A0.1.1

a)Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C\subset A \Leftrightarrow A\cup C = A$

#Vorbemerkung:Es wird wiederholt D0.1.3,Bem1 benutzt:

$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1\subset M_2$ <u>und</u> $M_2\subset M_1$

Bew: Z.z.(.)$C\subset A \Rightarrow A\cup C=A$ (..)$A\cup C=A \Rightarrow C\subset A$

(.) $x\in A \underbrace{\Rightarrow}_{C\subset A} x\in A \vee x\in C \Rightarrow x\in A\cup C \wedge x\in A \Rightarrow A\hat{}C \circ A$

$x\in A\hat{}C = x\in A \vee x\in C \underbrace{\Rightarrow}_{C\subset A} x\in A \Rightarrow x\in A\hat{}C \wedge x\in A \Rightarrow A\hat{}C \subset A \Rightarrow$

$A\hat{}C \circ A \wedge A\hat{}C \subset A = A\cup C = A$

kürzer: $x\in A\cup C \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\,1} x\in A$ oder $x\in C \underbrace{\Leftrightarrow}_{C\subset A} x\in A$

(..)Sei $x\in C \Rightarrow x\in A$ oder $x\in C \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\,1.)} x\in \underbrace{A\cup C}_{=A} \Rightarrow x\in A$.

Also $C\subset A$

b)Es seien A,B Mengen. Zeige: $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B = A$

Bew:z.z:(.)$A\subset B \Rightarrow A\cap B = A$ (..)$B\cap A = A \Rightarrow A\subset B$

(.)Unabhängig von $A\subset B$ gilt wegen $x\in B\cap A \Rightarrow x\in B \wedge x\in A \Rightarrow$

$x\in A \Rightarrow \qquad B\cap A \subset A$

$x\in A \underset{A\subset B}{\Rightarrow} x\in B \wedge x\in A \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Leftrightarrow} x\in A \wedge x\in B\cap A \Rightarrow B\cap A \supset A$

kürzer: $x\in B\cap A \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Leftrightarrow} x\in A \wedge x\in B \underset{A\subset B}{\Leftrightarrow} x\in A$

(..)$x\in A \Rightarrow x\in B\cap A \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Leftrightarrow} x\in B \wedge x\in A \Rightarrow x\in B$. Also $A\subset B$

andere Formulierung

(.)Es gilt für beliebige Mengen A,B:$A\cap B\subset A$

(denn $x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in A$)

Es sei $A\subset B$. Z.z. vgl oben : $A\subset A\cap B$

Sei $x\in A\subset B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B$ $x\in A\cap B \Rightarrow x\in A\cap B$

(..)Es gelte $A\cap B=A$. Z.z.: $A\subset B$

Sei $x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in B$

(.) und (..)$\Rightarrow$ Beh

A0.1.2

Finde diejenige Menge A, deren Potenzmenge so wenig Elemente enthält wie nur möglich

Lös:Die Potenzmenge einer Menge ist niemals leer, denn sie enthält immer die Teilmengen $\emptyset$ und A; diese sind genau dann gleich, wenn A die leere Menge ist. Also gilt: Ist $A\neq\emptyset$, so hat $P_{(A)}$ Mindestens 2 Elemente. Daher ist die gesuchte Menge $A=\emptyset$

A0.1.3

Charakterisiere alle Mengen A,deren Potenzmenge genau 2 Elemente hat

A0.1.4

Charakterisiere alle Mengen A, deren Potenzmenge nur endlich viele Elemente hat

A0.1.5

Seien $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ und $M=AxB=\{(a_i,b_j),\ i,j=1,2\}$.

Bestimme die Potenzmenge von M.

A0.1.6
Seien A_j Mengen mit n_j Elementen für $1 \leq j \leq n$. Bestimme die Anzahl der Elemente von $A_1 * ... * A_n$.

A0.1.7
In der linearen Algebra wird $\mathbb{R}^n$ meist als Menge der Spaltenvektoren der Länge n definiert. Wieso ist die streng genommen nicht gleich dem kartesischen Produkt $\mathbb{R} * ... \mathbb{R}$ (mit n Faktoren)?

A0.1.8
Zeige:Die Menge aller reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten kann man als kartesisches Produkt von $\mathbb{R}^n$ mit sich selber (m mal) auffassen.

A0.1.9
Es seien A,B Mengen. Zeige:
a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
//D0.1.6 (5) $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ *//*
Bew: $M \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A) \wedge M \in \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset A \wedge M \subset B \Leftrightarrow$
$M \subset A \cap B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \in \mathcal{P}(A \cap B)$
„⇒" Sei $x \in M \underset{M \subset B \wedge M \subset A}{\Rightarrow} x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in M \wedge x \in A \cap B \Rightarrow x \in M \in P(A \cap B)$

„⇐" Sei $x \in M \underset{M \in A \cap B}{\Rightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in M \subset A \cap B$
b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
//D0.1.4 (4) 1.) $M_1 \cup M_2 := \{x / x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ *//*
//D0.1.6 (5) $\mathcal{P}(M) := \{A / A \subseteq M\}$ *//*
Bew: $M \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 1.)} M \in \mathcal{P}(A) \vee M \in \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset A \vee M \subset B \underbrace{\Rightarrow}_{*}$
(Umkehrung stimmt nicht,siehe c)
$M \subset A \cup B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
$* x \in M \Rightarrow x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ gilt im allgemeinen nicht(anhand eines Gegenbeispiels)
Lös: $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $a \neq b$, $A \cup B = \{a, b\}$
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{A\}\} \cup \{\emptyset, \{B\}\} = \{\emptyset, A, B\} = \{\emptyset, \{a\}\{b\}\} \neq \{\emptyset, \{a\}\{b\}\{a, b\}\} =$
$\mathcal{P}(A \cup B)$. Also $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$

A0.1.10 Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Zeige:
a) $(A_1 x A_2) \cap (B_1 x B_2) = (A_1 \cap B_1) x (A_2 \cap B_2)$
//D0.1.4 (4) 2.) $M_1 \cap M_2 := \{x / x \in M_1 \wedge x \in M_2$ *//*

//D0.1.7 (5) $M_1 * M_2 := \{(x,y) \mid x\in M_1 \wedge y\in M_2\}$//

Bew: $(x_1,x_2)\in(A_1xA_2)\cap(B_1xB_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.4\ 2.)} (x_1,x_2)\in A_1xA_2 \wedge (x_1,x_2)\in B_1xB_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.7\,)}$

$(x_1\in A_1 \wedge x_2\in A_2) \wedge (x_1\in B_1 \wedge x_2\in B_2)\Leftrightarrow$

$(x_1\in A_1 \wedge x_1\in B_1) \wedge (x_2\in A_2 \wedge x_2\in B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.4\ 2.)}$

$x_1\in A_1\cap B_1 \wedge x_2\in A_2\cap B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.7\,)} (x_1,x_2)\in(A_1\cap B_1)x(A_2\cap B_2)$

b) $(A_1xA_2)=\emptyset \Leftrightarrow A_1=\emptyset \wedge A_2=\emptyset$

//D0.1.7 (5) $M1*M2 := \{(x,y) \mid x\in M_1 \wedge y\in M_2\}$//

dazu äquivalente Aussage $(A_1xA_2)\neq\emptyset \Leftrightarrow A_1\neq\emptyset \wedge A_2\neq\emptyset$

Bew: $(A_1*A_2)\neq\emptyset \Leftrightarrow \exists\ (a_1,a_2) \in A_1*A_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.7} \exists\ a_1\in A_1 \wedge \exists\ a_2\in A_2 \Leftrightarrow$

$A_1\neq\emptyset \wedge A_2\neq\emptyset$

Andere Formulierung:

„$\Rightarrow$„ Sei $(A_1*A_2)=\emptyset$. Annahme: $A_1\neq\emptyset \wedge A_2\neq\emptyset \Rightarrow \exists\ a_1\in A_1 \wedge \exists\ a_2\in A_2 \Rightarrow$

$(a_1,a_2)\in A_1xA_2$ Widerspruch da $(A_1xA_2)=\emptyset \Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow A_1=\emptyset \vee A_2=\emptyset$

„$\Leftarrow$" Sei $A_1=\emptyset \vee A_2=\emptyset$. Annahme: $(A_1xA_2)\neq\emptyset \Rightarrow (a_1,a_2)\in A_1xA_2 \Rightarrow$

$\exists\ a_1\in A_1 \wedge \exists\ a_2\in A_2 \Rightarrow A_1\neq\emptyset \wedge A_2\neq\emptyset$.

Widerspruch, also Annahme falsch, d.h. $(A_1xA_2)=\emptyset$.

c) (.) $A_1\subset B_1 \wedge A_2\subset B_2 \Rightarrow A_1xA_2\subset B_1xB_2$;

(..) $A_1xA_2\subset B_1xB_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1xA_2\neq\emptyset} A_1\subset B_1 \wedge A_2\subset B_2$.

Bew: (.) $(A_1\subset B_1 \wedge A_2\subset B_2) \wedge$ sei $(x_1,x_2)\in A_1xA_2 \Rightarrow x_1\in A_1 \wedge x_2\in A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1\subset B_1 \wedge A_2\subset B_2}$

$x_1\in B_1 \wedge x_2\in B_2 \Rightarrow (x_1,x_2)\in B_1xB_2 \Rightarrow A_1xA_2\subset B_1xB_2$

(..) Sei $\underbrace{x_1\in A_1}_{\Rightarrow A_1\neq\emptyset} \underbrace{\Rightarrow}_{b):\,A_1xA_2\neq\emptyset\Rightarrow A_2\neq\emptyset} \exists\ x_2\in A_2 \Rightarrow (x_1,x_2)\in A_1*A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1xA_2\subset B_1xB_2} (x_1,x_2)\in B_1*B_2 \Rightarrow$

$x_1\in B_1 \wedge x_2\in B_2 \Rightarrow \underbrace{x_1\in A_1}_{\Rightarrow A_1\neq\emptyset} \wedge x_1\in B_1 \Rightarrow A_1\subset B_1$

A0.1.11 Setze $B_j=X\setminus A_j\ \forall\ j\in J$ und führe die zweite de Morgansche Regel auf die erste zurück: $M_1\subset M_2(\subset M_3) \Leftrightarrow M_2^C\subset M_1^C$

A0.1.12 Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C\subset A \Leftrightarrow (A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$

//Distributivgesetze (8): $M_1 \cup (M_2\cap M_3) = (M_1\cup M_2) \cap (M_1\cup M_3)$//

//D0.1.4 (4) 2.) $M_1\cap M_2 := \{x \mid x\in M_1$ und $x\in M_2\}$//

Bew: $\Rightarrow (A\cap B)\cup C \underbrace{=}_{Distributivgesetz} \underbrace{(A\cup C)}_{=A,\,da\,C\subset A} \cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$

„$\Leftarrow$" Sei $x\in C \Rightarrow x\in A\cap B \vee x\in C \Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup C$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D\,0.1.4.2\ 2.)}$ $x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \Rightarrow C \subset A$

Widerspruchsbeweis:
Annahme $C \not\subset A$ trotzdem $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$...?
$C \not\subset A \Rightarrow x \in C \wedge x \notin A \Rightarrow \neg (x \in A \wedge x \in (B \hat{} C) \Rightarrow x \notin (A \cap (B \hat{} C))$
$\Rightarrow x \in A \vee x \in (B \hat{} C \Rightarrow x \in (A \cap (B \hat{} C))$
$\Rightarrow (A \cap B) \hat{} C \neq A \cap (B \hat{} C)$ Widerspruch zu
$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$
$\Rightarrow x \in C \wedge x \in A \Rightarrow C \subset A$

A0.1.13 (Siehe auch Distributivgesetze)
Seien A,B und C Mengen. Zeige:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Lös: $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow$
$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

A0.1.14
Es seien A,B und C Teilmengen einer Menge $X \neq \emptyset$. Zeige:
a) $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.
Lös: (.) "$\Rightarrow$": Sei $x \in B^c \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A$ (sonst $x \in A \Rightarrow x \in B$ Widerspruch) $\Rightarrow$
$x \in A^c \Rightarrow B^c \subset A^c$
(..) "$\Leftarrow$": Sei $B^c \subset A^c \underbrace{\Rightarrow}_{(.)} (A^c)^c \subset (B^c)^c \Rightarrow A \subset B$

b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
Lös: Sei $x \in (A \cap B)^c$ baf $\Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow$
$x \in A^c \vee x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

A0.1.15 Beweise: $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
#Lös: $\forall\ x \in (A \setminus (B \setminus C)$ gilt: $\{x \in A \ \hat{}\ x \notin (B \setminus C)\} \Leftrightarrow \{x \in A \ \hat{}(x \notin B \ \hat{}\ x \in C)\} \Leftrightarrow$
\# $\{x \in A \ \hat{}(x \notin B) \ \hat{}\ (x \in A \ \hat{}\ x \in C)\} \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$

A0.1.16
Def: $\Delta(Z) := \{(x,y) \in Z \mid x=y\} \subset Z^2$, Zeige: $X \subset Y \Leftrightarrow \Delta(X) \subset \Delta(Y)$
Bew: „$\Rightarrow$" Sei $X \subset Y$ & $(a,b) \in \Delta(X) \Rightarrow (a,b) \in X^2 = X x X$, $a=b \Rightarrow (a,b) \in \Delta(Y)$
„$\Leftarrow$" Sei $\Delta(X) \subset \Delta(Y)$ & $x \in X \Rightarrow (x,x) \in X^2 \Rightarrow (x,x) \in \Delta(X) \Rightarrow (x,x) \in \Delta(Y) \Rightarrow$
$(x,x) \in Y^2 \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in X \wedge x \in Y \Rightarrow X \subset Y$

A0.1.17 Mengen in einfacher Form angeben

a) $X = \bigcup_{q \in Q} \bigcap_{\epsilon > 0, \epsilon \in R} [q-\varepsilon, q+\varepsilon]$
Lös: Sei $q \in \mathbf{Q}$ baf $\Rightarrow q \underbrace{\in}_{q-\varepsilon \le q \le q+\varepsilon} [q-\varepsilon, q+\varepsilon] \supset \bigcap_{\epsilon > 0, \epsilon \in R} [q-\varepsilon, q+\varepsilon]$

- $x > q \Rightarrow \exists\ \varepsilon_t > 0$: $x > q + \varepsilon_t +$ (Bsp $\varepsilon_t = \frac{1}{2}(x-q)$) $\Rightarrow x \notin [q-\varepsilon_t, q+\varepsilon_t]$
- ●● $x > q$ analog $x \notin [q-\varepsilon_t, q+\varepsilon_t]$

● & ●● $x \notin \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon] \Rightarrow \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\{q\} \Rightarrow$

$X= \bigcup_{q\in Q} \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]= \bigcup_{q\in Q} \{q\}=\mathbb{Q}$.

b) $Y= \bigcap_{q\in Q} \bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

Lös : Sei $q\in\mathbb{Q}$ baf, x beliebig, $\varepsilon>|x-q|$ beliebig $\Rightarrow x\in[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \underbrace{\Rightarrow}_{unabhängig\ von`q}$

$x\in \bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon] \Rightarrow \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\mathbb{R} \Rightarrow$

$Y= \bigcap_{q\in Q} \bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]= \bigcap_{q\in Q} \underbrace{=}_{?} \mathbb{R}$.

c) $Z= \bigcup_{q\ni Q} \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

Lös: $\varepsilon>0$ baf, wähle $n\in\mathbb{N}$: $n \underbrace{\leq}_{N\ unbeschränkt} 2\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{0\in Q,n\in Q} =[0-\varepsilon,0+\varepsilon]\in \bigcap_{q\in Q}$ & $[n-\varepsilon,n+\varepsilon]\in \underbrace{\Rightarrow}_{n<2\varepsilon} \bigcap_{q\in Q}$

$[0-\varepsilon,0+\varepsilon]\cap[n-\varepsilon,n+\varepsilon]=\emptyset \Rightarrow \bigcap_{q\in Q} ([0-\varepsilon,0+\varepsilon]\cap[n-\varepsilon,n+\varepsilon])=\emptyset \underbrace{\Rightarrow}_{\varepsilon\ beliebig}$

$Z= \bigcup_{q\ni Q} \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [[q-\varepsilon,q+\varepsilon]= \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} \emptyset=\emptyset$