

Einige Ausführungen zu Aussagenlogik

1. Aussage

ist ein Satz oder eine Formel, der/die entweder falsch oder richtig, d.h. einen Wahrheitsgehalt hat.

Bsp: 10 ist eine gerade Zahl. Aussage wahr
Die Kuh ist ein Fisch. Aussage falsch
100 geteilt durch 10 ist 10 Aussage wahr

2. Aussageform

hat keinen Wahrheitsgehalt

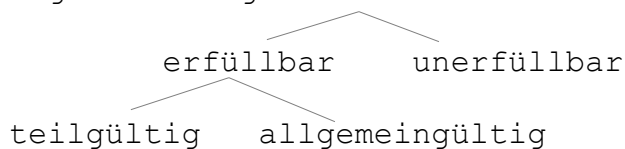
Bsp: Wo ist ein Baum.
Bleib wo du bist.
Das Haus ist klein

3. Aussageformen mit Variablen

Durch Einsetzen von Elementen einer dazu definierten Grundmenge können oft Aussagen gebildet werden.

Bsp: x ist Teiler von 8
Grundmenge sei $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
Aussagen
1 ist Teiler von 8 wahr
2 ist Teiler von 8 wahr
3 ist Teiler von 8 falsch
4 ist Teiler von 8 wahr
5 ist Teiler von 8 falsch usw

Gliederung: Aussageform mit Variablen



Bsp: Grundmenge $G: \{21, 22, 23, \dots\}$,

- unerfüllbar: Aussageform mit Variable $x < 20$
- ● erfüllbar:
Mindestens 1 Element von G führt zu einer wahren Aussage:
Aussageform mit Variable $x \leq 21$, d.h. $x = 21$
- ● ● allgemeingültig:
Alle Elemente von G führen zu einer wahren Aussage:
Aussageform mit Variable $x > 20$, d.h. $x = 21, 22, \dots$
- ● ● ● teilgültig:
Nicht alle Elemente von G aber mindestens 1 Element führen zu einer wahren Aussage:
Aussageform mit Variable $x < 23$, d.h. $x = 21, x = 22$

4. Unabhängige Aussagen:

Aussage A wahr ist unabhängig von Aussage B wahr

Bsp: A: Ich gehe nach Berlin B: Du fährst nach Ulm

5. Abhängige Aussagen

5.1 Äquivalente Aussagen A und B

Schreibweise: $A \Leftrightarrow B$, aus A folgt B und aus B folgt A

Bsp: Beide richtig

A: Heute ist Sonntag

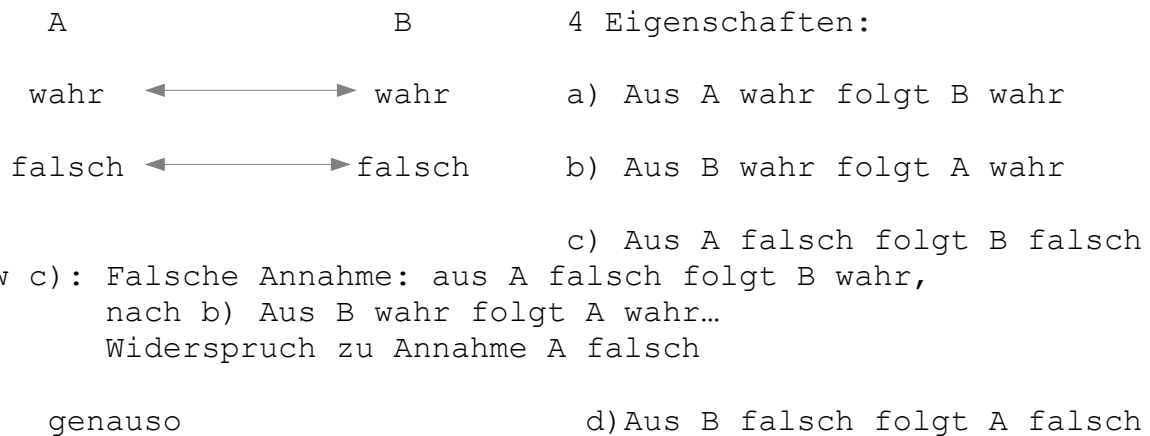
B: Morgen ist Montag

Beide falsch

A: Heute ist Sonntag ist falsch

B: Morgen ist Montag ist falsch

Pfeildiagramm



Also gelten folgende Kombinationen:

A wahr und B wahr, A falsch und B falsch

5.2 Implikation

Schreibweise Implikation: $A \Rightarrow B$

Sprache: Aus A folgt B,
Anforderungen an A bzw B: falsch bzw richtig siehe unten

Bsp: A: Ich habe 1 rotes Auto
B: Ich habe 1 Auto

- Ich habe 1 rotes Auto falsch, Ich habe 1 Auto falsch
- • Ich habe ein rotes Auto falsch
Ich habe 1 Auto (und zwar ein gelbes) wahr
- • • Ich habe ein rotes Auto wahr
Ich habe 1 Auto (und das ist rot) wahr

Es gilt nicht: Ich habe 1 rotes Auto wahr,
Ich habe 1 Auto falsch.

Aussagen A und B bilden eine Implikation, wenn gilt:
(Im folgenden Text • • und • • • betrachten)

- Aus A wahr folgt B wahr

Aus • folgt

- • Aus A falsch folgt B falsch
Bew: Annahme Aus A falsch folgt B wahr,
dann gilt aus A wahr und A falsch folgt B wahr, d.h.
B ist unabhängig von A,
ein Widerspruch zu B abhängig von A

Aus • und • • folgt

- • • Aus A falsch folgt B wahr
Bew: Annahme: Es gilt nicht, aus A falsch folgt B wahr, so
würde aus B wahr, A wahr folgen; keine der nach
• und • • definierten Eigenschaften der Implikation

Es gilt nicht: Aus A wahr folgt B falsch !!!!

Bew: Annahme Aus A wahr folgt B falsch.

Nach • gilt auch Aus A wahr folgt B wahr. Widerspruch!

f: falsch w: wahr



„ \Rightarrow “ A falsch oder B wahr
d.h $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn
A falsch oder B wahr

5.) $A \vee B$ bedeutet „A oder B“ (aber nicht entweder oder)

A ist wahr oder B ist wahr
„Der Mond scheint oder $5 \in \mathbb{N}$ “ ist immer wahr, weil $5 \in \mathbb{N}$ wahr.

$A \wedge B$ bedeutet „A und B“
beide sind wahr

6.) $\neg A$ bedeutet „nicht A“; $\neg A$ ist richtig, wenn A falsch ist

7.) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

// 5.2 $A \Rightarrow B$ ist wahr, wenn A falsch oder B wahr
Bew: Durch Wahrheitstafel

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A$	$\neg A \vee B$
w	w	w	f	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w