S4.3.5 (2450)

Vor: Die PR $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR R>0.

Aussage: $f(z)$ ist stetig in jedem Punkt $U_R(z_0)$.

Ausarbeitung in Ahnlehnung an Protokolle usw, Skizze Seite 2451

//***S3.5.7*** *(2053)//*

//Vor: Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *habe KR R>0. Sei* $\overset{*}{z_0}$ *mit* $|z_0-\overset{*}{z_0}|=r<R$*//*

// fest gewählt.//

//Beh: $\forall\ z\in\mathbb{C}$ *mit* $|z_0-\overset{*}{z_0}|<R-r$ *gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-\overset{*}{z_0})^n$*,//*

// wobei $\forall\ k\in\mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(\overset{*}{z_0}-z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert

// Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$

//**D1.7.1**(905) 2.) $\binom{\alpha}{n}:=\dfrac{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+1-k)}{n!}=\begin{cases}1 & \text{für } n=0\\ \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\end{cases}, n\in\mathbb{N}'$, $\alpha\in\mathbb{C}$

Bew: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)(z-z_0)^n \underbrace{\overset{S3.5.7}{=}}_{\text{Umentws}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-\overset{*}{z_0})^k$, absolut konvergent $\forall\ |z-\overset{*}{z_0}|<R-r:=\Delta$, $r<R$

$(b_k=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(\overset{*}{z_0}-z_0)^{\nu-k})$, $b_0=\sum_{\nu=0}^{\infty}\underbrace{\binom{\nu}{0}}_{=1}\overset{D1.7.1}{}a_\nu(\overset{*}{z_0}-z_0)^{\nu-0}=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\overset{*}{z_0}-z_0)^{\nu}=f(\overset{*}{z_0})$

$\Rightarrow$ Für $\rho<\Delta$: $\sum_{k=0}^{\infty}|b_k\underbrace{\rho}_{>0}{}^k|=\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|\rho^k$ konvergent

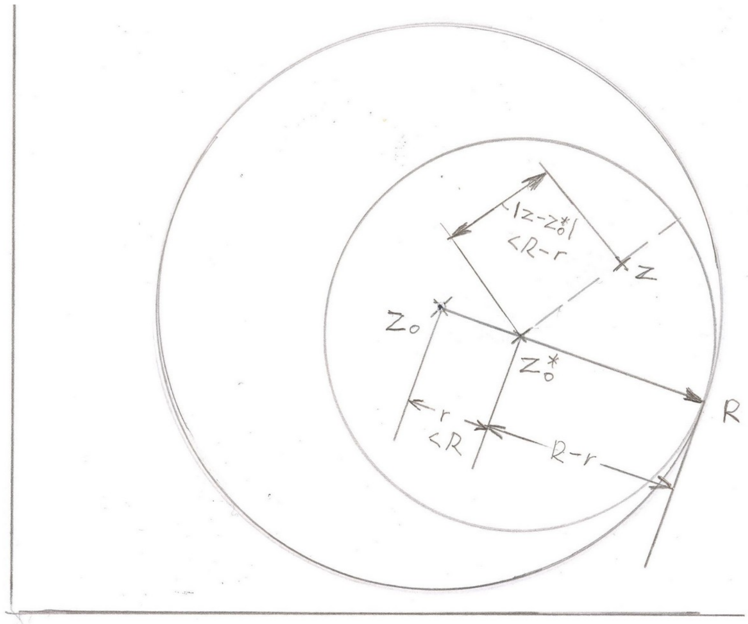
$\Rightarrow\ \exists\ S:=\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|\rho^{k-1}$ für $\rho<\Delta$, da auch hier $R-r=1/\overline{\lim_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|b_k|}=\Delta$

$\Rightarrow\ |f(z)-\underbrace{b_0}_{=f(\overset{*}{z_0})}|=|\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-\overset{*}{z_0})^k-b_0(z-\overset{*}{z_0})^0|=|\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z-\overset{*}{z_0})^k|=$

$|(z-\overset{*}{z_0})\sum_{k=1}^{\infty}b_k(z-\overset{*}{z_0})^{k-1}|\le|z-\overset{*}{z_0}|*S$ für $|z-\overset{*}{z_0}|\le\rho$

$\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(z)-f(\overset{*}{z_0})|\le|z-\overset{*}{z_0}|*S<\varepsilon=\frac{\varepsilon}{S}*S\ \ \forall\ z\in D\ \&\ |z-\overset{*}{z_0}|<\delta<\frac{\varepsilon}{S}<\rho<\Delta$

$\Rightarrow$ Aussage



//**D4.3.1**(2400)

//f: $\mathbb{R}\supset D\to\mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $x_0\in D$

//:⇔ $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0$ mit $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\ \forall\ x\in D$ mit $|x-x_0|<\delta$.

// f heißt stetig auf $A\subset D$:⇔ f ist in jedem $x_0\in A$ stetig.

Andere Formulierung aus Protokollen:

*//**S3.5.7**(2053)//*

//Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR R>0. Sei z_0^* mit $|z_0-z_0^*|= r<R$//

// fest gewählt.//

//Beh: $\forall z\in\mathbb{C}$ mit $|z_0-z_0^*|<R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^n$,//

// wobei $\forall\ k\in\mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert//

Bew: $f(z)-f(z_0)=f(z)-\underbrace{\overbrace{a_0}^{(z_0-z_0)^0=1}}_{=\sum(z_0-z_0)^n}=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\ \forall\ z\in U_R(z_0)$,

$f(z)-f(z_0)=(z-z_0)\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)(z-z_0)^{n-1}$(abs Konvgt für $|z-z_0|\le\underbrace{\rho}_{Kreis\,r=\rho}<R$) ⇒

$|f(z)-f(z_0)|\le|z-z_0|\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\underbrace{\rho^{n-1}}_{\text{Abschätzung}}}_{\text{konvergent}}=|z-z_0|k_\rho$,

$|f(z)-f(z_0)|\le|z-z_0|k_\rho<\varepsilon\ \ \forall\ |z-z_0|<\delta=\frac{\varepsilon}{k_\rho}\ \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.7}\ f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n=$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^k\ \forall\ z\in U_{R-r}(z_0^*),|z_0^*-z_0|=r>0\Rightarrow f(z)$ ist stetig in z_0^*

Andere Formulierung (Bew):

*//**S3.5.7** (2053)//*

//Vor: Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR $R>0$. Sei z_0^* mit $|z_0-z_0^*|=r<R$//

// fest gewählt.//

//Beh: $\forall z\in \mathbb{C}$ mit $|z_0-z_0^*|<R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^n$,//

// wobei $\forall\, k\in \mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert//

Bew: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)(z-z_0)^n \underbrace{\overset{S3.5.7}{=}}_{\text{Umentws}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_1)^k$ mit

$$b_k=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_1-z_0)^{\nu-k},\ k\in\mathbb{N}_0, \text{ insbesondere } b_0=f(z_1) \Rightarrow$$

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_1)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_1)^k \underbrace{\longrightarrow}_{S4.3.4}$$

$$b_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu a_\nu(z_1-z_0)^{\nu-k}\ (z\to z_1)$$

$(\ldots g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_1)^k$ ist stetig im inneren des Kreises $\Rightarrow$

$g(z)\to g(z_1)=b_1\ (z\to z_1))$

Bsp: Stetige Funktionen sind e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$, auf $\mathbb{C}$, $\tan z\ \forall z\in\mathbb{C}$ mit $\cos z\neq 0$, $\cot z\ \forall z\in\mathbb{C}$ mit $\sin z\neq 0$, $\tanh z\ \forall z\in\mathbb{C}$ mit $\cosh z\neq 0$, $\coth z\ \forall z\in\mathbb{C}$ mit $\sinh z\neq 0$, alle rationalen Funktionen auf $\mathbb{C}\setminus\{\text{Nullstellen des Nennerpolynoms}\}$, e^x auf $\mathbb{R}$, $\log x$ auf $(0,\infty)$, x^α auf $(0,\infty)$, a^x auf $\mathbb{R}$, $\sin x$, $\cos x$ auf $\mathbb{R}$, $x^x=e^{x\log x}$ auf $(0,\infty)$.

Bew: Polynome, e^x, $\sin x$… sind Potenzreihen mit KR $R=\infty$, sind also nach S4.3.6 stetig auf $\mathbb{C}$, sonst Folgerungen aus S4.3.4 (f/g)

A4.3.18 Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(z-z_0)^n$ habe KR $R>0$ bzw. $R=\infty$.

Definiere $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} (a_n)(z-z_0)^n$ für $z\in U_R(z_0)$, falls $R\neq\infty$, bzw.

$z\in \mathbb{C}$, falls $R=\infty$.

Zeige, $\forall\ z_0^* \in U_R(z_0)$ (falls $R\neq\infty$) bzw.

$z_0^* \in \mathbb{C}$ (falls $R=\infty$): $\exists \lim_{z\to z_0^*} \frac{f(z)-f(z_0^*)}{z-z_0^*}$ und gebe diesen Wert mit

Hilfe der a_n, $n\in \mathbb{N}_0$ an.

*//**S3.5.7**(2053)*

//Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ habe KR $R>0$.

//z_0^* mit $|z_0-z_0^*|= r<R$ fest gewählt.//

//Beh: $\forall z\in \mathbb{C}$ mit $|z_0-z_0^*|<R-r$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n =\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^n$,//

// wobei $\forall\ k\in \mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-k}$ absolut konvergiert//

Lös: $b_0 \underbrace{=}_{Bew\,S\,4.3.6\,Seite\,2450} f(z_0^*) \Rightarrow \frac{f(z)-f(z_0^*)}{z-z_0^*}=\frac{f(z)-b_0}{z-z_0^*}=\frac{\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^k-b_0(z-z_0^*)^0}{z-z_0^*}=$

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_0^*)^k=b_1(z-z_0^*)^0+\sum_{k=1}^{\infty} b_{k+1}(z-z_0^*)^k=b_1+\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^{k+1}=$

$b_1+(z-z_0^*)\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_0^*)^k \overset{siehe\ *}{\underset{z\to z_0^*}{\Longrightarrow}} b_1=\sum_{\nu=1}^{\infty}\binom{\nu}{1}a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-1}=\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-1}$

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu(z_0^*-z_0)^{\nu-1}$

* Nach S3.5.7 ist $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^n$, konvergent, d.h. $=:S$ und für

$z\to z_0^*$: $(z-z_0^*)\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_0^*)^k=(z-z_0^*)*S\to 0$ für $(z_0 \underset{k\to\infty}{\overrightarrow{\smile}} z_0^*)$.

Lösung andere Formulierung aus Protokollen:
//***S3.5.7***(2053)

//Vor:Die PR $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *habe KR R>0. Sei* z_0^* *mit* $|z_0-z_0^*| = r<R$*//*

//   fest gewählt.//

//Beh: $\forall z\in \mathbb{C}$ *mit* $|z_0-z_0^*|<R-r$ *gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0^*)^n$*,//*

//   wobei $\forall\ k\in \mathbb{N}_0$, $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_0^* - z_0)^{\nu-k}$ *absolut konvergiert//*

Lös: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \underset{S3.5.7}{=} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_n)^k$ mit $b_k:=\sum_{\nu=k}^{\infty}\binom{\nu}{k}a_\nu(z_1-z_0)^{n-k}\ \forall\ k\in\mathbb{N}_0$,

insbesondere $b_0=f(z_1) \Rightarrow \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}=\sum_{k=1}^{\infty} b_k(z-z_1)^{k-1}=\sum_{k=0}^{\infty} b_{k+1}(z-z_1)^k \underset{k\to\infty}{\rightarrow}$

$b_1=\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu(z_1-z_0)^{\nu-k}$ für $(z_0 \underset{k\to\infty}{\rightarrow} z_1)$.

$g(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu+1}(z-z_n)^k$ ist stetig im Inneren des Kreises $\Rightarrow$

$g(z) \underset{\nu\to\infty}{\rightarrow} g(z_1)=b_1$

A4.3.19 Zeige an Hand eines Bsp. $a_k=(-1)^k$: Es gibt Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, welche nicht konvergieren, für die aber $\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k\ \forall\ x\in(-1,1)$ konvergiert und $a=\lim_{x\to 1_-}\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$ existiert. Man nennt die Zahl a auch den Wert der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ im Sinne des Abelschen Summationsverfahrens.

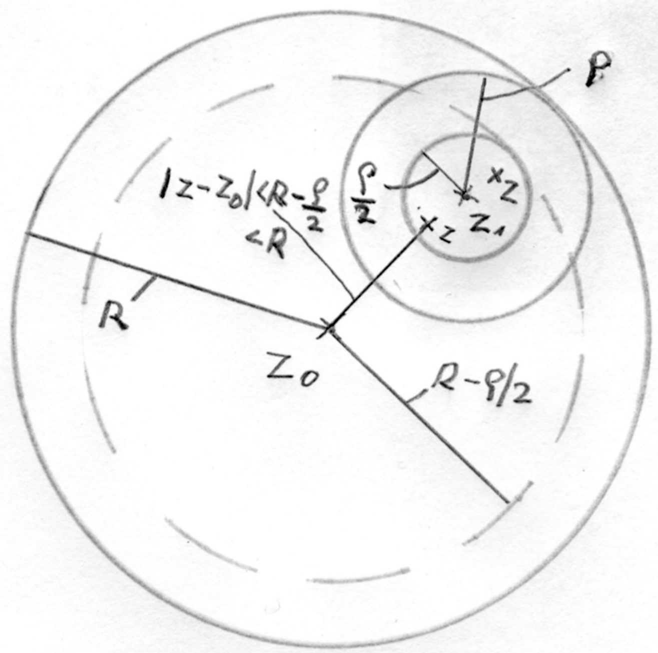
dazu: $\sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k=\sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k=1/(1+x) \underset{x\to 1_-}{\rightarrow} \to 1/2$

S4.3.6(2455) Identitätsssatz für Potenzreihen

1.) Vor: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ mit KR, $R>0$ gegeben.

Beh: Für $z_1\in U_R(z_0)$: $\lim_{z\to z_1} f(z)=f(z_1)$

#$f(z_1)$ könnte auch eine Sprungstelle(Sprungpunkt) sein, deshalb der Satz?



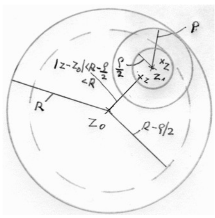
Bew: verwendete Sätze (abgekürzt)

*//**S1.7.2** (903) $a,b\in C$, $n\in N_0$: 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$//*

*//**S3.5.6**(2050) Vor: Die PRen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ haben KR R bzw ρ//*

// 1.) dann besitzen die „differenzierte" Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$ //

// und die „integrierte" Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)}(z-z_0)^{n+1}$ <u>denselben</u> KR R//



eigene Formulierungen eingearbeitet

Es gilt $|z_1-z_0|=R-\rho<R$ mit $\rho\in(0,R)$.

Für $|z-z_1|<\rho/2$ ist $|z-z_0|<R-\rho/2<R$, d.h. für diese z konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ absolut.

S3.5.6 $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} ka_k(z-z_0)^{k-1}$ absolut konvergent für $|z-z_0|<R-\rho/2<R$ $\Rightarrow$

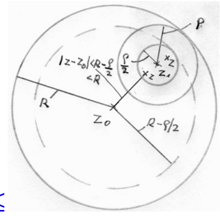
$\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k||R-\rho/2|^{k-1}=:\kappa<\infty$ (wird später benutzt).

Zu $\varepsilon>0$ definiere $|z-z_1|<\delta_\varepsilon:=\min\{\rho/2,\varepsilon/\kappa\}$, d.h. z auf jeden Fall im Inneren des Kreises (siehe Skizze oben) um z_1 mit Radius $\rho/2$

//**S1.7.2**(903)

//Vor.Seien a,b∈**C**, n∈**N**$_0$ Beh: 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$

$$|f(z)-f(z_1)|=\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\big(\underbrace{((z-z_0)^k-(z_1-z_0))^k}_{=((z-z_0)-(z-z_1))\sum_{\nu=0}^{k-1}(z-z_0)^{\nu}(z_1-z_0)^{k-\nu-1}}\big)\Big| \underbrace{=}_{S1.7.3\ 2.)}$$



$$\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k((z-z_0)-(z_1-z_0))\sum_{\nu=0}^{k-1}(z-z_0)^{\nu}(z_1-z_0)^{k-1-\nu}\Big| \le$$

$$|z-z_1|\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\sum_{\nu=0}^{k-1}\underbrace{|z-z_0|}_{<R-\rho/2}{}^{\nu}\,\underbrace{|z_1-z_0|}_{=R-\rho<R-\rho/2}{}^{k-1-\nu} <$$

$$|z-z_1|\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|k(R-\rho/2)^{k-1}=|z-z_1|\kappa=\min\{\rho/2,\varepsilon/\kappa\}*\kappa<\varepsilon \quad \forall\ z:|z-z_1|<\delta_\varepsilon,$$

2.) Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen

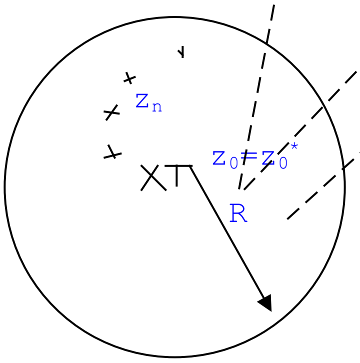
Vor: $f(z):=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $\varphi(z):=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ haben KR, R>0.

$\exists$ eine Folge $(z_n)\subset U_R(z_0)\setminus \underbrace{z_0^*}_{\in U_R(z_0)}$ mit $z_n \underbrace{\to}_{n\to\infty} z_0^*\in U_R(z_0)$ & $f(z_n)=\varphi(z_n)\ \forall\ n\in\mathbf{N}$

Beh: $a_k=b_k\ \forall\ k\in\mathbf{N}_0$ und damit $f(z)=\varphi(z)\ \forall\ z\in U_R(z_0)$.

Bew: 1.Fall $z_0^*=z_0$, ($z_0^*\neq z_0$ siehe Seite 2458)

$$z_n\to z_0,\ f(z_n)\underbrace{\overset{S4.3.6\ 1.)}{\to}}_{n\to\infty} f(z_0)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k=a_0\underbrace{0^0}_{=1}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}a_k 0^k}_{=0}=a_0$$



$\varphi(z_n)\underbrace{\to}_{n\to\infty}\varphi(z_0)=b_0 \Rightarrow a_0=b_0$.... Induktion ......

Induktionsvor $a_\nu=b_\nu\ \forall\ \nu=0,...,k,$.

Anfangsglieder von $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ weglassen ändert nichts an Konvergenz.

$$*\ f_{k+1}(z):=(f(z)-\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu(z-z_0)^{\nu})/(z-z_0)^{k+1}=$$

$$\sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^{\nu-k-1},\ |z-z_0|<R,$$

$$\varphi_{k+1}(z):=(\varphi(z)-\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu(z-z_0)^{\nu})/(z-z_0)^{k+1}=\sum_{\nu=k+1}^{\infty} b_\nu(z-z_0)^{\nu-k-1},\ |z-z_0|<R,$$

$\varphi_{k+1}(z_n):=(f(z_n)-\sum_{\nu=a_k}^{k} b_\nu$ usw für z, z_n geschrieben ab $*$ $\Rightarrow$

$a_{k+1}=b_{k+1}$, $b_\nu=a_\nu\ \forall\ \nu\in\mathbf{N}_0 \Rightarrow \varphi(z)=f(z)\ \forall\ |z-z_0|<R$

#Eigene Formulierung: Induktion

//**S3.5.2**(2001) Zu jeder Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ ∃ genau eine Zahl R mit//

// $0\le R\le\infty$, der <u>Konvergenzradius</u> (KR) der PR, mit der //

// Eigenschaft://

$$// \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut } \forall z\in C \text{ mit } |z-z_0|<R \\ \text{divergiert } \qquad \forall z\in C \text{ mit } |z-z_0|>R \end{cases} //$$

// Ferner gilt $R=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ (Formel von Cauchy-Hadamard),//

// wobei $\frac{1}{0}:=\infty$, $\frac{1}{\infty}:=0$//

//**S4.3.5**(2419) Identitätsssatz für Potenzreihen//

//1.)Vor: $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, $z\in U_R(z_0)$ mit KR, R>0 gegeben.//

//Beh:Für $z_1\in U_R(z_0)$: $\lim_{z\to z_1} f(z)=f(z_1)$//

#Bew:1.Fall $z_0^*=z_0$, $z_n\to z_0$, $f(z_n) \underbrace{\overset{S4.3.6\ 1.)}{\overbrace{\longrightarrow}}}_{n\to\infty} f(z_0)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k=a_0\underbrace{0^0}_{=1}+\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_k 0^k}_{=0}=a_0$

$\varphi(z_n) \underbrace{\overset{S4.3.5\ 1.)}{\overbrace{\longrightarrow}}}_{n\to\infty} \varphi(z_0)=b_0 \Rightarrow a_0=b_0=:f_0(z)=\varphi_0(z)$

$f_1(z):=\dfrac{f(z)-\overbrace{\sum_{\nu=0}^{1-1=0} a_\nu(z-z_0)^\nu}^{a_0}}{(z-z_0)^1}=$

$\dfrac{1}{(z-z_0)^1}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^{\nu-1}=a_1(z-z_0)^0+a_2(z-z_0)^1+\dots\ \underbrace{\text{konvergent in } U_R(z_0)}_{S3.5.2}$,

da $R=R_f=R_{f_1}=1/\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$

$\underbrace{\Rightarrow}_{1.)} f_1(\underbrace{z_n}_{z=z_n})=\dfrac{\overbrace{f(z_n)}^{=\varphi(z_n)\text{ nach Vor}}-\overbrace{\sum_{\nu=0}^{0} a_\nu(z_n-z_0)^\nu}^{a_0=b_0}}{(z_n-z_0)^1}=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(\underbrace{\overbrace{z_n-z_0}^{\underset{n\to\infty}{=0}}}_{\to z_0})^{\nu-1}=a_1$ entsprechend

$f(z_n)$

dsgl $\varphi_1(z_n)=\dfrac{\overbrace{\varphi(z_n)}^{=f(z_n)\text{ nach Vor}}-\overbrace{\sum_{\nu=0}^{0} b_\nu(z_n-z_0)^\nu}^{b_0=a_0}}{(z_n-z_0)^1}=\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(\underbrace{z_n}_{\to z_0}-z_0)^{\nu-1}=b_1$

⇒ $a_1=b_1$ usw bis ($f_k(z)$ und $a_k=b_k$)

$f_k(z):=\dfrac{f(z)-\overbrace{\sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu(z-z_0)^\nu}^{=\sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu(z-z_0)^\nu}}{(z-z_0)^k}=\dfrac{1}{(z-z_0)^k}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^\nu$

$=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(z-z_0)^{\nu-k}\ \underbrace{\text{konvergent in } U_R(z_0)}_{S3.5.2}$

$\Rightarrow f_k(z_n) \underbrace{=}_{z=z_n} \frac{\overbrace{f(z_n)}^{=\varphi(z_n)} - \overbrace{\sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu (z_n - z_0)^\nu}^{=\sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu (z_n - z_0)^\nu}}{(z - z_0)^k} = \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu (z_n - z_0)^{\nu-k} \underbrace{\underbrace{=}_{z_n \to z_0}}_{1.)} a_k$

dsgl $\varphi_k(z_n) = \frac{\overbrace{\varphi(z_n)}^{=f(z_n)} - \overbrace{\sum_{\nu=0}^{k-1} b_\nu (z_n - z_0)^\nu}^{b_\nu = a_\nu}}{(z_n - z_0)^k} = \sum_{\nu=k}^{\infty} b_\nu (z_n - z_0)^{\nu-k} \underbrace{\underbrace{=}_{z_n \to z_0}}_{1.)} b_k$

$\Rightarrow a_k = b_k$

#

$f_{k+1}(z) := \frac{f(z) - \overbrace{\sum_{\nu=0}^{k+1-1} a_\nu (z - z_0)^\nu}^{=\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu (z - z_0)^\nu}}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^\nu$

$= \sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu (z - z_0)^{\nu-k-1} \underbrace{\textit{konvergent in } U_R(z_0)}_{S3.5.2}$

$f_{k+1}(z_n) \underbrace{=}_{z=z_n} \frac{f(z_n) - \overbrace{\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu (z_n - z_0)^\nu}^{=\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu (z_n - z_0)^\nu}}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{\nu=k+1}^{\infty} a_\nu (z_n - z_0)^{\nu-k-1} \underbrace{\underbrace{=}_{z_n \to z_0}}_{1.)} a_{k+1}$

dsgl $\varphi_k(z_n) = \frac{\overbrace{\varphi(z_n)}^{=f(z_n)} - \overbrace{\sum_{\nu=0}^{k} b_\nu (z_n - z_0)^\nu}^{b_\nu = a_\nu}}{(z_n - z_0)^{k+1}} = \sum_{\nu=k}^{\infty} b_\nu (z_n - z_0)^{\nu-k-1} \underbrace{\underbrace{=}_{z_n \to z_0}}_{1.)} b_{k+1}$

$\Rightarrow a_{k+1} = b_{k+1}$

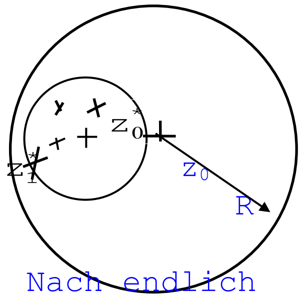
2.Fall: $z_0^* \neq z_0$, $0 < r = |z_0 - z_0^*| < R \underbrace{\Rightarrow}_{S3.5.7}$

$f(z) = \sum a_k (z - z_0^*)^k$, $\varphi(z) = \sum b_k (z - z_0^*)^k$,

$|z_0 - z_0^*| < R - r$ aus 1.Fall $\Rightarrow$

$a_k = b_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(z) = \varphi(z) \ \forall\ |z_0 - z_0^*| < R - r$

(Funktionen stimmen im kleinen Kreis überein) $\Rightarrow$



$\varphi(z) = f(z) \ \forall\ |z_0 - z_1^*| < R - r_1$ mit $r_1 = |z_1^* - z_0| < r$. Nach endlich vielen Schritten $\Rightarrow a_k = b_k \ \forall\ k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow f(z) = \varphi(z) \ \forall\ z \in U_R(z_0)$

Andere Formulierung:

Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, KR R>0 und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ PR mit KR R>0 und ist auf dieser Kreisscheibe $g(z):=\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ und gilt mit $z_0^* \in U_R(z_0)$ und mit einer Folge (z_n) aus $U_R(z_0)\setminus\{z_0^*\}$ mit $z_n \to z_0^*: f(z_n)=g(z_n)$ so folgt $f(z)\equiv g(z)$ auf $U_R(z_0)$ und $a_n=b_n$.

Bew:Wir zeigen dies nur für $z_0^*=z_0$ (sonst Umentwicklung):

$$f(z_n)=g(z_n) \underset{z_n\to z_0}{\overset{1.)}{\Rightarrow}} f(z_0)=g(z_0) \text{ d.h. } a_0=b_0 \Rightarrow$$

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^{k-1} \Rightarrow \underbrace{\frac{f(z_n)-f(z_0)}{z_n-z_0}}_{1.)=a_1}=\underbrace{\frac{g(z_n)-g(z_0)}{z_n-z_0}}_{1.)=b_1} \;\forall n \underset{\text{Ind}}{\Rightarrow} a_k=b_k.$$

Bem:(.)Polynome sind spezielle Potenzreihen
(..)Koeffizientenvergleich Bsp $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$
(…)Gilt $f(z_n)=0\;\forall n\; z_n \underset{n\to\infty}{\to} z_0^* \Rightarrow f(z)\equiv 0$
(….)Nullstellen von sin, cos, sinh, cosh können sich in keinem Punkt von $\mathbb{C}$ häufen.

A4.3.20 Gegeben sei die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ der Fibonacci-Zahlen:
$a_1:=1,\; a_2:=1,\; a_{n+2}=a_{n+1}+a_n,\; n\in\mathbb{N}$. Zeige
a)Die Fibonaccifolge (a_n) nimmt ab n=2 streng zu & $\forall n: a_{n+1}/a_n\le 2$.
Lös:(.)Beh:$a_n\ge 1\;\forall n\in\mathbb{N}$, insbesondere $a_n>0\;\forall n\in\mathbb{N}$.
Bew:Induktion nach n (2.Fassung)

$$n=1: a_1=1\ge 1 \quad n=2: a_2=1\ge 1 \quad n\ge 3: a_n=\underbrace{\underbrace{a_{n-1}}_{\ge 1}+\underbrace{a_{n-2}}_{\ge 1}}_{\text{Ind Hyp}}\ge 1+1\ge 1$$

(..)Beh:$a_{n+1}>a_n\;\forall n\in\mathbb{N},\; n\ge 2$

$$\text{Bew}: a_{n+1}\underset{n\ge 2}{=} a_n+\underbrace{a_{n-1}}_{>0\,nach\,(.)}>a_n\;\forall n\in\mathbb{N},\; n\ge 2 \Rightarrow (a_n)_{n=2}^{\infty}\uparrow.$$

(...)Beh:$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 2\;\forall n\in\mathbb{N}$ (man beachte $a_n\ne 0\;\forall n\in\mathbb{N}$ nach (.)

Bew:

1.Fall: n=1, $\frac{a_2}{a_1}=1/1=1<2$

2.Fall: n=2, $\frac{a_3}{a_2}=2/1=2\le 2$

3.Fall: n≥3, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}\le\frac{a_n+a_n}{a_n}=2$.

Bem:Wir haben sogar $\frac{a_{n+1}}{a_n}<2\;\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$ gezeigt.

b) $f(z):=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^n$ konvergiert mindestens für $|z|<1/2$.

// **S3.2.2**(1700) 5) Vor: $z_n\neq 0\ \forall\ n\geq n_0,\ n\in\mathbb{N}$ und $\exists\ 0<q<1$

//5a)Beh: • $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq q<1\ \forall\ n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$.

Lös:Sei $b_n=a_{n+1}z^n \Rightarrow \left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}|z|\underbrace{\leq}_{a)}2|z|<1\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ falls

$|z|<1/2$ fest, beliebig $\underbrace{\overbrace{\Rightarrow}^{S3.2.2\,5.)}}_{QuotKrit} \sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{b_n}_{a_{n+1}z^n}$ konvergiert für

$|z|<1/2$

c) Für $|z|<1/2$ ist $f(z)-zf(z)-z^2f(z)=1$, also $f(z)=-\frac{1}{z^2+z-1}$.

Lös: $f(z)[1-z-z^2]=f(z)-zf(z)-z^2f(z)=$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^n-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+1}}_{=a_1z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}z^{n+2}}_{=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-1}z^n}$$

$$=\underbrace{a_1z^0}_{=1}+\underbrace{\underbrace{a_2}_{z}z-a_1z}_{=0}+\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{(a_{n+1}-a_n-a_{n-1})}_{=0 \text{ nach Rekursion}}z^n=1 \Rightarrow$$

$f(z)=-\frac{1}{z^2+z-1}$ für $|z|<1/2$

Man beachte: $z^2+z-1\neq 0$ für $|z|<1/2$, denn für $z^2+z-1\neq 0$:
$0=f(z)[1-z-z^2]$....Widerspruch zu $f(z)[1-z-z^2]=1$

d)# $z^2+z-1=0 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2b}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$x_1:=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2:=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ sind Nullstellen des Polynoms z^2+z-1, und mit ihnen gilt:

$f(z)=1/\sqrt{5}\left(\frac{1}{z-x_2}-\frac{1}{z-x_1}\right)$ für $|z|<1/2$.

Lös: x_1,x_2 sind Nullstellen von z^2-z-1, denn

$$z^2+z-1=z^2+z+(1/2)^2-1/4-1=(z+1/2)^2-(\sqrt{5}/2)^2=\underbrace{(z-x_1)(z-x_2)}_{z^2-(x_1+x_2)z+x_1x_2}$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Identäts Polynome}} x_1+x_2=-1,\ x_1x_2=-1 \Rightarrow 1/\sqrt{5}\left(\frac{1}{z-x_2}-\frac{1}{z-x_1}\right)=$$

$$1/\sqrt{5}\,\frac{z-x_1-(z-x_2)}{(z-x_2)(z-x_1)}=\underbrace{\frac{x_2-x_1}{\sqrt{5}}}_{=-1}\frac{1}{(z-x_1)(z-x_2)}=-\frac{1}{z^2+z-1}=f(z)\quad\forall\ |z|<1/2$$

e) Für $|z|<1/2$ ist $f(z)=1/\sqrt{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}}-\frac{1}{x_2^{n+1}}\right)z^n=1/\sqrt{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x_2^{n+1}-x_1^{n+1})z^n$.

// **S3.2.2**(1700) 5) Vor: $z_n\neq 0$ $\forall$ $n\geq n_0$, $n\in\mathbb{N}$ und $\exists$ $0<q<1$

//5a)Beh: ● $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\leq q<1$ $\forall$ $n\geq n_1\geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|z_n|<\infty$.

*//**S2.1.2** (1250)Eigenschaften konvergenter Folgen//*

//Vor: (z_n) konvergent mit $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$, $z,z_n\in C$.//

//Beh:13.)Für $z_n=\sum_{k=0}^{n} z^n$, $n\in N_0$ mit $z\in U_1(0)$ gilt $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \frac{1}{1-\underbrace{z}_{\neq 1}}$, geom Reihe//

Lös: $\frac{1}{z-x_1}=\frac{1}{-x_1(1-\frac{z}{x_1})}\underbrace{\leq}_{S2.1.2}=\frac{1}{-x_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x_1^n}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x_1^{n+1}}z^n$ für $|z|\underbrace{\leq}_{S3.2.2\,5.)}|x_1|$

Analog $\frac{1}{z-x_2}=$ $-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{x_2^{n+1}}z^n$ für $|z|\underbrace{\leq}_{S3.2.2\,5.)}|x_2|$ $\Rightarrow$

$f(z)\underbrace{=}_{d)}1/\sqrt{5}\left(\frac{1}{z-x_2}-\frac{1}{z-x_1}\right)=1/\sqrt{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x_1^{n+1}}-\frac{1}{x_2^{n+1}}\right)z^n \underbrace{\overset{d)}{=}}_{x_1x_2=-1}$

$\sum_{n=0}^{¥}\frac{(-1)^{n+1}(x_2^{n+1}-x_1^{n+1})}{\sqrt{5}}z^n=\sum_{n=0}^{¥}a_{n+1}z^n$ $\forall$ $|z|<1/2$

*//**S4.3.7**(2453) Identitätsssatz für Potenzreihen*

// 2.) Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen

//Vor: $f(z):=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$, $\varphi(z):=\sum_{k=0}^{¥}b_k(z-z_0)^k$ haben KR, R>0.

// $\exists$ eine Folge $(z_n)\subset U_R(z_0)\setminus\{z_0^*\}$ mit $z_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} z_0^{¿}\in U_R(z_0)$ & $f(z_n)=\varphi(z_n)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

//Beh: $a_k=b_k$ $\forall$ $k\in\mathbb{N}_0$ und damit $f(z)=\varphi(z)$ $\forall$ $z\in U_R(z_0)$.

Mit dem Idenditätssatz für Potenzreihen (S4.3.7) folgt die explizite Formel der Fibonaccizahlen:

$a_n=1/\sqrt{5}\,(-1)^n(x_2^n-x_1^n)=1/\sqrt{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$