Einige Elemente der Kombinatorik

//**D0.1.1**(3) (aus Analysis 1 P01)
//Zusammenfassung M, von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten
//unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M
//genannt werden, zu einem Ganzen.
//Bem:bestimmt → für jedes Objekt muss entscheidbar sein, ob es
// zur Menge gehört oder nicht
// wohlunterschieden→ jedes Objekt kommt höchstens 1x in M vor
//Obige Definition ist unbefriedigend, wird aber im folgenden benutzt,
//da eine genauere axiomatische Begründung der Mengenlehre den Rahmen
/sprengen würde.
//Bez:$x\in M \Leftrightarrow$ Objekt x ist Element von M
// $x\notin M \Leftrightarrow$ Objekt x ist kein (nicht)Element von M.
// Niemals gilt $M\in M$
// $M=\{x,y,z...\}\Leftrightarrow x\in M,\ y\in M\ z\in M...$
// Reihenfolge in {} kann beliebig geändert werden.
// |M|=Anzahl der Elemente in M (Bsp: $|\{1,4,8\}|=3$)
//**D0.1.3**(3)
//1.)Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge $\emptyset$
//**D0.1.4**(4)
//Seien M_1,M_2 Mengen, dann heißt
1.)$M_1\cup M_2:=\{x\,|\,x\in M_1 \text{ oder } x\in M_2\}$ die Vereinigung von M_1 und M_2
//2.)$M_1\cap M_2:=\{x\,|\,x\in M_1 \text{ und } x\in M_2\}$ der Durchschnitt von M_1 und M_2

DK1
a) Ein Tupel ist eine geordnete Zusammenfassung von Objekten
(Bez: $[k_1,k_2,\ldots,k_n]$) mit
$[k_1,k_2,\ldots,k_n]=[l_1,l_2,\ldots,l_m] \Leftrightarrow m=n$ und $k_i=l_i\ \forall\ i\in\{1,2,..,n\}$
und $k_l=k_m$, für beliebig viele $l,m\in\{1,2,..,n\}$
(oder auch keine $l,m\in\{1,2,..,n\}$)
Bem: $[k_1,k_2]\neq[k_2,k_1]$;
$[k_1,k_2,k_1,k_1,\ldots,k_n]$ möglich aber $[k_1,k_2,k_1,k_1,\ldots,k_n]\neq[k_1,k_1,k_2,k_1,\ldots,k_n]$

DK2 $\langle a_1,a_2,\ldots a_n\rangle$ wobei
$a_1\prec a_2\prec a_3,\ldots\prec a_n$ sowie $a_l\neq a_m\ \forall\ l,m\in\{1,2,...,n\}$ gilt und
$a_1\prec a_2$ a_1 vor a_2.... bedeutet
heißt geordnete Menge.

Zunächst Beispiel zu SK1 Abzähltheorem
Zahlen von 000-999….10*10*10=1000

Allgemeiner
Belegungen:
Sei N_1={ n_{1_1} , n_{1_2} ,…, $n_{1_{\nu_1}}$ };
Bsp: N_1={ 1, 2,… ,5};
N_2={ n_{2_1} , n_{2_2} …, $n_{1_{\nu_2}}$ };
Bsp: N_2={ 1, 2, 3};
N_k={ n_{k_1} , n_{k_2} …, $n_{k_{\nu_k}}$ };
Bsp: N_3={ 1, 2 }
Belegung Prinzip B: [$n_{1_{m_1}}$, $n_{2_{m_2}}$,... $n_{k_{m_k}}$]

[n_{1_2} , n_{2_3} n_{3_1}]=[2,3,1] oder auch [n_{1_4} , n_{2_3} n_{3_2}]=[4,3,2]…...
Alle Möglichkeiten:

n_{1_1}	1	n_{2_1}	1	n_{3_1}	1		n_{1_1}	1	n_{2_1}	1	n_{3_2}	2
n_{1_2}	2	n_{2_1}	1	n_{3_1}	1		n_{1_2}	2	n_{2_1}	1	n_{3_2}	2
n_{1_3}	3	n_{2_1}	1	n_{3_1}	1		n_{1_3}	3	n_{2_1}	1	n_{3_2}	2
n_{1_4}	4	n_{2_1}	1	n_{3_1}	1		n_{1_4}	4	n_{2_1}	1	n_{3_2}	2
n_{1_5}	5	n_{2_1}	1	n_{3_1}	1		n_{1_5}	5	n_{2_1}	1	n_{3_2}	2
n_{1_1}	1	n_{2_2}	2	n_{3_1}	1		n_{1_1}	1	n_{2_2}	2	n_{3_2}	2
n_{1_2}	2	n_{2_2}	2	n_{3_1}	1		n_{1_2}	2	n_{2_2}	2	n_{3_2}	2
n_{1_3}	3	n_{2_2}	2	n_{3_1}	1		n_{1_3}	3	n_{2_2}	2	n_{3_2}	2
n_{1_4}	4	n_{2_2}	2	n_{3_1}	1		n_{1_4}	4	n_{2_2}	2	n_{3_2}	2
n_{1_5}	5	n_{2_2}	2	n_{3_1}	1		n_{1_5}	5	n_{2_2}	2	n_{3_2}	2
n_{1_1}	1	n_{2_3}	3	n_{3_1}	1		n_{1_1}	1	n_{2_3}	3	n_{3_2}	2
n_{1_2}	2	n_{2_3}	3	n_{3_1}	1		n_{1_2}	2	n_{2_3}	3	n_{3_2}	2
n_{1_3}	3	n_{2_3}	3	n_{3_1}	1		n_{1_3}	3	n_{2_3}	3	n_{3_2}	2
n_{1_4}	4	n_{2_3}	3	n_{3_1}	1		n_{1_4}	4	n_{2_3}	3	n_{3_2}	2
n_{1_5}	5	n_{2_3}	3	n_{3_1}	1		n_{1_5}	5	n_{2_3}	3	n_{3_2}	2

5x3 x2 =30 Belegungen

SK0.1 Abzähltheorem

Vor: $N_1=\{ n_{1_1} , n_{1_2} \dots, n_{1_{\nu_1}} \}$;

$N_2=\{ n_{2_1} , n_{2_2} \dots, n_{2_{\nu_2}} \}$;

.

.

$N_k=\{ n_{k_1} , n_{k_2} \dots, n_{k_{\nu_k}} \}$;

Belegungen B_1: $[n_{1_1}],[n_{1_2}]\dots,[n_{1_{\nu_1}}]$ ν_1 Belegungen

B_2: $[n_{1_1} , n_{2_1}],...[n_{1_1} , n_{2_{\nu_2}}]$

$[n_{1_2} , n_{2_1}],...[n_{1_2} , n_{2_{\nu_2}}]$

$\dots$ ...

$[n_{1_{\nu_1}} , n_{2_1}],...[n_{1_{\nu_1}} , n_{2_{\nu_2}}]$ $\nu_1 * \nu_2$ Belegungen

usw

Aussage: B_k: $\nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ Belegungen

Bew: IA k=1: B_1 hat ν_1 Belegungen, Struktur $[b_1]$

k=2: B_2 hat $\nu_1 * \nu_2$ Belegungen, Struktur $[b_1,b_2]$

IH k : B_k hat $\nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ Belegungen,

Struktur $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,...b_k \in N_k]$

IS k+1: Struktur $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,...b_k \in N_k]$

Aus jeder der $\nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ Bestandteilen der Belegung B_k

mit $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,...b_k \in N_k]$ entstehen Bestandteile

der Belegung B_{k+1} mit $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,\dots,b_k,b_{k+1} \in N_{k+1}]$ d.h.

$\nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ mal $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,\dots,b_k, b_{k+1_1}]$

$\nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ mal $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,\dots,b_k, b_{k+1_2}]$

$\nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ mal $[b_1 \in N_1 , b_2 \in N_2 ,\dots,b_k, b_{k+1_{\nu_{k+1}}}] \Rightarrow$

B_{k+1} hat $(\nu_{k+1}) * \nu_1 * \nu_2 *,...,*\nu_k$ Belegungen

SK0.2 Additionsprinzip
Vor: M,N endliche Mengen, $M\cap N=\emptyset$
Aussage: $|M\cap N|=|M|+|N|$
Bew: D0.1.4 1.)

//**D0.1.7**(5)
//Sind M_1 und M_2 Mengen, so heißt die Menge $M_1 x M_2 :=\{(x,y)\mid x\in M_1 \text{ und } y\in M_2\}$ das
//kartesische Produkt von M_1 mit M_2 (=Menge aller geordneten Paare (x,y)
//aus $x\in M_1$, $y\in M_2$)
//Beachte:Bei den Paaren kommt es auf die Reihenfolge an. $[a,b]\neq[b,a]$,
//ausser a=b

//Allgemein: $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 x A_2 x \dots x A_n := \{[a_1,a_2,\dots,a_n] \mid a_i\in A_i, i=1,2,\dots,n\}$

//Falls ein $A_i=\emptyset \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i=\emptyset$

//Sind alle A_i gleich, ist das n-fache kartesische Produkt $A^n:=\prod_{i=1}^{n} A$

SK0.3 Multiplikationsprinzip
Vor: A,B endliche Mengen
Aussagen: ● $|AxB|=|A|*|B|$
Bew: $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\} \Rightarrow |A|=m$, $|B|=n$

$[a_1,b_1]$ $[a_1,b_2]$ ... $[a_1,b_n]$
$[a_2,b_1]$ $[a_2,b_2]$ ... $[a_2,b_n]$
…. …. ….
$[a_m,b_1]$ $[a_m,b_2]$ ... $[a_m,b_n]$ $\Rightarrow$ Rechteckinhalt $m*n=|A|*|B|$

●● $|AxBxC,...|=|A|*|B|*|C|*\dots$

Bew: $|AxBxC,...|=|A|*|BxCx,...|=|A|*|B|*|Cx,...|$

Betrachtung:
Sei $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$

AxA $=\{$ $[a_1,a_1]$, $[a_1,a_2]$… , $[a_1,a_m]$
$[a_2,a_1]$, $[a_2,a_2]$… , $[a_2,a_m]$
…..
… , $[a_k,a_1]$, ..
… …. ...
$[a\ ,a_1]$, $[a_1,a_2]$… , $[a_1,a_m]$ $[a_k,a_j,a_2]$
$[a_2,a_1]$, $[a_2,a_2]$… , $[a_2,a_m]$ ...
….. $[a_k,a_j,a_m]$
… , $[a_k,a_j]$, ..
… …. ...
$[a_m,a_1]$, $[a_m,a_2]$… , $[a_m,a_m]$ $\}$
usw

$\underbrace{AxAx,,,xA}_{kmal,k<m}$ erzeugt nach Konstruktion alle (geordneten) k elementigen Tupel von A

Bew: $\exists$ $[b_1,b_2,...b_k]$ mit $\{b_1,b_2,...b_k\}\subset\{a_1,a_2,\dots,a_m\}=A$ und
$[b_1,b_2,...b_k]\notin \underbrace{AxAx\dots xA}_{kmal,k<m}$

$b_1\in A \Rightarrow [b_1]\in A \Rightarrow b_1,b_2\in A \Rightarrow [b_1,b_2]\in AxA \Rightarrow [b1,b2,\dots,b_k]\in \underbrace{AxAx\dots xA}_{kmal,k<m}$

DK3 Eine Entnahme von k Objekten aus n Grundobjekten heißt Auswahl oder Stichprobe, wobei k≤n. Auswahlobjekte sind Bestandteile der Auswahlen

- **DK3.1**

  Permutationen sind mögliche Anordnungen der n Grundobjekte, d.h. k=n (d.h. jede Anordnung hat eine individuelle Reihenfolge)

  - **DK3.1.1**

    Permutationen ohne Wiederholung: Objekte untereinander unterscheidbar

    Bsp Grundobjekte: 1;2;3;4;5 (falsch 1;2;2;3;4)

    eine Permutation davon: <1,3,4,5,2>

Andere Formulierungen:

\# **DK3.1,1'** Permutationen ohne Wiederholungen (eigener Versuch)

#Sei $X=\{a_1,a_2,a_3\ldots,a_n\}$,

#Abbildung $\underbrace{\pi_i}_{bijektiv}$: $X \to X$ ist eine Permutation von X

#Eine Permutation von allen Permutationen, Index i

#$P_i=<\pi_i(a_1),\pi_i(a_2),...\pi_i(a_n)>$ wobei

$\{a_1,a_2,a_3\ldots,a_n\} \underbrace{\rightarrow}_{\pi\ bijektiv} <\pi_i(a_1),\pi_i(a_2),..\pi_i(a_n)>$ gilt.

#Bem: $\pi(a_1)\in\{a_1,a_2,a_3\ldots,a_n\}$, $\pi(a_2)\in\{a_1,a_2,a_3\ldots,a_n\}$, $...\pi(a_n)\in\{a_1,a_2,a_3\ldots,a_n\}$

#Bez: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \ldots\ldots a_n \\ \pi(a_1) & \pi(a_2)\ldots\pi(a_n) \end{pmatrix}$

\# Frei nach Wikipedia $\{a_1,a_2,a_3\ldots,a_n\} \underbrace{\rightarrow}_{\pi\ bijektiv} <\pi(a_1),\pi(a_2),...\pi(a_n)>$

\# **DK3.1.1''** Jede Belegung einer geordneten Menge

\# $<\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)>$, π bijektiv,

$\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)\in\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}=X$,

\# heist Permutation von X.

SK3.1.1 $P_N=\{P_i|\text{alle } i\}$: $|P_N|=\prod_{k=1}^{n} k = n!$

\# Es gibt n! Verschiedene Belegungen einer geordneten Menge

\# $<\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)>$ mit

\# Elementen aus $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ wobei

$\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)\in X$, und π bijektiv ist.

#Bew: Induktion über k:

\# Für eine Permutation $\pi\in P_N$ gibt es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten die

\# Menge {1,2,..,k} abzubilden.

\# Für k=n ergibt sich dann die Behauptung des Satzes.

#I.A.:Für π(1) gibt es genau n Möglichkeiten.

\# (Im Bsp oben $\pi_1(1)=1$ $\pi_3(1)=2$ $\pi_5(1)=3$.

\# nur zum Überdenken mit Hilfe des Bsp:

\# Für π(1),π(2) gibt es genau n(n-2+1) Möglichkeiten.

\# Siehe K1Anl 3*(3-2+1)=3*2=6 Möglichkeiten.)

#I.H.:Für eine Permutation $\pi\in S_n$ gibt es $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ Möglichkeiten die

\# Menge {1,2,..,k} abzubilden; anders ausgedrückt:

\# Für π(1),π(2),..π(n) gibt es genau n(n-k+1) Möglichkeiten die

\# Menge {1,2,..,k}. abzubilden

\# (Anregung zur Vermutung siehe K1Anl)

#I.S.:Zu beweisen..Für eine Permutation $\pi\in S_n$ gibt es $n(n-1)\cdots(n-(k+1)+1)$

\# Möglichkeiten Menge {1,2,..,k,k+1} abzubilden; anders ausgedrückt:

Für π(1),π(2),..π(k),π(k+1) gibt es genau n(n-(k+1)+1) Möglichkeiten.
Bew:
Zur Hilfe Farbe rot siehe Anlage
Sei A={π(1),...,π(k)}. Dann gilt |A|=k, da π injektiv ist.
Das Bild π(k+1) von k+1 kann dann beliebig in {1,2,..,n}\A gewählt
werden. Dafür gibt es dann n-k Möglichkeiten.
Nach Induktionsvoraussetzung gibt es n···(n-k+1) Möglichkeiten die
Menge {1,2,..k} abzubilden, also gibt es dann n···(n-k+1)·(n-(k+1)+1)
Möglichkeiten {1,2,..,k+1} abzubilden.

- **DK3.1.2**

Permutationen mit Wiederholung: manche Objekte nicht untereinander unterscheidbar

Bsp Grundobjekte: 1;2;3;3;4

Bsp einer Permutation dazu: <1,3,4,3,2>

Andere Formulierung:

DK3.1.2' Jede Belegung einer geordneten Menge in Form eines Tupels
$[\pi(a_1),\pi(a_2),\dots,\pi(a_{n-k}), \underbrace{\pi(a),\pi(a),\dots}_{k\,mal},\pi(a)]$, π bijektiv,
$\pi(a_1),\pi(a_2),\dots,\pi(a_{n-k}), \underbrace{\pi(a),\pi(a),\dots}_{k\,mal},\pi(a) \in \{a_1, a_2, .., a_{n-k}, \underbrace{a,a,a,..,a}_{k\,mal}\}$,
(also k<n),
heist Permutation mit Wiederholung.
Beispiel für eine mögliche Permutation mit Wiederholung:
Objekte: k, k, k , 1, 2, 3, 4
[π(k)=3,π(k)=2,π(k)=k,π(k)=k,π(1)=1,π(2)=k,π(4)=4]=
[3,2,k,k,1,k,4]

#**SK3.1.2** Es gibt $\frac{n!}{k!}$ Permutationen (Belegungen) mit Wiederholung zu
$\{a_1, a_2, \dots, a_{n-k}, \underbrace{a,a,\dots}_{k\,mal},a\}$
Bew: Zunächst Objekte ohne Wiederholung a1,a2,…,a_n
Schreibweise: $P_{(1,2,\dots,\nu)_{(1,2,\dots,k!)}}$ bedeutet
P_{1_1}, P_{1_2}, ... $P_{1_{k!}}$, P_{2_1}, P_{2_2}, ... $P_{2_{k!}}$, ...,
P_{ν_1}, P_{ν_2}, ... $P_{\nu_{k!}}$
Sei $P_{(1,2,\dots,\nu)_\sigma} =< \pi_{(1,2,\dots,\nu)_\sigma}(a_1), \pi_{(1,2,\dots,\nu)_\sigma}(a_2),\dots, \pi_{(1,2,\dots,\nu)_\sigma}(a_n)>; \nu,\sigma \in N$
$T_{n-k} \subset \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ $|T_{n-k}|=n-k$, (n-k elementig)
$T_k=\{a_1, a_2, ..., a_n\}\setminus T_{n-k}$ (k elementig)
$\forall\ a_\lambda \in T_{n-k}$, gelte $\pi_{(1,2,\dots,\nu)_\sigma}(a_\lambda) = \pi_{(1,2,\dots,\nu)_\rho}(a_\lambda)$ $\forall\ \sigma \neq \rho$,
$P_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}} =< \pi_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}}(1), \pi_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}}(2),\dots, \pi_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}}(k)>$,
wobei $\pi_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}}(t) \in T_k$ $\forall\ t \in \{1,2,...,k\}$!!!!!!!!!
$\underset{SK1}{\Rightarrow}$ ∃ k! Permutationen $P_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}}$ ⇒
∃ k! Bilder $P_{1,2,\dots,\nu_{\sigma_{T_k}}} \to P_{1,2,\dots,\nu_\sigma} = P_{1,2,\dots,\nu_{1,2,\dots,k!}}$ ⇒
SK1: ∃ n!=$P_{n!}$ Permutationen zu $a_1, a_2, \dots, a_n$

∧ k! Permutationen , $P_{1,2,..,\nu_{1,2,...,k!}}$
(Bem: alle $P_{n!}$ Sind verschieden)
⇒ $\nu * k! = n!$ ⇒ $\nu = n!/k!$
Seien $a_{T_{k_1}}$, $a_{T_{k_2}}$ …, $a_{T_{k_k}}$ $\in T_k$ ∧ $a_{T_{k_1}} = a_{T_{k_2}} = \ldots = a_{T_{k_k}}$ ⇒
$P_{(1,2,\ldots,\nu)_1} = P_{(1,2,\ldots,\nu)_2} = \ldots . = P_{(1,2,\ldots,\nu)_{k!}}$ ⇒
Anzahl der Permutationen $\nu = n!/k!$
Bem:a) Gibt es nicht nur eine, sondern s Gruppen, mit jeweils
$k_1, k_2, \ldots, k_s$ identischen Objekten, so lautet die Formel
$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!,\ldots k_s!}$$
Sonderfall k identische Objekte, die restlichen n-k Elemente
auch identisch, ergibt $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ Permutationen mit Widerholungen

Bsp: Grundobjekte $G = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}\}$, $a_i \in G$, $i = 1,2,..,12$
werden auf 4 „Behälter" verteilt.

In Behälter A kommt 1 Element von G
B kommen 2 Elemente von G
C kommen 4 Elemente von G
D kommen 5 Elemente von G

A,B,C,D seien die Mengen der Zahlen in den Behältern und $A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$
($|A \cup B \cup C \cup D| = 12$).

Wieviele l Verteilungen V_l sind möglich,
wenn die Anordnung in den Behältern keine Rolle spielt?

Lös:Seien A,B,B,C,C,C,C,D,D,D,D,D Grundobjekte $\underset{SK\,5\,Bem}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$\exists$ $K = \frac{12!}{1!2!4!5!}$ Permutationen P_k, $k \in \{1,2,..,K\}$ mit Wiederholungen zu
A,B,B,C,C,C,C,D,D,D,D,D

Konstruktion eines Tupels P_k aus A,B,B,C,C,C,C,D,D,D,D,D durch
Abbildung der Elemente von G auf
Elemente von P_k:

Fall: • a_i geht an A ⇒ $[\ldots .\ \underbrace{A}_{ite\ Stelle}\ \ldots]$
• a_i geht an B ⇒ $[\ldots .\ \underbrace{B}_{ite\ Stelle}\ \ldots]$
• a_i geht an C ⇒ $[\ldots .\ \underbrace{C}_{ite\ Stelle}\ \ldots]$
• a_i geht an D ⇒ $[\ldots .\ \underbrace{D}_{ite\ Stelle}\ \ldots]$ usw für i=1,2,…,12

⇒ P_k enthält genau 1 Element von G in
A,
2 Elemente von G in B,
4 Elemente von G in C und
5 Elemente von G in D

⇒ P_k ist eine Permutation mit Wiederholungen zu
A,B,B,C,C,C,C,D,D,D,D,D

Umgekehrt: Ist irgend eine P_k gegeben, so liefert • eine
Verteilung V_l
der $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}$ $\forall$ l

$\Rightarrow$ ● Abbildung $\forall$ I $V_l \to P_k$ ist surjektiv

$\Rightarrow$ ●● Abbildung $\forall$ I $V_l \to P_k$ ist injektiv, da $V_{l_1} \neq V_{l_2} \Rightarrow P_{k_1} \neq V_{l_2}$

●,●● $\Rightarrow$ Abbildung $\forall$ I $V_l \to P_k$ ist injektiv $\Rightarrow$

$|V_l| = |P_k| = \dfrac{12!}{1!2!4!5!}$

- **DK3.2** Variationen von Objekten sind geordnete Stichproben k<n
  - **DK3.2.1**
    Variationen ohne Wiederholung
    Bsp: Elemente der Grundobjekte dürfen in jeder Stichprobe nur 1x entnommen werden. Grundobjekte 1;2;3;4;5 n=5,
    Stichproben <1;3;5>≠<5;1;3>
    „falsche" Stichprobe 1;2;2

SK3.2.1 Vor: Grundobjekte $a_1, a_2, \dots, a_n$;
geordnete Stichproben mit je k Objekten
Bez: ϕ für alle Variationen ohne Wiederholung oder auch alle geordneten Stichproben

Aussage: $\exists$ n(n-1)*(n-2)*...(n-k+1) Variationen ohne Wiederholung (VoW)

Bew: Induktion bei festem, beliebigem n von $\lambda \le k \le n$ nach $\lambda+1$

$\lambda=k=1$: Grundobjekte $a_1, a_2, \dots, a_n$; n VoW: $\langle a_1\rangle, \langle a_2\rangle, \dots, \langle a_n\rangle$

$\lambda=k=2$: Grundobjekte $a_1, a_2, \dots, a_n$;

$\langle a_1,a_2\rangle$ $\langle a_2,a_1\rangle$... $\langle a_n,a_1\rangle$

$\langle a_1,a_3\rangle$ $\langle a_2,a_3\rangle$… $\langle a_n,a_2\rangle$

… … … ...

$\langle a_1,a_n\rangle$ $\langle a_2,a_n\rangle$ … $\langle a_2,a_{n-1}\rangle$

Anzahl n-2+1=n-1

Gesamtzahl n*(n-2+1)

Anzahl n

$\lambda<k<n$: n(n-1)*(n-2)*...(n-λ+1) VoW

Bezeichnung der VoW: ϕ_ν, $\nu \in \{1,2,\dots n(n-1)*(n-2)*\dots(n-\lambda+1)\} \Rightarrow$

$|\nu| = |\{1,2,\dots n(n-1)*(n-2)*\dots(n-\lambda+1)\}| = n(n-1)*(n-2)*\dots(n-\lambda+1)$

$\lambda+1 \le k<n$: Zu beweisen Zahl der VoW $n(n-1)*(n-2)*\dots(n-(\lambda+1)+1) =$
$n(n-1)*(n-2)*\dots(n-\lambda)$

Sei $\phi_\nu = \langle a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \dots, a_{\nu_\lambda}\rangle$, eine VoW, wobei

$\{a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \dots, a_{\nu_\lambda}\} \cup \{a_{\nu_{\lambda+1}}, \dots, a_{\nu_n}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow |\{a_{\nu_{\lambda+1}}, \dots, a_{\nu_n}\}| = n-\lambda$

$\forall\ \phi_\nu$ gilt: $\langle a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \dots, a_{\nu_\lambda}, a_{\nu_\mu}\rangle$ $\forall$ $\mu = \lambda+1, \dots, n$ sind $n-\lambda$ VoWs λ-1

Gesamtzahl der $\text{VoWs}_{\lambda+1} = |\nu| * (n-\lambda) = n(n-1)*(n-2)*\dots(n-\lambda+1)(n-\lambda)$

Bem: $n*(n-1)*(n-2)*\dots*\cdot(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} =$

$$\frac{n*(n-1),\dots*(n-k+1)*(n-k)*(n-k-1)*,\dots,*1}{(n-k)*(n-k-1)*,\dots,*1}$$

- **DK3.2.2**
  Variationen mit Wiederholung
  Bsp: Elemente der Grundobjekte dürfen in jeder Stichprobe 1,2,…,k mal entnommen werden. Grundmenge n=5 1;2;3;4;5
  Stichproben k=3: <1;3;5>≠<5;1;3> aber auch <1;2;2>≠<2;1;2>

SK3.2.2 Vor: Grundobjekte $a_1, a_2, \dots, a_n$;
geordnete Stichproben mit je k Objekten
Variationen mit Wiederholung

Aussage: Es gibt $n \cdot n \cdot \ldots \cdot n = n^k$ Variationen mit Wiederholung (VmW), k<n

Bew: Induktion mit $\lambda \leq k$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig

$\lambda=1$: alle VmW n^1: $\langle a_1\rangle, \langle a_2\rangle, \dots, \langle a_n\rangle$

$\lambda=2$:

$$\begin{array}{l} \langle a_1,a_1\rangle, \langle a_2,a_1\rangle, \dots, \langle a_n,a_1\rangle \\ \langle a_1,a_2\rangle, \langle a_2,a_2\rangle, \dots, \langle a_n,a_2\rangle \\ \quad \dots \quad , \quad \dots \quad , \dots, \quad \dots \\ \langle a_1,a_n\rangle, \langle a_2,a_n\rangle, \dots, \langle a_n a_n\rangle \end{array} \quad \text{Anzahl n}$$

Anzahl n Gesamtzahl $n*n = n^{\lambda=2} = n^2$

λ: n^λ VmW, $\lambda<k<n$

$\lambda+1$: Zu beweisen $\exists$ $\underbrace{n*n*,\dots,*n}_{\lambda+1\,mal} = n^{\lambda+1}$ VmW,

Sei $\phi_\nu = \langle a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \dots, a_{\nu_\lambda}\rangle$, $\nu=1,2,\dots,n^\lambda$ eine VmW zu λ

$\forall\ \phi_\nu$ gilt: $\langle a_{\nu_1}, a_{\nu_2}, \dots, a_{\nu_\lambda}, a_{\nu_\mu}\rangle k\ \forall\ \mu=1,\dots,n$ sind n $VmWs_{\lambda+1}$

Gesamtzahl der $VoWs_{\lambda+1} = \underbrace{n*n*,\dots,*n}_{\lambda\,mal} *n = n^{\lambda+1}$

Andere Betrachtungsweise:

Vor: endliche Mengen A und B mit |A|=k, |B|=n

Aussage: $\exists$ genau n^k verschiedene Abbildungen von A nach B

Bew: Zunächst Bsp k=5, n=3 siehe Anlage Anl Variation mit Wh

$A=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, Konstruktion aller Abb von A nach B

a_1 wird auf ein Element von B abgebildet...|B|=n Möglichkeiten

a_2 wird auf ein Element von B abgebildet...|B|=n Möglichkeiten

….

a_k wird auf ein Element von B abgebildet...|B|=n Möglichkeiten

Aussage

● **DK3.3** Kombinationen von Objekten sind Stichproben, wobei die Reihenfolge der Elemente nicht berücksichtigt wird, d.h. ungeordnete Stichprobe

- **DK3.3.1** Kombination ohne Wiederholung
  Elemente der Grundobjekte dürfen in jeder Stichprobe nur 1x entnommen werden.
  Äquivalent:
  Eine Kombination ohne Wiederholung ist eine Teilmenge von $G=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ mit genau k Elementen.
  Bsp:Grundmenge n=5 $\{1,2,3,4,5\}$
  Stichproben k=3 $\{1,3,5\}=\{5,1,3\}$, (falsch $\{1,2,2\}$)

SK3.3.1.1
Vor: Kombinationen ohne Wiederholung nach DK3.3, DK3.3.1
Grundobjekte $a_1,a_2,\ldots,a_n$

Aussage: $\exists \quad \frac{n!}{(n-k)!*k!} = \frac{n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Kombinationen ohne Wiederholung (KoW)

Bem: $\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient.

//● **DK3.1**
// Permutationen sind mögliche Anordnungen der n Grundobjekte, d.h. k=n
// (d.h. jede Anordnung hat eine individuelle Reihenfolge)
// ● **DK3.1.1**
// Permutationen ohne Wiederholung: Objekte untereinander
// unterscheidbar

//**SK4** $P_N=\{P_i|\text{alle } i\}$: $|P_N|=\prod_{k=1}^{n} k = n!$

//# Es gibt n! Verschiedene Belegungen einer geordneten Menge
//# $<\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)>$ mit
//# Elementen aus $X=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ wobei
// $\pi(a_1),\pi(a_2),\ldots,\pi(a_k)\in X$, und π bijektiv ist.
//● **DK3.2** Variationen von Objekten sind <u>geordnete</u> Stichproben k<n
// ● **DK3.2.1**
// Variationen ohne Wiederholung
// Elemente der Grundobjekte dürfen in jeder Stichprobe nur 1x
// entnommen werden.

Bew: frei nach Skript Stefan Wagner
Sei m die Anzahl der KoW von $a_1,a_2,\ldots,a_n$, d.h. m k-elementige Teil<u>mengen</u> mit Elementen aus $a_1,a_2,\ldots,a_n$ $\underset{DK3..,SK2}{\Rightarrow}$
Aus den Elementen jeder KoW lassen sich k! geordnete Mengen bilden
$\Rightarrow$ Aus allen m KoW lassen sich m*k! geordnete Mengen bilden $\underset{DK3.2.1,SK2}{\Rightarrow}$

m*k! sind alle $\frac{n!}{(n-k)!}$ VoW $\Rightarrow$ $m*k!=\frac{n!}{(n-k)!}$ $\Rightarrow$ $m=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

Andere Formulierung:

//# **SK5** Bem: Gibt es nicht nur eine, sondern s Gruppen, mit jeweils

//# $k_1, k_2, \dots, k_s$ identischen Objekten, so lautet die Formel

//# $$\frac{n!}{k_1! k_2!, \dots k_s!}$$

DK3.3.1: $\binom{n}{k} = |\underbrace{T \subseteq \{1,2,..n\}}_{=A_k} \| T| = k \ |$

Definiere Menge

M_k={Alle Permutationen mit Wiederholung von $\underbrace{J, J, \dots, J}_{k_1 = k\,mal}, \underbrace{N, N, \dots, N}_{k_2 = n-k\,mal}$ } $\underbrace{\Rightarrow}_{SK\,5\,Bem}$

$|M_k| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Gibt es eine bijektive Abbildung $f: A_k \to M_k$?

- Sei $B \in A_k \Rightarrow B \subset \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit $|B| = k$

definiere f(B): Fall $a_i \in B \Rightarrow [\dots. \underbrace{J}_{i\,te\,Stelle} \dots]$

: Fall $a_i \notin B \Rightarrow [\dots. \underbrace{N}_{i\,te\,Stelle} \dots]$

Bsp: $\{a_1, a_2, \dots, a_5\}$, $B = \{a_2, a_3\} \Rightarrow f(B) = [NJJNN]$

$B = \{a_1, a_3, a_4\} \Rightarrow f(B) = [JNJJN]$

Umgekehrt: Gewählt beliebige Permutation mit Wiederholung $\in M_k \Rightarrow$

$B \subset \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ mit $[\dots. \underbrace{J}_{i\,te\,Stelle} \dots] \Rightarrow a_i \in B$,

$[\dots. \underbrace{N}_{i\,te\,Stelle} \dots] \Rightarrow a_i \notin B$

$\Rightarrow |B| = k \Rightarrow B \in A_k$

$\Rightarrow f(B) \to$ gewählte beliebige Permutation mit Wiederholung $\in M_k$

$\Rightarrow$ f surjektiv (jede Permutation mit Wiederholung $\in M_k$ wird von einem Element aus A_k getroffen.

- Seien $B_1, B_2 \in A_k$, $|B_1|, |B_2| = k$, $|B_1| \neq |B_2| \Rightarrow \exists\ a_i \in B_1, a_i \notin B_2 \Rightarrow$

in $f(B_1)$: $[\dots. \underbrace{J}_{i\,te\,Stelle} \dots]$, in $f(B_1)$: $[\dots. \underbrace{N}_{i\,te\,Stelle} \dots] \Rightarrow f(B_1) \neq f(B_2) \Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow$

f bijektiv

$\Rightarrow |A_k| = |M_k| = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

#Eigener Versuch, nicht beendet.

Induktion und Abbildung VoW $\to$ KoW (bevor ich obigen Bew im Internet, eingestellt von Stefan Wagner, gefunden habe)

k: • $\frac{n(n-1)*\dots,*(n-k+1)}{k!} = m_k \in \mathbb{N}$,

$\frac{n(n-1)*\dots,*(n-k+1)(n-k)}{k!} \in \mathbb{N}$, $\frac{(k+1)n(n-1)*\dots,*(n-k+1)}{k!} \in \mathbb{N}$,

k+1: Zu beweisen $\exists$ $\frac{n(n-1)*\dots,*(n-(k+1)+1)}{(k+1)!} = \frac{n(n-1)*\dots,*(n-k)}{(k+1)!}$ KoWs

Zunächst $\frac{n(n-1)*\dots,*(n-k)}{(k+1)!} \in \mathbb{N} \dots$.

$$\frac{n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)*(n-k)}{(k+1)k!} * \frac{(k+1)n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)}{k!} =$$

$$\frac{n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)}{k!} * \frac{n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)}{k!} \underbrace{n-k}_{\in N} \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\frac{n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)*(n-k)}{(k+1)k!} \in \mathbb{N} \Rightarrow m_{k+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow m_k \in \mathbb{N} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$$

SK6.1: ∃ n*(n-1)*(n-2)*...*·(n-k+1) $VoW_{n,k}$

- ⇒ diese $VoW_{n,k}$ lassen sich in Gruppen VoW_{ν_μ}, ν=1,2,..,m_k; μ=1,2,...,k! einteilen

Wahl der Gruppen so, dass
∀ μ gilt $< a_{\nu_{\mu_1}}, a_{\nu_{\mu_2}}, \ldots, a_{\nu_{\mu_k}} > \underbrace{\rightarrow}_{VoW \rightarrow KoW} \{ a_{\nu_{\mu_1}}, a_{\nu_{\mu_2}}, \ldots, a_{\nu_{\mu_k}} \} \subset \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ⇒

$VoW_{\nu_1} = VoW_{\nu_2} = ... = VoW_{\nu_{k!}} \Rightarrow \exists\ m_k = \dfrac{n(n-1)*\ldots,*(n-k+1)}{k!}$ KoWs

SK3.3.2.2 Binomischer Lehrsatz

$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^n y^1 + \binom{n}{2} x^n y^2 + ... + \binom{n}{n} x^{n-n} y^n$

Bew: Beim Ausmultiplizieren entsteht ein Summe von Produkten der Form wie beispielsweise $\underbrace{x*y*y*x*x*y*\ldots*x}_{n\ Faktoren}$

Dieses y ist der 6. Klammer zugeordnet

Die Summanden enthalten eine gewisse Anzahl von x und eine gewisse Anzahl von y. Es gibt eine gewisse Anzahl von Summanden, die jeweils gleich viele x gleich viele y enthalten, die aber aus verschiedenen Klammern „stammen"

n mal x: $xxxxxx\ldots x = x^n = x^n y^0 = \binom{n}{0} x^n y^0$.

n-1 mal x: $yxxxxx\ldots x_n = xyxxxx\ldots x = .. = xxxxxx\ldots y = x^{n-1}y$

Es gibt also n Summanden $x^{n-1}y = \binom{n}{1} x^{n-1}y$

n-k mal x: Es gibt z. B. einen Summanden $\underbrace{x*x*\ldots x}_{n-k mal} * \underbrace{y*y*\ldots}_{k mal}*y$

Grundmenge $\underbrace{x, x, \ldots x}_{n-k\ mal}, \underbrace{y, y, \ldots}_{k\ mal}, y$,

ein Produkt aus Elementen jeder Permutation mit Wiederholung davon ergibt einen Summanden, in dem x n-k mal,y k mal als Faktor erscheint: $x^{n-k} * y^k$. $\underbrace{\Rightarrow}_{SK\ 3.1.2 Bem.a}$

$\exists\ \dfrac{n!}{k!(n-k)} \underbrace{=}_{SK\ 3.3.1.1} \binom{n}{k}$ solcher Faktoren.

- **DK3.3.2** Kombination mit Wiederholung
  Elemente der Grundobjekte dürfen in jeder Stichprobe 1,2,…,k mal entnommen werden
  Stichproben k=3 <1;3;5>=<5;1;3>, aber auch <1;2;2>=<2;1;2>

SK6.4 Kombinationen mit Wiederholung
Vor: Kombination mit Wiederholung
Grundobjekte $a_1, a_2, \dots, a_n$, $k \le n$ werden ausgewählt
Aussage: Zahl der Kombination mit Wiederholung: $\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} = \binom{n+k-1}{k}$

//**SK3.3.1.1**
//Vor: Kombinationen ohne Wiederholung nach DK3.3, DK3.3.1
// Grundobjekte $a_1, a_2, \dots, a_n$
//Aussage: $\exists$ $\frac{n!}{(n-k)!*k!}$ Kombinationen ohne Wiederholung (KoW)

Bew: Zunächst ein Beispiel
a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; $k=3$, -: a_i nicht ausgewählt

Code: T Trennlinie, X für jedes a_i

Auswahlen: a_1	a_2	a_3	a_4	a_5		
-	a_2, a_2	-	a_4	-	TXXTTXT	n+k-1=5+3-1 Elemente
a_1	a_2	a_3	-	-	XTXTXTT	
-	-	a_3 a_3		a_5	TTXXTTX	
-	-	-	a_3 a_3	a_5	TTTXTXX	

Jeder Code gehört zu einer Kombination mit Wiederholung aus 3 Elementen der Grundmenge a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;
Alle Codes gehören zu den Kombinationen ohne Wiederholung mit k=3 Elementen der Grundmenge mit n'=n+k-1=5+3-1 Elementen: T,T,T,T,X,X,X

SK3.1.2: $\exists$ $\frac{n'!}{k!(n'-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3!4!} = 35$
Zahl der Kombinationen mit Wiederholung aus 3 Elementen der Grundmenge mit 5 Elementen a_1, a_2, a_3, a_4, a_5;

Allgemein:

Auswahl von k Elementen aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Für eine beliebige Auswahl sei

x_1 die Anzahl der a_1

x_2 die Anzahl der a_2 …

x_n die Anzahl der a_n

d.h. $x_i \in \mathbb{N}_0$ ist die Anzahl der Elemente a_i in dieser Auswahl $\forall\ i \in \{1,2,...,n\}$

$x_i \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow x_1+x_2+...+x_n=k$

Seien andererseits $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{N}_0$, $y_1+y_2+\ldots+y_n=k$ gegeben, so liefert dies eine Auswahl von k Elementen aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in der a_1 genau y_1 mal vorkommt; allgemein a_i genau y_i mal vorkommt

$\Rightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten k Elemente aus $a_1, a_2, \ldots, a_n$ auszuwählen
Mehrfachauswahl erlaubt

= Anzahl der Lösungen der Gleichung $x_1+x_2+...+x_n=k$ mit $x_1, x_2, \ldots, x_n \in N_0$.

Sei $L=\{(<x_1, x_2, \ldots, x_n> \in \underbrace{N_0 x N_0 x \ldots x N_0}_{n\,mal} \mid x_1+x_2+...+x_n=k\}$

Im Beispiel Zeilen in der Tabelle

$\forall$ $<x_1, x_2, \ldots, x_n>$ definiere:

$T=\{ [\underbrace{X,X,X..}_{x_1 mal}, T, \underbrace{X,X,X..}_{x_2 mal}, \ldots, T\, \underbrace{X,X,X..}_{x_n mal}] \mid$

$f(<x_1, x_2, \ldots, x_n>) = [\underbrace{X,X,X..}_{x_1 mal}, T, \underbrace{X,X,X..}_{x_2 mal}, \ldots, T\, \underbrace{X,X,X..}_{x_n mal}] \}$

f ist bijektiv: $\forall\ [\underbrace{X,X,X..}_{x_1 mal}, T, \underbrace{X,X,X..}_{x_2 mal}, \ldots, T\, \underbrace{X,X,X..}_{x_n mal}]\ \exists <x_1, x_2, \ldots, x_n>$

$\Rightarrow$ f surjektiv

Sei $x_i \neq x_i`$ für irgend ein i d.h $\Rightarrow$

$f(<x_1, x_2, ..x_i, .., x_n>) \neq f(<x_1, x_2, ..x_i', .., x_n>) \Rightarrow$

$[\underbrace{X,X,X..}_{x_1 mal}, T, \underbrace{X,X,X..}_{x_2 mal}, ..., \underbrace{X,X,X..}_{x_i mal} \ldots, T\, \underbrace{X,X,X..}_{x_n mal}] \neq$

$[\underbrace{X,X,X..}_{x_1 mal}, T, \underbrace{X,X,X..}_{x_2 mal}, ..., \underbrace{X,X,X..}_{x_i' mal} \ldots, T\, \underbrace{X,X,X..}_{x_n mal}]$

$\Rightarrow$ f injektiv

f erzeugt alle Kombinationen ohne Wiederholung aus der Grundmenge mit n+k-1 Elementen, die k mal X enthalten. In anderen Kombinationen ist mindetens ein X mehr oder ein X weniger enthalten. Dann hat die Stichprobe k+1 oder k-1 mal X, gehört also nicht zu den Kombinationen aus n+k-1 Elementen, die k mal X enthalten.

F injektiv $\Rightarrow |L|=|T| \underbrace{=}_{SK\,3.1.2} \exists\ \frac{n'!}{k!(n'-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n+k-1-k)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$