6.9 Einführung Parameterintegrale

$f: I \times I \to \mathbb{R}$, $I_k = [a_k, b_k]$, $k=1,2$
bzgl 2. Variablen R-integrierbar über I_2 $\forall$ festen Werte der

1.) Variablen von I_1. Dann existiert das sog Parameterintegral $F(x) := \int_{a_2}^{b_2}$

$f(x,t)dt$ $\forall$ $x \in I_1$.

D6.9.1 (3900) Eine solche Funktion f heißt gleichstetig in der 1. Variablen auf
$I_1 \times I_2$ falls

- $\forall$ $\varepsilon > 0$ $\exists$ $\delta_\varepsilon > 0$: $|f(x,t) - f(y,t)| < \varepsilon$ $\forall$ $x, y \in I_1$ mit $|x-y| < \delta_\varepsilon$ $\forall$ $t \in I_2$.
- • $|F(y) - F(x)| \le \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{|f(y,t) - f(x,t)|}_{\le \varepsilon} dt \le \varepsilon(b_2 - a_2)$ $\forall$ $|x-y| < \delta_\varepsilon$ $x, y \in I_1$.

Bem: • Mit einer solchen gleichseitigen Funktion f gilt:
a) f ist gleichmäßig stetig auf I_1 $\forall$ $t \in I_2$.
b) $F \in C(I_1)$

• • Existiert die Ableitung $f_x(x,t) := \frac{d}{dx} f(x,t)$ $\forall$ feste $t \in I_2$ und ist
f_x R-integrierbar über I_2 $\forall$ feste $t \in I_1$ und ist
f_x gleichstetig in x, so ist F differenzierbar auf I_1 und

es gilt $F'(x) = \int_{a_2}^{b_2} f_x(x,t)dt$ $\forall$ $x \in I_1$.

Beachte $\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \int_{a_2}^{b_2} f_x(x,t)dt \right| \underset{MWS}{\le} \int_{a_2}^{b_2} |f_x(\xi(h,t)) - f_x(x,t)| dt \underset{h \to 0}{\rightrightarrows}$
0

K6.9.1 (3900) Aussage: Γ Funktion ist differenzierbar auf $(0,\infty)$ und es
gilt $\Gamma'(x) = \int_0^\infty (e^{-t} t^{x-1} \log t) dt$

Bew: $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ sind die Parameterintegrale $F_n(x) = \int_{1/n}^{n} (e^{-t} t^{x-1}) dt$ diffb auf $(0,\infty)$
(offenes Intervall mit kompakten Intervallen ausschöpfen) und somit

gilt $F_n'(x) \underset{n \to \infty}{\rightrightarrows} \int_{1/n}^{n} (e^{-t} t^{x-1} \log t) dt$ gleichmäßig auf $[\delta, 1/\delta]$ $\underset{\delta > 0\, beliebig}{\Rightarrow}$
Aussage

Bem: Entsprechend gilt $\Gamma(.)$ ist beliebig oft differenzierbar auf $(0,\infty)$
und $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^\infty (e^{-t} t^{x-1} \log t) dt$, $n \in \mathbb{N}$, insbesondere ist $\Gamma''(x) > 0$ und
somit die Γ Funktion strikt konvex.