jedes feste $k\in\mathbb{N}_0$.
Deshalb folgt die Beh aus S3.2.10

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k=\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!\underset{S3.2.6}{=}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}=\lim_{n\to\infty}(1+z/n)^n.$$

S3.2.12 (1783) Ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so sind es auch die Reihen

$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$ und es gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}+\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$.

Bew: S3.2.9' bzw S3.2.9 mit $J_1=\{2n:n\geq 0\}$, $J_2=\{2n+1: n\geq 0\}$ und $J_k=\emptyset$ sonst.

D3.2.6(1784) Für Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ in $\mathbb{K}$ heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

$c_k=\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j=\sum_{j=0}^{k} b_{k-j}a_j \ \forall\ k\geq 0$ das Cauchy-Produkt der Ausgangsreihen.

Bsp: $k=4$

j \ k	0	1	2	3	4
0					a_0b_4
1				a_1b_3	
2			a_2b_2		
3		a_3b_1			
4	a_4b_0				

$$c_4=\sum_{j=0}^{4} a_{k-j}b_j$$

S3.2.13(1784) Cauchy-Produktsatz

Vor: Seien $(z_n),(w_n)\subset\mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|<\infty$ abs konv, $\sum_{n=0}^{\infty} |w_n|<\infty$ abs konv.

Beh: Ordnet man alle Produkte z_jw_k, $j,k\in\mathbb{N}_0$ in einer Folge $(P_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ an #wie z.B unten nach 2.)#, so gilt

1.) $\sum_{\ell=0}^{\infty} |P_\ell|=(\sum_{j=0}^{\infty} |z_j|)(\sum_{k=0}^{\infty} |w_k|)$ und $\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell=(\sum_{j=0}^{\infty} z_j)(\sum_{k=0}^{\infty} w_k)$

2.) Speziell gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{j=0}^{n} z_jw_{n-j})=\lim_{n\to\infty}(\sum_{j=0}^{n} z_j)(\sum_{k=0}^{n} w_k)=(\sum_{j=0}^{\infty} z_j)(\sum_{k=0}^{\infty} w_k).$$

$$\begin{array}{lllll}
z_0w_0 & z_0w_1 & z_0w_2 & z_0w_3 & \ldots\ldots \\
z_1w_0 & z_1w_1 & z_1w_2 & z_1w_3 & \ldots\ldots \\
z_2w_0 & z_2w_1 & z_2w_2 & z_2w_3 &
\end{array}$$

Gilt nicht, $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$, $\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ wenn konvergent, aber nicht abs konverget

Andere Formulierung:

Vor: $(z_n),(w_n)\subset \mathbb{C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}|w_n|<\infty$.

Beh: Dann ist mit $c_k=\sum_{\nu=0}^{k} z_\nu w_{k-\nu}$, $k\in\mathbb{N}$, die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$

absolut konvergent und es gilt: $\sum_{k=0}^{\infty} c_k=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\right)\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\right)$.

*//**S2.2.2**(1301) (Monotone Konvergenz)//*

//Vor:Sei $(a_n)\subset\mathbb{R}$ monoton und beschränkt//

//Beh:$\exists \lim_{n\to\infty} a_n$//

*//**S1.2.1**(406) Vor: K sei angeordneter Körper und $a,b\in K$//*

// Beh:1.)$|a|=|-a|$

// 6.)$|a+b|\le|a|+|b|$ (Dreiecksungleichung)//

*//(900)**Idenditäten:** 9.)* $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$ *//*

Zunächst eigener Versuch, da mir der aufgezeichnete Bew nicht
verständlich ist

#Bew:Es gilt $\sum_{k=0}^{n}|c_k|=\sum_{k=0}^{n}\left|\sum_{\nu=0}^{k} z_\nu w_{k-\nu}\right| \underset{S1.2.1}{\le} \sum_{\nu=0}^{k}|z_\nu|\sum_{k=0}^{n}|w_{k-\nu}|\le\sum_{\nu=0}^{k}|z_\nu|\sum_{k=0}^{\infty}|w_k|\le$

$\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu|\sum_{k=0}^{\infty}|w_k|<\infty \underset{S2.2.2}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ ist absolut konvergent und es gilt:

$\left|\sum_{k=0}^{2n}\sum_{\nu=0}^{k} z_\nu w_{k-\nu}-\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\right| \underset{Idenditäten}{=} \left|\sum_{\nu=0}^{2n} z_\nu\sum_{k=\nu}^{2n} w_{k-\nu}-\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu\sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu\right|=$

$\left|-\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\sum_{\mu=2n}^{2n-\nu+1} w_\mu-\sum_{\nu=n+1}^{2n} z_\nu\sum_{\mu=n}^{2n-\nu+1} w_\mu-\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu\sum_{\mu=2n+1}^{\infty} w_\mu-\sum_{\nu=2n+1}^{\infty} z_\nu\sum_{\mu=n}^{n} w_\mu-\sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu\sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu\right|=$

$\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\sum_{\mu=2n}^{2n-\nu+1} w_\mu+\sum_{\nu=n+1}^{2n} z_\nu\sum_{\mu=n}^{2n-\nu+1} w_\mu+\sum_{\nu=0}^{n} z_\nu\sum_{\mu=2n+1}^{\infty} w_\mu+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty} z_\nu\sum_{\mu=0}^{n} w_\mu+\sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu\sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu\right|\le$

$\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu|\sum_{\mu=2n}^{2n-\nu+1}|w_\mu|+\sum_{\nu=n+1}^{2n}|z_\nu|\sum_{\mu=n}^{2n-\nu+1}|w_\mu|+\sum_{\nu=0}^{n}|z_\nu|\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}|w_\mu|+\sum_{\nu=2n+1}^{\infty}|z_\nu|\sum_{\mu=0}^{n}|w_\mu|+$

$\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|z_\nu|\sum_{\mu=n+1}^{\infty}|w_\mu|$

$\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu|\sum_{\mu=2n}^{2n-\nu+1}|w_\mu|$, $\sum_{\nu=n+1}^{2n}|z_\nu|\sum_{\mu=n}^{2n-\nu+1}|w_\mu|$ endlich viele Summanden mit

$|z_\nu|,|w_\mu| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

$\sum_{\nu=0}^{n}|z_\nu|\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}|w_\mu|+\sum_{\mu=2n+1}^{\infty}|z_\nu|\sum_{\mu=0}^{n}|w_\mu|+\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|z_\nu|\sum_{\mu=n+1}^{\infty}|w_\mu| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Reihenreste konvergenter Reihen

#Bsp:n=3

# k ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	....
# n= 0	z_0w_0	z_0w_1	z_0w_2	z_0w_3	z_0w_4	z_0w_5	z_0w_6	z_0w_7	z_0w_8	....
# 1	z_1w_0	z_1w_1	z_1w_2	z_1w_3	z_1w_4	z_1w_5	z_1w_6	z_1w_7	z_1w_8	....
# 2	z_2w_0	z_2w_1	z_2w_2	z_2w_3	z_2w_4	z_2w_5	z_2w_6	z_2w_7	z_2w_8	....
# n= 3	z_3w_0	z_3w_1	z_3w_2	z_3w_3	z_3w_4	z_3w_5	z_3w_6	z_3w_7	z_3w_8	....
# 4	z_4w_0	z_4w_1	z_4w_2	z_4w_3	z_4w_4	z_4w_5	z_4w_6	z_4w_7	z_4w_8	...
# 5	z_5w_0	z_5w_1	z_5w_2	z_5w_3	z_5w_4	z_5w_5	z_5w_6	z_5w_7	z_5w_8	...
#2n= 6	z_6w_0	z_6w_1	z_6w_2	z_6w_3	z_6w_4	z_6w_5	z_6w_6	z_6w_7	z_6w_8	...
# 7	z_7w_0	z_7w_1	z_7w_2	z_7w_3	z_7w_4	z_7w_5	z_7w_6	z_7w_7	z_7w_8	...
# .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	
# .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	

Bew:Es gilt $\sum_{k=0}^{n}|c_k| = \sum_{k=0}^{n}|\sum_{\nu=0}^{k} z_\nu w_{k-\nu}| \underset{S1.2.1}{\leq} \sum_{\nu=0}^{k}|z_\nu|\sum_{k=0}^{n}|w_{k-\nu}| \leq \sum_{\nu=0}^{k}|z_\nu|\sum_{k=0}^{\infty}|w_k| \leq$

$\sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu|\sum_{k=0}^{\infty}|w_k| < \infty \underset{S2.2.2}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty}|c_k|$ ist absolut konvergent und es gilt:

$|\sum_{k=0}^{2n}\sum_{\nu=0}^{k} z_\nu w_{k-\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu| \underset{Idenditäten}{=} |\sum_{\nu=0}^{2n} z_\nu \sum_{k=\nu}^{2n} w_{k-\nu} - \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu| =$

\# $|\sum_{\nu=0}^{2n} z_\nu \sum_{\mu=0}^{2n-\nu} w_\mu - \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \sum_{\mu=0}^{n} w_\mu - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu - \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu| \leq$ #

\# $|\sum_{\nu=0}^{2n} z_\nu \sum_{\mu=0}^{2n-\nu} w_\mu - \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \sum_{\mu=0}^{n} w_\mu - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu - \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu| + |\sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu| \leq$ #

$|\sum_{\nu=0}^{2n} z_\nu \sum_{\mu=0}^{2n-\nu} w_\mu - \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu \sum_{\mu=0}^{n} w_\mu - \sum_{\nu=n+1}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu - \sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu \sum_{\mu=n+1}^{\infty} w_\mu| \leq \leq$

$(\sum_{\nu=n+1}^{\infty}|z_\nu|\sum_{\mu=0}^{\infty}|w_\mu| + \sum_{\nu=0}^{\infty}|z_\nu|\sum_{\mu=n+1}^{\infty}|w_\mu|) * 2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(Reihenrest konvergierender Reihe)

Bsp:n=3

k \ ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	z_0w_0	z_0w_1	z_0w_2	z_0w_3	z_0w_4	z_0w_5	z_0w_6	$\underline{z_0w_7}$	$\underline{z_0w_8}$
1	z_1w_0	z_1w_1	z_1w_2	z_1w_3	z_1w_4	z_1w_5	$\underline{z_1w_6}$	$\underline{z_1w_7}$	$\underline{z_1w_8}$
2	z_2w_0	z_2w_1	z_2w_2	z_2w_3	z_2w_4	$\underline{z_2w_5}$	$\underline{z_2w_6}$	$\underline{z_2w_7}$	$\underline{z_2w_8}$
n= 3	z_3w_0	z_3w_1	z_3w_2	z_3w_3	$\underline{z_3w_4}$	$\underline{z_3w_5}$	$\underline{z_3w_6}$	$\underline{z_3w_7}$	$\underline{z_3w_8}$
4	z_4w_0	z_4w_1	z_4w_2	$\underline{z_4w_3}$	z_4w_4	z_4w_5	z_4w_6	z_4w_7	z_4w_8
5	z_5w_0	z_5w_1	$\underline{z_5w_2}$	$\underline{z_5w_3}$	z_5w_4	z_5w_5	z_5w_6	z_5w_7	z_5w_8
2n= 6	z_6w_0	$\underline{z_6w_1}$	$\underline{z_6w_2}$	$\underline{z_6w_3}$	z_6w_4	z_6w_5	z_6w_6	z_6w_7	z_6w_8
7	$\underline{z_7w_0}$	$\underline{z_7w_1}$	$\underline{z_7w_2}$	$\underline{z_7w_3}$	z_7w_4	z_7w_5	z_7w_6	z_7w_7	z_7w_8

Bem:1.)S3.2.12 2.) gilt nicht wenn $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} w_n$ konvergieren, aber nicht absolut konvergieren.

Andere Formulierung frei nach Skript Uni Greifswald

Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{z_n}_{\in C}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{w_n}_{\in C}$ absolut konvergent,

Aussage: $\sum_{i,j=0}^{\infty} z_i w_j = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{d_n}_{=\sum_{i=0}^{n} z_i w_{n-i}} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} z_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j\right)$

//2.) Cauchysche Abzählung//

(0,0)$^{(0)}$ (0,1)$^{(2)}$ (0,2)$^{(5)}$ (0,3)$^{(9)}$ ….

(1,0)$^{(1)}$ (1,1)$^{(4)}$ (1,2)$^{(8)}$ ….

(2,0)$^{(3)}$ (2,1)$^{(7)}$ (2,2)$^{(11)}$ …..

(3,0)$^{(6)}$ (3,1)$^{(10)}$ …

// Bijektive Abb f: $N_0 \to N_0^2$ mit f(0):=(0,0). Ist f(j)=(k,l) ⇒ //

// $f(j) := \begin{cases} (k-1, l+1) & \text{für } k \neq 0 \\ (l+1, 0) & \text{für } k = 0 \end{cases}$. //

//Vor Doppelreihensatz Uni Greifswald siehe oben: //

//$z_{ij} \in C$; $i,j \in N$, f: $N \to N \times N$ bijektiv, ∃ K∈R ∀ endliche $M \subset N \times N$: $\sum_{(i,j)\in M} |z_{ij}| \leq K$.//

*//**S3.2.2** (1700)//*

//Vor: $(z_n)_{n=0}^{\infty} \subset C$ Beh:1.) $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent ⇒ $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ konvergent.//

*//**S3.1.2** (1602) Rechenregeln und Konvergenzkriterien für unendliche Reihen*

//Vor: Seien (z_ν), $(w_\nu) \subset C$ und $\sum_{\nu=0}^{\infty} z_\nu$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu$ konvergent.//

// 6.) Ist $(n_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $n_0 := 0$, $n_k < n_{k+1}$, $k \in N_0$ eine Teilfolge von //

// $(n)_{n=0}^{\infty}$ und setzt man $c_\nu := \sum_{k=n_\nu}^{n_{\nu+1}-1} z_k$, $\nu \in N_0$, (zwischen n_ν und $n_{\nu+1}$//

// gibt es einige n_k) so konvergiert die unendliche Reihe //

// $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu$ und es gilt $\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} z_k$ (d.h. in konvergenten Reihen//

// darf man beliebig Klammern setzen).//

Bew: Vor ⇒ $K := \left(\sum_{i=0}^{\infty} |z_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |w_j|\right) \underbrace{\Rightarrow}_{M \subset N \times N \text{ endlich}} \exists\, n_0$: $M \subset \{0,\dots,n_0\} \times \{0,\dots,n_0\}$:

$$\sum_{(i,j)\in M} |z_i w_j| \leq \left(\sum_{i=0}^{n_0} |w_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n_0} |z_j|\right) \leq K \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.2} \sum_{(i,j)\in M} z_i w_j < \infty \text{ und definiert } \Rightarrow$$

$$\exists\, K \in R \ \forall\, M \subset N \times N,\ M \text{ endlich: } \sum_{(i,j)\in M} \Big|\underbrace{c_{ij}}_{:= z_i w_j}\Big| \leq K \Rightarrow \text{Vor S3.2.9 erfüllt} \underbrace{\Rightarrow}_{S3.2.9}$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} z_j w_k = \sum_{k=0}^{\infty} c_{f(k)} = \underbrace{z_0 w_0}_{d_0} + \underbrace{z_0 w_1 + z_1 w_0}_{d_1} + \underbrace{z_0 w_2 + z_1 w_1 + z_2 w_0}_{d_2} + \dots \text{ konvergent } \underbrace{\Rightarrow}_{S3.1.2\,6.)}$$

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} z_j w_k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \underbrace{=}_{S3.2.9} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} z_i w_j \underbrace{=}_{S3.2.9} \sum_{i=0}^{\infty} \left(z_i \sum_{j=0}^{\infty} w_j\right) \underbrace{=}_{S3.2.9} \left(\sum_{i=0}^{\infty} z_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} w_j\right)$$

Andere Formulierung:

Bew:Wende S3.2.9 an auf $z_{jk}=z_j w_k$, $j,k\in\mathbb{N}_0$,

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}|z_{jk}|=\sum_{j=0}^{n}|z_j|\sum_{k=0}^{n}|w_k|\le\left(\sum_{j=0}^{\infty}|z_j|\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}|w_k|\right)=:M\in\mathbb{R}\underset{S3.2.9}{\Rightarrow}\text{Beh}$$

Andere Formulierung

//**D3.2.6**(1784)Für Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ in $\mathbb{K}$ heißt die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit

// $c_k=\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}b_j=\sum_{j=0}^{k} b_{k-j}a_j$ $\forall$ $k\ge 0$ das Cauchy-Produkt der//

// Ausgangsreihen.//

Sind die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ beide absolut konvergent

und gilt D3.2.6, so folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k=\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

Bew:Die Doppelreihe $\sum_{n,m=0}^{\infty} a_n b_m$ ist wegen $\sum_{n,m=0}^{N}|a_n b_m|\le\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}|b_m|\right)$
absolut konvergent. Wendet man den großen Umordnungssatz#(bzw S3.2.9) auf die Mengen $J_k=\{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:n+m=k\}$ an, so sieht man, dass der Wert der Doppelreihe gleich $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ist. Andererseits folgt für $J_k=\{(k,m):m\in\mathbb{N}\}$ dass der Wert auch gleich dem Produkt der Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist.

//***S3.1.4*** *(1605) Vor:* $(a_n)\subset\mathbb{R}, a_n\searrow 0\ (n\to\infty)$.//

// *Beh:* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n=a_0-a_1+a_2-a_3+-\ldots$ *ist konvergent.* //

Bsp:1.) $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ $\underset{S3.1.4}{\Rightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergent.

$$\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(-1)^{n-j}}{\sqrt{j+1}\sqrt{n-j+1}}=(-1)^n\underbrace{\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{n-j+1}}}_{\text{geht nicht gegen }0},$$

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{j+1}\sqrt{n-j+1}}\ge\frac{n+1}{\underbrace{\sqrt{n+1}}_{>\sqrt{j+1}}\underbrace{\sqrt{n+1}}_{>\sqrt{n-j+1}}}=1\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}a_j b_{n-j}\text{ divergent}$$

2.) $z\in\mathbb{C}$, $|z|<1$, $\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\frac{1}{1-z}=\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^k\right)=$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}a_j b_{n-j}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}z^j z^{n-j}\right)=\#\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}z^n z^{j-j}\right)\#=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left(\sum_{j=0}^{n}1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

3.) • sin x*sin x′=$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k!}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{2k}{l}$ x^l(x′)$^{2k-l}$ ∀ x,x‘∈R.

sin x*sin x′=($\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{a_k}$) ($\sum_{l=0}^{\infty}\underbrace{(-1)^l\frac{(x')^{2l+1}}{(2l+1)!}}_{b_l}$) =

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!}(-1)^{n-l}\frac{(x')^{2(n-l)+1}}{(2(n-2)+1)!}\underbrace{=}_{2l+1=m\ldots ungerade}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\sum_{m-1}^{2n+1}\frac{x^m(x')^{2(n+1)-m}}{m!(2(n+1)-m)!}=$$

Nebenrechnung:2(n-l)+1=2n- $\underbrace{2l-1}_{-m}$ +2=2n-m+2=2(n+1)-m

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sum_{m-1,m\,ungerade}^{2n-1}\frac{x^m(x')^{2n-m}}{m!(2n-m)!}\underbrace{=}_{m\to l}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{l=1,l\,ungerade}^{2n-1}\binom{2n}{l}x^l(x')^{2n-l}.$$

• • cos(x+x‘)=cos x‘*cos x- sinx*sin x‘

• • • cos x*cos x‘= $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{l=0,l\,gerade}^{2n}\binom{2n}{l}$ x^l(x‘)$^{2n-l}$.

• • • • cos x*cos x‘-sin x‘*sin x= $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{l=0}^{2n}\binom{2n}{l}$ x^l(x‘)$^{2n-l}$ $\underbrace{=}_{*}$

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ (x+x′)^{2n}=cos(x+x′)

sin(x+x′)=sin x*cos x′+cos x*sin x′