

A1.4.1 Zeige für ein $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichungen $|f|=f^++f^-$, $f=f^+-f^-$.

A1.4.2 Sei $D \subset \mathbb{R}$, und sei $-D = \{-x : x \in D\}$, sowie $A = D \cap (-D)$ (also möglicherweise die leere Menge). Sei $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass $f(x) = f(-x) \quad \forall x \in A$.

Zeige: Dann gibt es eine gerade Funktion $g: D \cup (-D) \rightarrow \mathbb{R}$, welche auf D mit f übereinstimmt (dieses g heißt gerade Fortsetzung von f). Wann gibt es genau eine ungerade Fortsetzung von f ? Finde heraus, wann die gerade (ungerade) Fortsetzung von f gleich f ist.

A1.4.3 Zeige: Die Summe zweier gerader (ungerader) Funktionen ist wieder gerade (ungerade); das Produkt zweier gerader Funktionen aber auch zweier ungerader Funktionen ist gerade, das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.

A1.4.4 Untersuche, ob folgende Funktionen gerade, ungerade, nach oben bzw nach unten beschränkt sind. Bestimme jeweils $|f|, f^+, f^-$.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2$

//**D1.4.2(600)** Für $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ seien $|f|$,
 f^+ , f^- definiert als
 $|f|(x) = |f(x)|$, $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \quad \forall x \in D$.

Lös: gerade: $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$ und $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.

Nach oben unbeschränkt: $\forall x \in \mathbb{R} \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > K$?

Wähle $x = \sqrt{K+3}$. O.B.d.A. $K > 0 \Rightarrow f(x) = K+3-2 = K+1 > K$

Nach unten beschränkt: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2 \geq -2$

$$|f|(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, |f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq -\sqrt{2} \text{ oder } x \geq +\sqrt{2} \\ 2 - x^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f^+(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \leq -\sqrt{2} \text{ oder } x \geq \sqrt{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\sqrt{2} \text{ oder } x \geq \sqrt{2} \\ 2 - x^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lös: ungerade, unbeschränkt, $|f|(x) := \begin{cases} x^3 - x, & -1 \leq x \leq 0 \text{ oder } x \geq 1 \\ x - x^3, & \text{sonst} \end{cases}$

A1.4.5 Zeige, dass f genau dann (streng) monoton wächst, wenn $-f$ (streng) monoton fällt.

A1.4.6 Zeige: Ist $f(x) > 0$ für alle $x \in D$, so ist f genau dann (streng) monoton wachsend, wenn $1/f$ (streng) monoton fällt.

A1.4.7 Zeige, dass $\forall n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f(x) = x^{-n}$ auf dem Intervall $(0, \infty)$ streng monoton fällt

A1.4.8 Untersuche die Monotonie von $f(x) = x^m$, für eine beliebige Zahl m , auf dem Intervall $(-\infty, 0)$ bzw auf \mathbb{R} .

//D1.4.3(601) Monotone Funktionen
 // Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt (auf D) monoton
 // Wachsend \nearrow (fallend \searrow), falls $x, y \in D$, $x < y \Rightarrow$
 // $f(x) \leq f(y)$, ($f(x) \geq f(y)$).
 Lös: //Vorbetrachtung/Beispiel zu $x, y \in (-\infty, 0)$:
 // m gerade=2, $x = -5 < y = -3 \Rightarrow f(x) = x^2 = (-5)^2 > (-3)^2 = y^2 = f(y) \searrow$

- $0 \leq x < y$
 $\Rightarrow m \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^m$, \uparrow auf $[0, \infty)$ d.h. $\Rightarrow (*) \ x^m < y^m$.

- $x < y \leq 0$
 \Rightarrow

1. Fall:

- Falls m gerade ($m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} x < y \leq 0 \Rightarrow -x > -y \geq 0 \Rightarrow (-x)^{2k} = (-x)^m &\stackrel{x^m = (x)^m}{\geq} (-y)^m = (-y)^{2k} \\ ((-x)^2)^k = (-x)^m &> (-y)^m = ((-y)^2)^k \Rightarrow (x^2)^k = (-x)^m > (y^2)^k = (-y)^m \Rightarrow \\ x^m = (-x)^m &> y^m = (-y)^m \Rightarrow \\ x < y \wedge f(x) = x^m &> y^m = f(y) \stackrel{\text{D1.4.3}}{\Rightarrow} f(x) = x^m \downarrow \text{auf } (-\infty, 0] \end{aligned}$$

- Falls m ungerade ($m = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} (-x)^m = -x^m, \quad x < y \leq 0 \Rightarrow -x > -y \geq 0 &\stackrel{(*)}{\Rightarrow} (-x)^m > (-y)^m \Rightarrow -x^m > -y^m \Rightarrow \\ x^m < y^m, \quad f(x) = x^m, \quad \uparrow \text{auf } (-\infty, 0), \text{ also, auf } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2. Fall: $m=0$, $f(x) = x^m = 1$, konst Funktion \searrow und \nearrow , nicht streng monoton

3. Fall: $m < 0$, $f(x) = x^m = (1/x)^n$, $n = -m \in \mathbb{N}$.

$f(x)$ für $x=0$ nicht definiert,
 # (da $\infty (1/x)^n$ $1/x=1/0$ nicht definiert)
 nur für $(-\infty, 0)$.

Sei $x < y < 0 \Rightarrow 0 > 1/x > 1/y \stackrel{1. \text{ Fall}}{\Rightarrow} (1/x)^n < (1/y)^n$ falls n gerade,

$(1/x)^n > (1/y)^n$ falls n ungerade

$$\Rightarrow \begin{cases} x^m < y^m \text{ falls } m \text{ gerade } (m = 2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0) \\ x^m > y^m \text{ falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

$f(x) = x^m$, $m < 0$ auf $(-\infty, 0)$ \uparrow falls m gerade,
 \downarrow falls m ungerade

//S1.3.1 (501) Vor.: K angeordnet $T \subset K$, $T \neq \emptyset$, $s \in K$ //

// 2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T \in K$ und $\sup T \in T$: $\max T = \sup T$ //

// $\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T \in K$ und $\inf T \in T$: $\min T = \inf T$ //

$\stackrel{\text{S1.3.1 2)}}{\Rightarrow}$

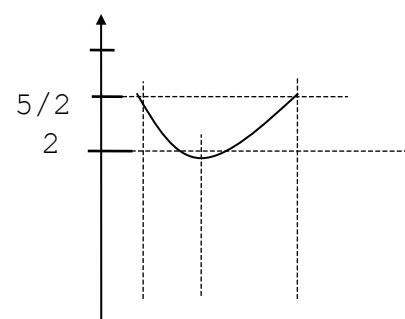
A1.4.9 $M = \left\{ x + \frac{1}{x} : x \in \mathbb{R}, 1/2 < x \leq 2 \right\}$

3

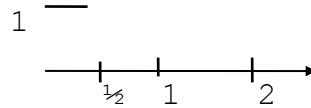
Max, sup, min inf?

Beh: min $M = \inf M \stackrel{\text{S1.3.1}}{=} 2$, sup $M = \max M = 5/2$

Bew: $M = [2, 5/2] = \{y \in \mathbb{R} : 2 \leq y \leq 5/2\}$?



Hieraus sofort die Beh, denn
 $\min M=2$ (folgt aus Def von \min ,
da $2 \leq y \forall y \in M$ und $2 \in M$.)



$\max M=5/2$ (folgt aus Def von \max , da $y \leq 5/2 \forall y \in M$ und $5/2 \in M$) \Rightarrow
 $\inf M=2, \sup M=5/2$.
S1.3.1 2)

Bew zu $M=[2, 5/2]$, Betrachte $f(x)=x+1/x, x>0$.

Genügt Zu zeigen $f((1/2, 2]) \subset [2, 5/2]$ Methode: "C" und "D"

• $f((1/2, 2]) \subset [2, 5/2]$:

Wir zeigen $f(x_1) < f(x_2) \forall x_1, x_2 \in [1, \infty]$ mit $x_1 < x_2$
 \uparrow (f ist streng monoton wachsend auf $[1, +\infty)$)
 \uparrow $f(x_1) > f(x_2) \forall x_1, x_2 \in (1/2, 1]$ mit $x_1 < x_2$
 \uparrow (f ist streng monoton fallend auf $(1/2, 1)$)
Aus (\dots) , (\dots) folgt $f((1/2, 2]) \subset [2, 5/2]$, denn sei
 $x \in (1/2, 2] \Rightarrow x \in (1/2, 1]$ oder $x \in [1, 2]$.

1. Fall: $x \in (1/2, 1]$: $2 = f(1) \leq f(x) \leq f(1/2) = 5/2$
2. Fall: $x \in [1, 2]$: $2 = f(1) \leq f(x) \leq f(2) = 5/2$
 $\Rightarrow f(x) \in [2, 5/2]$,

Bew zu $f(x_2) - f(x_1) = x_2 - x_1 + 1/x_2 - 1/x_1 = x_2 - x_1 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 x_2} =$
 $\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)}_{>1 - \frac{1}{x_1^2} \geq 1 - \frac{1}{1} = 0} > 0$

Bew zu $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right)}_{<1 - \frac{1}{x_2^2} \leq 1 - \frac{1}{1} = 0} < 0$

• • $f((1/2, 2]) \supset [2, 5/2]$:

$f(x)=y \Leftrightarrow y=x+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2+1=xy \Leftrightarrow x^2-xy+1=0 \Leftrightarrow x=x_1$ oder $x=x_2$ mit
 $x_{1,2}=1/2(y \pm \sqrt{y^2-4})$.

Sei $y \in [2, 5/2]$.

• Def $x := 1/2(y + \sqrt{y^2-4}) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ und $f(x)=y$
Zu zeigen: $x \in (1/2, 2]$ nach Aufgabenstellung.

$$x \geq \frac{1}{2} \quad y \geq 1/2 \cdot 2 = 1.$$

Annahme: $x > 2 \Rightarrow y = f(x) > f(2) = 5/2$ Widerspruch also $x \leq 2 \Rightarrow$
 $(\dots) s.o.$

$$x \in (1, 2] \Rightarrow x \in (1/2, 2].$$

Offen: $x \in (1/2, 1] \mathbb{E}?$

Existiert in $y \in [2, 5/2]$ jeweils ein $y = f(x) \forall x \in (1/2, 1] \mathbb{E}?$

• Def $x := 1/2(y - \sqrt{y^2-4}) \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ und $f(x)=y$

$$y=2 \Rightarrow x=1/2(2 - \sqrt{4-4})=1,$$

$$y=5/2 \Rightarrow x=1/2(5/2 - \sqrt{(5/2)^2-4})=1/2$$

Annahme: $\forall x \in (1/2, 1) \exists y \in (2, 5/2) :$

$$1 > 1/2(y - \sqrt{y^2-4}) > 1/2 \Rightarrow 2 > y - \sqrt{y^2-4} > 1 \Rightarrow 2 - y > -\sqrt{y^2-4} > 1 - y \Rightarrow$$

$$y - 2 < \sqrt{y^2-4} < y - 1 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 < y^2 - 2y + 1 \Rightarrow -4y + 8 < 0 < -2y + 5 \Rightarrow$$

$$4y - 8 > 0 > 2y - 5 \Rightarrow 4y - 8 > 2y - 5 \Rightarrow 2y > 3 \Rightarrow y > 3/2 \Rightarrow y > 3/2 \wedge y \in (2, 5/2)$$

\Rightarrow

$y \in (3/2, 5/2) \Rightarrow$
~~(••)~~ $\forall 1/2 \leq x \leq 1 : 5/2 \leq y \leq 2$ sonst ~~(••)~~

A1.4.10 $[0,1] \rightarrow [0,1]$, Surjektiv oder injektiv?

a) $x \mapsto x^k$, $k \in \mathbb{N}$ beliebig

Lös: Seien $x, y \in [0,1]$, $y > x$ (d.h. $y > 0$) \Rightarrow

$$y > x \underset{y > 0}{\Rightarrow} y^2 > yx \underset{y > x}{\Rightarrow} y^2 > x^2 \underset{y > 0}{\Rightarrow} y^3 > yx^2 \underset{y > x}{\Rightarrow} y^3 > x^3 \dots \text{usw} \underset{\text{Induktion}}{\Rightarrow} y^k > x^k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$