A1.1.1 Zeige:

a) $\forall\ a \in K: a \otimes 0 = 0$

//Konventionen: $a\otimes b \oplus c \otimes d := (a\otimes b)\oplus(c\otimes d)$ $\quad a-b := a \oplus(-b)$

// $-a-b := (-a)\oplus(-b)$ $\quad \frac{a}{b} := {}^{a}/_{b} : = a:b := a\otimes b^{-1}, b\neq 0$

// b^{-1}:= inverses Element von b

Lös: Verwendung von - siehe Konventionen.

Sei $b=a\otimes 0$ gesetzt, b=0?

$b=a\otimes(0\oplus 0)=(a\otimes 0)\oplus(a\otimes 0)=b\oplus b \Rightarrow$

$0=b-b=((b\oplus b)-b=b\oplus(b-b)=b\oplus 0=b$

//D1.1.7(307)

//(K1⊕) Assoziativgesetz für Assoziativgesetz für ⊕:

// $(a\oplus b)\oplus c = a\oplus(b\oplus c)\ \ \forall\ a,b,c\in K,$

//(K2⊕) Existenz des ⊕ neutralen Elements bzgl ⊕:

// $\exists$ genau ein Element $0\in K$ mit $a\oplus 0 = a\ \ \forall\ a\in K$

//(K3⊕) Existenz eines Inverselements bzgl ⊕:

// $\forall\ a\in K\ \exists$ genau ein $-a\in K$ mit $a\oplus(-a)=0$

//(K3⊗) Existenz des bzgl ⊗ inversen Elements

// $\forall\ a\in K\setminus\{0\}, \exists$ genau ein Element $a^{-1}\in K$ mit $a\otimes a^{-1}=1$

//(K4⊗) Kommutativgesetz bzgl ⊗: $a\otimes b=b\otimes a\ \ \forall\ a,b\in K$

//(KD⊕⊗) Distributivgesetz für ⊕ und ⊗: $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$

b) Das additive Inverse $-a$ zu einem $a\in K$ ist eindeutig bestimmt und es gilt $-a=(-1)\otimes a$, wobei -1 das additive Inverse der Zahl 1 bedeutet.

Lös: Gelte $a\oplus b=0$ und $a\oplus c=0$.

$b \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\oplus)} b\oplus 0 = b\oplus(a\oplus c) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} (b\oplus a)\oplus c = \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} (a\oplus b)\oplus c = 0\oplus c = c,$

also b=c.

$a+(-1)\otimes a \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)(KD\oplus\otimes)} a\otimes(1\oplus(-1))=a\otimes 0 \underbrace{\Rightarrow}_{a)} a\otimes 0=0 \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\otimes)}$

$(-1)\otimes a$ additives Inverses zu a.

//**D1.1.7**(307)

//(K1⊗) Assoziativgesetz für ⊗: $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c\ \ \forall\ a,b,c\in K$

//(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:

// $\exists$ genau ein Element $1\in K$ mit $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a\ \ \forall\ a\in K$

//(K4⊗) Kommutativgesetz bzgl ⊗: $a\otimes b=b\otimes a\ \ \forall\ a,b\in K$

c) Das multiplikative Inverse a^{-1} zu einem $a\in K\setminus\{0\}$ ist eindeutig bestimmt

Lös: Ann $a\otimes b=1=a\otimes c \Rightarrow c \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)} c\otimes(a\otimes b) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)} (c\otimes a)\otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)} (a\otimes c)\otimes b=$

$1\otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)} b \Rightarrow$ Beh

A1.1.2

Es sei K ein Körper und $a,b \in K$. Zeige die Binomische $\underbrace{=}_{(D)}$

Formel $(a \oplus b)^2 = a^2 \oplus 2 \otimes a \otimes b \oplus b^2$ nur mit Hilfe der Körperaxiome.
Hierbei ist $2 := 1 \oplus 1$ und $x^2 = x \otimes x$ für $x \in K$

//***D1.1.7****(307)*
//(K1⊕) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)\ \forall\ a,b,c \in K$,
//(K1⊗) $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c\ \ \forall\ a,b,c \in K$
//(K2⊗) Existenz des bzgl ⊗ neutralen Elements Eins:
// $\exists$ genau ein Element $1 \in K$ mit $1 \neq 0$ und $a \otimes 1 = a\ \forall\ a \in K$
// $\forall\ a \in K \setminus \{0\}, \exists$ genau ein Element $a^{-1} \in K$ mit $a \otimes a^{-1} = 1$
//(K4⊗) $a \otimes b = b \otimes a\ \forall\ a,b \in K$
//(KD⊗⊕) $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$

Bew: $(a \oplus b)^2 = (a \oplus b) \otimes (a \oplus b) \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\otimes\oplus)} (a \oplus b) \otimes a \oplus (a \oplus b) \otimes b \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$

$a \otimes (a \oplus b) \oplus b \otimes (a \oplus b) \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\otimes\oplus)} (a \otimes a \oplus a \otimes b) \oplus (b \otimes a \oplus b \otimes b) \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$

$(a^2 \oplus a \otimes b) \oplus (a \otimes b \oplus b^2) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus) mehrmls} a^2 \oplus (a \otimes b \oplus a \otimes b) \oplus b^2 \underbrace{=}_{D1.1.7(K2\otimes)}$

$(a^2 \oplus (1 \otimes (a \otimes b)) \oplus (1 \otimes (a \otimes b)) \oplus b^2 \underbrace{=}_{D1.1.7(KD\otimes\oplus)}$

$(a^2 \oplus (a \otimes b) \otimes (1 \oplus 1)) \oplus b^2 \underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)} (a^2 \oplus 2 \otimes (a \otimes b)) \oplus b^2 = a^2 \oplus 2 \otimes a \otimes b \oplus b^2$
Klammern können wegen (K1⊕) und (K1⊗) weggelassen werden

A1.1.3 Gegeben sei ein Körper $(K,+,*)$. Setze man $2:=1+1$. Zeige:
Definiert man auf (K) Abbildungen ⊕ und ⊗ durch:

a⊕b=a+b+2, a⊗b:=2a+2b+a*b+2, so erhält man einen Körper K*
mit Addition ⊕ und Multiplikation ⊗

Lös: Definiere 4:=2+2=2*2=2*(1+1)=2*1+2*1=4

Überprüfung der Körperaxiome für ⊕ und ⊗

(K1⊕) Für a,b,c∈K gilt (a⊕b)⊕c=(a+b+2)⊕c=a+b+2+c+2=a+b+c+4=
a+(b+c+4)=a+(b⊕c)+2=a⊕(b⊕c)

(K2⊕) Für a∈K gilt a⊕0=a ⇔ a+0+2=a ⇔ 0+2=0 ⇔ 0=-2 d.h. 0=-2 ist eindeutiges neutrales Element bzgl a.

(K3⊕) Es sei a∈K. Dann gilt ⇔ a⊕(-a)=0 ⇔ a+(-a)+2=-2 ⇔
(-a)=-a-4, d.h. -a-4 ist das eindeutige additive Inverse zu a bzgl⊕

(K4⊕) Für a∈K gilt: a⊕b=a+b+2=b+a+2=b⊕a

(K1⊗) Für a,b,c∈K gilt:

- a⊗(b⊗c)=a⊗(2b+2c+bc+2)=
  2a+2(2b+2c+bc+2)+a(2b+2c+bc+2)+2=
  2a+4b+4c+2bc+4+2ab+2ac+abc+2a+2=
  6+4a+4b+4c+2ab+2ac+2bc+abc
- (a⊗b)⊗c=(2a+2b+ab+2)⊗c=
  2(2a+2b+ab+2)+2c+(2a+2b+ab+2)c+2=
  4a+4b+2ab+4+2c+2ac+2bc+abc+2c+2 =
  6+4a+4b+4c+2ab+2ac+2bc+abc
  ⇒
- a⊗(b⊗c)=(a⊗b)⊗c

(K2⊗) ∀ a≠0=-2 gilt a⊗1=a ⇔ 2a+2*1+a*1+2=a ⇔
a+2*1+a*1+2=0 ⇔ (a+2)(1+1)=0 ⇔ 1+1=0 ⇔ 1=-1
d.h., 1=-1 ist das eindeutige Einselement bzgl ⊗
(Beachte 0⊗1=(-2)⊗(-1)=2(-2)+2(-1)+2+2=-2=1)

(K3⊗) ∀ a≠0 gilt a⊗a^{-1}=1 ⇔ 2a+2a^{-1}+aa^{-1}+2=-1 ⇔
a^{-1}(a+2)=-1-2-2a ⇔ $a^{-1}=\frac{-1-2-2a}{a+2}$ d.h. $\frac{-3-2a}{a+2}$
ist das eindeutige Inverse zu a≠0 bzgl ⊗

(K4⊗) Für a,b∈K gilt: a⊗b=2a+2b+ab+2=2b+2a+ba+2=b⊗a

(KD⊕⊗) a⊗(b⊕c)=a⊗(b+c+2)=2a+2(b+c+2)+a(b+c+2)+2=
2a+2b+2c+4+ab+ac+2a+2 und
(a⊗b)⊕(a⊗c)=(2a+2b+ab+2)⊕(2a+2c+ac+2)=
2a+2b+ab+2+2a+2c+ac+2+2 d.h.
a⊗(b⊕c)=(a⊗b)⊕(a⊗c)

Facit: (K,⊕ ,⊗) ist Körper

A1.1.4 Wie sieht es mit der Lösungsmenge zu RR4 für a=0 aus?

//4.) ∀ a,b∈K, a≠0. ∃ genau ein x∈K: a⊗x=b

// nämlich x=a^{-1}⊗b $\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\otimes)}$ =b⊗a^{-1} $\underset{\text{Konvention}}{=}$ b/a

A1.1.5 Zeige, dass $(-1)^2=(-1)*(-1)=1$ $(-a)^2=a^2$ gilt.

A1.1.6 Seien a,b,c,d Elemente eines Körpers. Zeige

a) $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ (a,c≠0)

// (K3⊗) ∀ a∈K\{0},∃ genau ein Element a^{-1}∈K mit a⊗a^{-1}=1

Lös: $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ab^{-1})(cd^{-1})\underbrace{(bd)(bd)^{-1}}_{=1} = a\underbrace{b^{-1}b}_{=1}c\underbrace{d^{-1}d}_{=1}(bd)^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$.

b) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$ $(b,c,d \neq 0)$

A1.1.7

● Es sei $(K,\oplus,\otimes)$ ein Körper mit der Eigenschaft $x^2+y^2 \neq 0 \ \forall \ (x,y) \neq (0,0)$.

●● Auf $K \times K$ seien folgende Verknüpfungen definiert:

$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2)$

$(x_1, x_2) \otimes (y_1, y_2) := (x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Zeige, dass $(K\times K, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist
Verständnis K, ist ein Körper mit Eigenschaft •
K×K, ist ein Körper, sofern Verknüpfungen $\oplus, \otimes$ gelten,
das ist so wie unter Bew ausgeführt. .

Bem: Wählt man K=R (hier gilt: $x^2+y^2>0 \ \forall \ (x,y)\neq(0,0)$), so erhält man hiermit, dass C= R×R ein Körper ist.

Bew: Prüfe alle Körperaxiome nach **D1.1.7:**
$\oplus$ und $\otimes$ sind Abb. $(K\times K)\times(K\times K)\to K\times K$
(Abgeschlossenheit bzgl $\oplus$ und $\otimes$, denn
$x_1+y_1, x_2+y_2, x_1y_1-x_2y_2, x_1y_2+x_2y_1 \in K \ \forall \ (x_1x_2),(y_1,y_2)\in K\times K$)
d.h. $\underbrace{(x_1,x_2)\oplus(y_1,y_2)}_{(KxK)x(KxK)} := (x_1+y_1, x_2+y_2)\in K\times K$

$\underbrace{(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2)}_{(KxK)x(KxK)} := (x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\in K\times K$

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$
Zu zeigen, damit (K1⊕) gilt
$((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2)=(a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2))$:
// *(K1⊕) $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c)\ \forall\ a,b,c\in K$*
$((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+b_1,a_2+b_2)\oplus(c_1,c_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$
$((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2)=((a_1+(b_1+c_1), a_2+(b_2+c_2)) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$
$(a_1,a_2)\oplus(b_1+c_1,b_2+c_2)= \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2))\oplus(\ c_1,c_2))$
$\Rightarrow$ (K1⊕) gilt

Zu zeigen, damit (K2⊕) gilt: Existenz der Null gemäß (A2)
//***D1.1.7*** *(307) (A2) $a\oplus 0=a\ \forall\ a\in K$//*
// *Bem:2.) Eindeutigkeit 0: $a\oplus 0=a,\ a\oplus\bar{0}=a\ \ldots.\ \bar{0}=\bar{0}\oplus 0=0\oplus\bar{0}=0$//*
Für $(a_1,a_2)\in K\times K$ bel gilt: $(a_1,a_2)+(0,0) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+0,a_2+0)=(a_1,a_2)$

$\Rightarrow \exists\ 0=(0,0): K\times K=(a_1,a_2)\oplus(0,0)=(a_1,a_2)$ &
Die Eindeutigkeit der Null folgt aus D1.1.8 Bem 2 $\Rightarrow$
(K2⊕) gilt

Zu zeigen, damit (K3⊕) gilt
Existenz des inversen Elements bzgl ⊕:
//(K3⊕) Existenz eines Inverselements bzgl ⊕:
// $\forall\ a\in K\ \exists$ genau ein $-a\in K$ mit $a\oplus(-a)=0$
Sei $(a_1,a_2),(-a_1,-a_2)\in K\times K$ bel
$(a_1,a_2)\oplus(-a_1,-a_2) \underbrace{=}_{\text{Def}\oplus} (a_1+(-a_1),a_2+(-a_2)) \underbrace{=}_{D1.1.7(K3\oplus)} (0,0) \Rightarrow$
$(\underbrace{-a_1}_{\in K}, \underbrace{-a_2}_{\in K})\in K\times K$ ist additiv inverses Element von (a_1,a_2)
(insbesondere existiert dieses inverse Element in K×K)
Die Eindeutigkeit des Inversen Element bzgl ⊕ folgt aus D1.1.1 Bem 3
$\Rightarrow$ (K3⊕) gilt

Zu zeigen, damit (K4⊕) gilt
$(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)=(b_1,b_2)\oplus(a_1,a_2)$
//***D1.1.7*** *(307)* (K4⊕) *$a\oplus b = b\oplus a\ \forall\ a,b\in K$ //*

Seien Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)$ $\underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$ (a_1+b_1,a_2+b_2) $\underbrace{=}_{D1.1.7(K4\oplus)RR}$ (b_1+a_1,b_2+a_2) $\underbrace{=}_{\text{Def}\oplus}$ $(b_1,b_2)\oplus(a_1,a_2)$

$\Rightarrow$(K4$\oplus$) gilt

Zu zeigen, damit (K1$\otimes$) gilt
$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\otimes(c_1,c_2)=(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\otimes(c_1,c_2))$

//***D1.1.7*** *(307) (M1) $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\ \otimes c$ $\forall$ $a,b,c\in K$//*

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in$ $K\times K$ bel $\Rightarrow$
$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\otimes\ (c_1,c_2)$ $\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$
$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)\otimes(c_1,c_2)$ $\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$
$(a_1b_1-a_2b_2)c_1-(a_1b_2+a_2b_1)c_2$, $(a_1b_1-a_2b_2)c_2+(a_1b_2+a_2b_1)c_1$
$\underbrace{=}_{K\,Axiome,\text{Rechenr.}}$ $a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2,a_1b_1c_2-a_2b_2c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1=$
$(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1),a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1-b_2c_2)$
$\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$ $(a_1,a_2)\otimes(b_1c_1-b_2c_2,b_1c_2+b_2c_1)$ $\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$
$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\otimes(c_1,c_2))$

$\Rightarrow$ (K1$\otimes$) gilt

Zu zeigen, damit (K2$\otimes$) gilt
$\exists$ $1=(x,y)\in(K\times K)$: $(a_1,a_2)\otimes 1=(a_1,a_2)$

//***D1.1.7*** *(307) (K2$\otimes$) $1\neq 0$ und $a\otimes\ 1=a$ $\forall$ $a\in K$//*
//4.) in (K2$\otimes$) Eindeutigkeit 1 mit (K4$\otimes$)//
//RR in K 6.)$a\otimes b\ =\ 0$ $\Leftrightarrow$ $a=0$ oder $b=0$ Speziell $\Rightarrow$ $a^{-1}\neq 0$ $\forall$ *$a\neq 0$* $\forall$ *$a\neq 0$//*

$(a_1,a_2)\otimes(x,y)$ $\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$ $(\ \underbrace{a_1\cdot\underbrace{x}_{1}}_{=a_1}-\underbrace{a_2\cdot\underbrace{y}_{0}}_{=0}\ ,\ \underbrace{a_1\cdot\underbrace{y}_{0}}_{=0}+\underbrace{a_2\cdot\underbrace{x}_{1}}_{=a_2}\ )$ $\underbrace{=}_{1=(x,y)=(1,0)}$ $=(a_1-0,0+a_2)$ $\underbrace{=}_{\text{Rechenr}\,inK}$
(a_1,a_2) & Die Eindeutigkeit der Eins folgt aus Bem4 D1.1.1 $\Rightarrow$ $1=(1,0)$

$\Rightarrow$ (K2$\otimes$) gilt

Zu zeigen, damit (K3$\otimes$) gilt
$\forall$ $a_1,a_2\in K\backslash\{0\}$ $\exists$ $(\ a_1^{-1}\ ,\ a_2^{-1}\ )\in K\backslash\{0,0\}$: $(a_1,a_2)\otimes(\ a_1^{-1}\ ,\ a_2^{-1}\ )=1=(1,0)$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2):=\ (x_1\ y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$
Ansatz: $(a_1,a_2)\otimes(\ a_1^{-1}\ ,\ a_2^{-1}\ )=(1,0)$ $\Leftrightarrow$ $(a_1\ a_1^{-1}\ -a_2\ a_2^{-1}\ =1,a_1\ a_2^{-1}\ +a_2\ a_1^{-1}\ =0)$

$$a_2^{-1}\underbrace{=}_{RR}\frac{-a_2a_1^{-1}}{a_1}\Leftrightarrow a_1(\ a_1^{-1}\ )-a_2(\ \frac{-a_2a_1^{-1}}{a_1}\ )=1\Leftrightarrow$$

$$a_1^{-1}\ (a_1-a_2(-\ \frac{a_2}{a_1}\ ))=1\ \Leftrightarrow\ a_1^{-1}\ (a_1+\ \frac{a_2^2}{a_1}\ )=1\ \Leftrightarrow\ a_1^{-1}\ \frac{a_1^2+a_2^2}{a_1}=1\ \Leftrightarrow$$

$a_1^{-1}\ =a_1/(a_1^2+a_1^2)$ entsprechend
$a_2^{-1}\ =-a_2/(a_1^2+a_1^2)$.

Die Eindeutigkeit des multiplikativen inversen **D1.1.8** Bem 4
$\Rightarrow(\ a_1,a_2)\otimes(a_1/(a_1^2+a_1^2),-a_2/(a_1^2+a_1^2))=1=(1,0)$

$\Rightarrow$ (K3$\otimes$) gilt

Zu zeigen, damit (K4$\otimes$) gilt
$(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)=(b_1,b_2)\otimes(a_1,a_2)$

//(300) (M4) $a\otimes b=b\otimes a$ $\forall$ $a,b\in K$//

$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel: $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)$ $\underbrace{=}_{\text{Def}\otimes}$

$(a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1) \underbrace{=}_{(RR)} (b_1a_1-b_2a_2, b_1a_2+b_2a_1) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$(b_1,b_2)\otimes(a_1,a_2)$

$\Rightarrow$ (K4$\otimes$) gilt

Zu zeigen, damit (KD$\oplus\otimes$) gilt

$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\oplus(c_1,c_2))=((a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2))\oplus((a_1,a_2)\otimes(c_1,c_2))$

//(307) (D) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$

$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\oplus(c_1,c_2)) \underbrace{=}_{\text{Def} \oplus} (a_1,a_2)\otimes(b_1+c_1,b_2+c_2) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$((a_1(b_1+c_1)-(a_2(b_2+c_2),a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1))=$

Rechenr., Axiome, insbes (D) in K

$(a_1b_1+a_1c_1-a_2b_2-a_2c_2, a_1b_2+a_1c_2+a_2b_1+a_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Rechenr } in K}$

$((a_1b_1-a_2b_2)+(a_1c_1-a_2c_2),(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1c_2+a_2c_1)) \underbrace{=}_{\text{Def} \oplus}$

$(a_1b_1-a_2b_2, a_1b_2+a_2b_1)\oplus(a_1c_1-a_2c_2, a_1c_2+a_2c_1) \underbrace{=}_{\text{Def} \otimes}$

$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\oplus((a_1,a_2)\otimes(c_1,c_2))$

beachte: $\otimes$ bindet stärker als $\oplus$ (Punkt vor Strich)

(KD$\oplus\otimes$) gilt

Bem:Wählt man K=R, (hier gilt: $x^2+y^2>0$ $\forall(x,y)\neq(0,0)$), so erhält man hiermit, dass C= RxR ein Körper ist.

In C= RxR schreibt man anstelle von (x_1,x_2): $x+iy$ wobei $i=(0,1)$

Anstelle von $\oplus$ und $\otimes$ benutzt man die Symbole + und *, also

$(x_1+ix_2)+(y_1+iy_2):= (x_1+y_1)+i(x_2+y_2)$

$(x_1+ix_2)\cdot(y_1+iy_2):= (x_1y_1-x_2y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

Nach **A1.1.7** ist (C,+,*) also ein Körper, d.h. man kann wie gewohnt rechnen. Beachte noch:

$i=(0,1)$ $i^2=i*i=(0+1*i)*(0+1*i) \underbrace{=}_{\text{Def von} \cdot} (0\cdot 0-1*1)+(0*1+1*0)i=$

$-1+0*i=-1$ also $i^2= -1$

$i^2=(0,1)*(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$

//**D1.1.4** (302)Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung o
// (z.B +, * usw)
// $G\circ G\to G$, $(a,b)\to a\circ b$,
// sodass folgende Axiome $\forall$ a,b,c$\in$G erfüllt sind:
// a) Assoziativgesetz $(a\circ b)\circ c=a\circ(b\circ c)$ # (K1$\otimes$) in Körper K
// b) $\exists$ neutrales Element e$\in$G, $a\circ e=a$ # (K2$\otimes$) in Körper K
// c) $\forall$ a$\in$G $\exists$ Inverses Element a´$\in$G: $a\circ a'=e$ # (K3$\otimes$) in Körper K
//Bem:Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G
//**L1.1.1** (303)Sei G Gruppe
// b) Es gilt $e\circ a=a\circ e=a$ $\forall$ a$\in$G
// d) Es gilt $a'\circ a=e$ (nicht nur $a\circ a'=e$)
//siehe **A0.2.20**
//Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und f:X$\to$Y eine Abbildung. Zeige:
//c)f bijektiv $\Leftrightarrow$ $\exists$ g:Y$\to$X mit $g\circ f=id_x$ $\wedge$ $f\circ g=id_y$.
// Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

A1.1.8 Es sei (G,o) eine Gruppe und a$\in$G (fest).
Beweise, dass die folgenden Abbildungen bijektiv sind, und gib jeweils die zugehörigen Umkehrabbildungen an.

Bem: Wir zeigen die Bijektivität von f mit Angabe eines $g:G\to G$ mit
$g\circ f=id_G=f\circ g$
Dann ist $f^{-1} = g$

a) $f:G\to G$, $x\to x^{-1}$ (x^{-1} sei das inverse Element zu x in der Gruppe G)

Lös: $y=x^{-1} \Leftrightarrow x=y^{-1}$; $f(x):=x^{-1}$

Sei $g:=f \Rightarrow (g\circ f)(x) \underset{f=g}{=} (f\circ f)(x)=f(f(x)=f(x^{-1})=(x^{-1})^{-1}=x \quad \forall\ x\in G \Rightarrow$

$g\circ f = id_G$ und

$f\circ g \underset{f=g}{=} g\circ f=id_G \underset{A0.2.20\ c)}{\Rightarrow}$ f bijektiv und $f^{-1}=f(=g)$

b) $f:G\to G$, $x \to a\circ x$

Lös: a^{-1} sei das inverse Element zu a in der Gruppe G

$y=a\circ x \Leftrightarrow a^{-1}\circ y=a^{-1}\circ(a\circ x) \Leftrightarrow a^{-1}\circ y=(a^{-1}\circ a)\circ x \Leftrightarrow a^{-1}\circ y=e\circ x \Leftrightarrow x=a^{-1}\circ y$

Geg.: $x \to a\circ x$ d.h. $f(x):= a\circ x$.

Definiere $g: G\to G$ $\quad g(x):= a^{-1}\circ x \Rightarrow$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(a\circ x)=a^{-1}\circ(a\circ x) \underbrace{=}_{D1.1.3\ a)} (a^{-1}\circ a)\circ x \underbrace{=}_{L1.1.\ d)} =e\circ x \underbrace{=}_{L1.1.1\ b)} x\circ e$

$=x \quad \forall\ x\in G$ und

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(a^{-1}\circ x)=a\circ(a^{-1}\circ x)=(a\circ a^{-1})\circ x=e\circ x \underbrace{=}_{L1.1.1\ b)} x\circ e=x \Rightarrow$

$g\circ f=id_G=f\circ g$, deshalb $f^{-1}=g \Rightarrow$ f bijektiv

c) $f:G\to G$, $x \to x\circ a$

Lös: $f(x)= x\circ a$

Definiere $g:G\to G$, $g(x)= x\circ a^{-1} \Rightarrow$ analog a),b)

$(g\circ f)(x)=g(f)(x)=g(x\circ a)=(x\circ a)\circ a^{-1}=x\circ(a\circ a^{-1})=x\circ 1=x \quad \forall\ x\in G$ und

$(f\circ g)(x)=(f(g))(x)=f(x\circ a^{-1})=x\circ(a^{-1}\circ a)=x\circ 1=x \quad \forall\ x\in G$

$\Rightarrow g\circ f=id_G=f\circ g \Rightarrow$ f bijektiv $\forall\ f^{-1}=g$

A1.1.9 Es sei K ein Körper und $a\in K$ (fest). Auf K seien die Relationen | und ~ wie folgt definiert:

$x|y: \Leftrightarrow \exists\ c\in K$ mit $y=c*x$

$x\sim y: \Leftrightarrow a|(x-y)$

a) Ist die Relation | reflexiv, symmetrisch, transitiv?

Lös: 1. Möglichkeit

//(RR) in K (304) 1.)…. $a\otimes 1=1\otimes a=a \quad \forall\ a\in K$ ….//

//6.) $a\otimes b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$, Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0 \quad \forall\ a\neq 0$//

(.) | ist reflexiv: $x|x \quad \forall\ x\in K$,

denn $x \underset{RR\ 1.)}{=} 1*x \quad \forall\ x\in K$ (d.h. Wähle $c=1\in K$)

(..) | ist nicht symmetrisch: es gilt

$1|0$ (denn $0 \underset{6.)}{=} 0*1$, wähle $c=0\in K$) aber

$0\nmid 1$ (d.h. nicht $0|1$, 0 teilt nicht 1),

denn falls $0|1$, dann $\exists\ c\in K$ mit $1 = c*0 \underset{6.)}{=} 0$ Widerspruch da $1\neq 0$

(...) | ist transitiv: Es sei $x|y$ und $y|z$,

d.h. $\exists\ c_1 c_2\in K$: $y=c_1*x$ und $z=c_2*y \Rightarrow$

$z=c_2*y=c_2*(c_1*x) \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\otimes)} \underbrace{(c_2*c_1)}_{\in K} *x$ und $c_1 c_2\in K \Rightarrow x|z$

Bem: Die obige Rechnung stimmt immer noch, wenn K durch einen kommutativen Ring ersetzt wird (z.B. $\mathbb{Z}$)

2. Möglichkeit: Wegen $x|y \ \forall \ x \in K \setminus \{0\}, \ \forall \ y \in K$

(Wähle $c = \frac{y}{x}$) und ($0|y \Leftrightarrow y=0$) gilt:

$x|y \Leftrightarrow (x=0 \Rightarrow y=0)$ bzw ($x \neq 0$ oder $y=0$)

$\Rightarrow$ | reflexiv (da $x=0 \Rightarrow y=0$)

| nicht symmetrisch (z.B. $x=0$ und $y=1$)

| transitiv (aus $x=0 \Rightarrow y=0$ und $y=0 \Rightarrow z=0$ folgt $x=0 \Rightarrow z=0$

b) Zeige, dass ~: $x \sim y :\Leftrightarrow a|(x-y)$ eine ÄR ist und bestimme alle Äquivalenzklassen. (Hinweis: Unterscheide die Fälle $a=0$ und $a \neq 0$)

//D1.1.4 (302) Eine Gruppe ist eine Menge G mit Verknüpfung $\circ$
// (z.B +, * usw)
// $G \circ G \rightarrow G$, $(a,b) \rightarrow a \circ b$,
// sodass folgende Axiome $\forall$ $a,b,c \in G$ erfüllt sind:
// a) Assoziativgesetz $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
// b) $\exists$ neutrales Element $e \in G$, $a \circ e = a$
// c) $\forall$ $a \in G$ $\exists$ Inverses Element $a' \in G$: $a \circ a' = e$
//Bem: Man sagt G ist abgeschlossen, da alle Elemente und Ergebnisse in G
//D1.1.6 (306) Vor: Menge $M_R \neq \emptyset$ und 2 Verknüpfungen
// $\oplus: M_R x M_R \rightarrow M_R$ und $\otimes: M_R x M_R \rightarrow M_R$
// $(M_R, \oplus, \otimes)$ ist ein Ring
// $\Leftrightarrow$
// es gelten für folgende Axiome:
// • $(M_R, \oplus)$ ist abelsche Gruppe
// (R1⊕) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \in M_R$, $\forall$ $a,b,c \in M_R$
// (R2⊕) $\exists$ $e \in M_R: a \oplus e = a$ $\forall$ $a \in M_R$
// (R3⊕) $\exists$ $e, a' \in M_R$: $a \oplus a' = e$ $\forall$ $a \in M_R$
// (R4⊕) $a \oplus b = b \oplus a \in M_R$, $\forall$ $a,b \in M_R$
// •• $(M_R, \otimes)$ ist Halbgruppe
// (R1⊗) $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \in M_R$, $\forall$ $a,b,c \in M_R$

// (R2⊗) $\exists\ n\in M_R$, $n=e$ oder $n\neq e$: $a\otimes n=n\otimes a=a\ \forall\ a\in M_R$
// ●●● (RD⊕⊗) $a\otimes(b\oplus c)=a\otimes b+a\otimes c\ \in M_R\ \forall\ a,b,c\in M_R$
// $(a\oplus b)\otimes c=a\otimes c+b\otimes c\ \in M_R\ \forall\ a,b,c\in M_R$

Bew:1. Möglichkeit benutze nur Eigenschaften eines kommutativen Ringes (z.B. $\mathbb{Z}$)

$x|y: \Leftrightarrow \exists\ c\in K$ mit $y=c*x$

$x\sim y: \Leftrightarrow a|(x-y)$

(.) ~ ist reflexiv: Wegen $0=0\cdot a$ (mit $c=0$) gilt $a|0=x-x \Rightarrow x\sim x$

(..) ~ ist symmetrisch: Sei $x\sim y \Rightarrow a|x-y \Rightarrow \$\ c\in K$: $x-y=ca \Rightarrow$
$y-x=-(-y)-x=-(-y+x)=-(x+(-y))=-(x-y)=-(ca)=\underbrace{(-c)}_{\hat{I}K}a \Rightarrow a|y-x$
$\Rightarrow y\sim x$

(...) ~ ist transitiv: Seien $x\sim y$ und $y\sim z \Rightarrow a|x-y$ und $a|y-z \Rightarrow$
$\Rightarrow c_1,c_2\in K$ mit $x-y=c_1a$ und $y-z=c_2a \Rightarrow$

$x-z \underbrace{=}_{(A2)} (x+0)-z \underbrace{=}_{\text{Rechenr}1)} (x+((-y)+y))-z \underbrace{=}_{D1.1.7(K1\oplus)} ((x+(-y))+y)-z=$
$((x+(-y))+y)+(-z)=(x+(-y))+(y+(-z))=(x-y)+(y-z)=$
$c_1a+c_2a=a(c_1+c_2)=\underbrace{(c_1+c_2)}_{\in K}a \Rightarrow a|x-z \Rightarrow x\sim z$

2. Möglichkeit

1.Fall: $a=0$: $x\sim y \Leftrightarrow x=y$

(denn: $0|x-y \Leftrightarrow \$\ c\in K\ \underbrace{x-y}_{=x+(-y)}=c*0=0 \Leftrightarrow x=-(-y)=y) \Rightarrow$
~ ist ÄR da = eine ÄR ist

2.Fall: $a\neq 0$: $x\sim y\ \forall\ x,y\in K$ denn $a|x-y \Leftrightarrow \$\ c\in K$: $x-y = c*a$ wahr $\forall\ x,y\in K$ (Wähle $c=(x-y)*a^{-1}$, beachte $a\neq 0$) d.h. ~ ÄR

ÄK: $x|_\sim = \{y\in K\ |y\sim x\}=\begin{cases}\{x\},\text{falls}\,a=0\\ K,\text{falls}\,a\text{¹}0\end{cases}$????

Es macht wenig Sinn, diese x~y Relation in K zu betrachten.