1.3(500) **Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen**

Alle bisherigen Überlegungen gelten z.B auch für den Körper der rationalen Zahlen.

D1.3.1(500) Sei $(K,<)$ angeordneter Körper $T\subset K$, $T\neq\emptyset$

1.)Ein Element $\bar{s}\in K$ ($\underline{s}\in K$) ($\bar{s}$, $\underline{s}$ müssen nicht zu T gehören) heißt obere (untere) Schranke von T: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$ gilt $t\leq\bar{s}$ ($t\geq\underline{s}$)

2.)T heißt nach oben (unten) beschränkt$\Leftrightarrow$ $\exists$ eine obere (untere) Schranke von T

3.)T heißt beschränkt:$\Leftrightarrow$ T ist nach oben und unten beschränkt.

4.)Ein $\overleftarrow{s}\in K$ ($\underrightarrow{s}\in K$) heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von T (größte untere Schranke oder Infimum von T): $\Leftrightarrow$

α) $\overleftarrow{s}$ ($\underrightarrow{s}$) ist obere (untere) Schranke von T

β) $\overleftarrow{s}\leq\bar{s}$ $\forall$ oberen Schranken $\bar{s}$ von T ($\underrightarrow{s}\geq\underline{s}$ $\forall$ unteren Schranken $\bar{s}$ von T)

Bez: $\overleftarrow{s}=\sup T$ ($\underrightarrow{s}=\inf T$)

Andere Formulierung:

a=supA: $\begin{cases} \forall\, x\in A: x\leq a \;\; d.h.\; a \text{ ist obereSchranke von } A \\ \forall\, c\in R: x\leq c \;\; \forall\, x\in A\Rightarrow a\leq c,\; d.h.\; a \text{ ist obereSchranke von } A \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

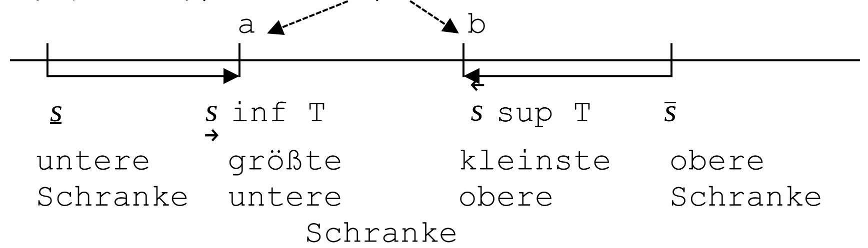
$a\in R$ ist kleinste obere Schranke von A

Bem: $a\in T$, z.B. $T=\{t\,|\,t\geq a\}$ $\Rightarrow$ $a=\inf T=\min T$

$a\notin T$, z.B. $T=\{t\,|\,t>a\}$ $\Rightarrow$ $a=\inf T\neq\min T$

Bsp/Merkskizze

$T=\{x\,|\,a<x<b\}$, *d.h. $a,b\notin T$



Bez:1.)Ist $T\subset K$ nach oben/unten nicht beschränkt, so schreibt man $\sup T:=\infty$ ($\inf T:=-\infty$) (dann existiert supT/infT nicht)

2.)Für $T=\emptyset$ sei $\sup\emptyset:=-\infty$, $\inf T:=+\infty$

Bem:1.)$T\subset K$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ $c\in K$ mit $|t|\leq c$ $\forall$ $t\in T$

2.)Falls existent, sind sup T und inf T eindeutig bestimmt

Bew: $s_1, s_2=\sup T$ $\Rightarrow$ $s_1\leq s_2 \wedge s_2\leq s_1$ $\Rightarrow$ $s_1=s_2$

3.)Sei $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $\exists$ sup T bzw inf T $\Rightarrow$

$\sup T = \min\{\bar{s}\;|\;\bar{s}$ ist obere Schranke von T in $K\}$

$\inf T = \max\{\underline{s}\;|\;\underline{s}$ ist untere Schranke von T in $K\}$

d.h. sup T und inf T müssen nicht, können aber $\in T$ sein.

Wenn sup T bzw inf T $\in T$, siehe S1.3.1 2.

S1.3.1(501) Vor.:Sei K angeordnet und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$

Beh:1.) $\overleftarrow{s}=\sup T$: $\Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und

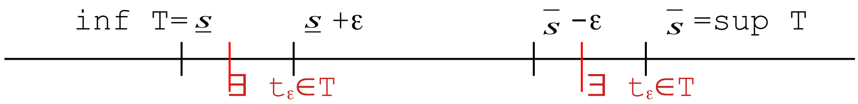
β) ∀ $\varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T
⇔ ∀ $t\in T$: $t\leq \overleftarrow{s}$ und ∀ $\varepsilon>0$ ∃ $t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$

Bew:Negation von β):∃ $\varepsilon_0>0$ aus **K** und ∀ $t\in T$: $t\leq \overleftarrow{s}-\varepsilon_0$ ⇔

∃ $\varepsilon_0>0$ aus **K**: $\tilde{s}\leq \overleftarrow{s}-\varepsilon_0$ ist obere Schranke von T, die kleiner als $\overleftarrow{s}$ ist

analog

$\underline{s}$ = inf T:⇔ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und
β) ∀ $\varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T
⇔ ∀ $t\in T$: $t\geq \underline{s}$ und ∀ $\varepsilon>0$ ∃ $t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$



2.)∃ max T ⇔ ∃ supT∈**K** und supT∈T: maxT=supT
∃ min T ⇔ ∃ inf T∈K und infT∈T: min T=inf T

//***D1.2.2*** *(405) K=(K,+,*,<) & T⊂K, T≠∅.* $\overline{m}$ *=maxT:⇔ ∀ t∈T: t≤*$\overline{m}$ *.//*

Bew:„⇒„ $\overline{m}$:= maxT $\underset{D1.2.2}{\Rightarrow}$ ∀ $t\in T$ gilt $t\leq\overline{m}$ und $\overline{m}\in T$ ⇒
$\overline{m}\leq s$ ∀ oberen Schranken von T, $\overline{m}$ obere Schranke von T ⇒
∀ s' die obere Schranke von T sind, gilt t≤s' ∀ t∈T.
$\overline{m}\in T$ ⇒ $\overline{m}\leq s'$⇒ ∃ $\overline{m}$ =sup T∈T
„⇐„ $\overline{m}$ =sup T und $\overline{m}\in T$ ⇒ ∀ t∈T: $t\leq\overline{m}$. Da $\overline{m}\in T$ ⇒ ∃ max T= $\overline{m}$

Bsp:1.) T=(0,1] ⇒ 1=max T=sup T, 0=inf T≠min T
2.) **R**⊃M=(0,1)∪[2,5]
∀ x>5: m≤5 ∀ m∈M, aber x ist nicht kleinste obere Schranke.
Analog für x=0, also sup M= max M=5, inf M=0
3.) A:={x∈**R**: 0≤x<5}
inf A= min A=0.
Bew: 0 ist untere Schranke da 0≤a ∀ a∈A.
Sei r>0 ⇒ r ist keine untere Schranke von A, denn $\tilde{r}:=\frac{r}{2}<r$, aber
$\tilde{r}\in A$ ⇒ 0 ist größte untere Schranke. 0∈A.
Analog sup A=5. 5∉A ⇒ ∄ max A
4.) B:={ $\frac{1}{n}$:n∈N}. inf B=0∉B ⇒ ∄ min B

5.)Sei (**K**,<) und T={x∈**K**|-1<x≤0}=(-1,0]
max T=sup T=0, inf T=-1, min T existiert nicht.
Bew:inf T=-1 ⇒ Es gilt -1≤x ∀ x∈T ⇒ -1 ist untere Schranke.
Annahme:s>-1 sei ebenfalls untere Schranke von T.
Definiere $\tilde{s}=\frac{-1+s}{2}$ $\underset{RR<}{\Rightarrow}$ $-1<\tilde{s}<s<0$ ⇒ $\tilde{s}\in T$, aber $\tilde{s}<s$
Widerspruch zu s ist untere Schranke von T

6.) **K**=**R**, A,B⊂**K**, A,B≠∅ und beschränkt.
Z.z sup(A∪B)=max{sup A,sup B}

//**S1.3.1**(501) Vor.:Sei **K** angeordnet und T⊂**K**, T≠∅, s∈**K**

//Beh:1.) $\overleftarrow{s}$ =sup T: $\Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und

// β) $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T

// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$: $t\leq \overleftarrow{s}$ und $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$

Bew:ObdA sei sup A$\geq$sup B $\Rightarrow$ sup A=max{sup A,sup B}

(z.B. A=[0,5), B=(-2,3) $\Rightarrow$ Sup A=5, supB=3)

(.)Z.z. α) sup A obere Schranke von A∪B:

sup A$\geq$t $\forall$ t$\in$A $\Rightarrow$ sup A$\geq$sup B$\geq$b $\forall$ b$\in$B $\Rightarrow$ sup A$\geq$u $\forall$ u$\in$A∪B

(..)β)...$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ u$\in$A∪B: u>sup A-ε $\Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists$ u$\in$A: u>sup A-ε $\Rightarrow$

(.) und (..) $\Rightarrow$ sup A=sup A∪B

7.) K_+ (d.h.$0\notin K_+$) ist nach unten beschränkt durch $\zeta=0$.

Ist $\eta\in K_+$ $\Rightarrow$ $\eta/2\in K_+$ und $\eta/2<\eta$.

Also kann kein Element von K_+ gleichzeitig untere Schranke von K_+ sein und deshalb ist 0 die größte untere Schranke von K_+ $\Rightarrow$ 0=inf K_+. $0\notin K_+$

$\Rightarrow$ K_+ besitzt kein Minimum.

K_+ nicht nach oben beschränkt, denn gäbe es eine obere Schranke für K_+, etwa ξ, so wäre sowohl $\xi\in K_+$ also auch $\xi+1\in K_+$, und mit $\xi+1>\xi$ ergibt sich ein Widerspruch.

8.)Nicht verstanden...bessere Formulierung gesucht… siehe auch S1.3.2
Seien $x>0$ und $A_x=\{a>0:a^2\leq x\}$.
Falls $\xi=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\xi^2=x$.

//***S1.3.1*** *(501)Vor.:* K *angeordnet* $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//

// *1.)* $\overleftarrow{s}=\sup T$: $\Leftrightarrow$ $\alpha)$ $\overleftarrow{s}$ *ist obere Schranke von* T *und* //

// $\beta)$ $\forall\ \varepsilon>0$ *ist* $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ *keine obere Schranke von* T //

// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T$: $t\leq\overleftarrow{s}$ *und* $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ *mit* $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$ //

Bew:Angenommen, dass $\xi>0$...

1.Fall:$\xi^2>x$.Sei $\varepsilon=\underbrace{(\underbrace{\xi^2-x}_{<\xi^2})/(2\xi)}_{<\xi/2}$ (d.h. $x=\xi^2-2\xi\varepsilon$) $\Rightarrow 0<\varepsilon<\xi/2 \underset{S1.3.1}{\Rightarrow}$

$\exists\ a\in A_x:a>\xi-\varepsilon\ \Rightarrow\ x\geq a^2>(\xi-\varepsilon)^2>\underbrace{\xi^2-2\xi\varepsilon}_{<\xi^2-2\xi\varepsilon+\varepsilon^2}=x\ \Rightarrow$ / $x>x$ was nicht sein kann $\Rightarrow \xi^2>x$.

2.Fall:$x>\xi^2$.(ξ^2 beliebig nahe bei $x\Rightarrow x-\xi^2\underbrace{<}_{x>\xi^2}\xi^2$ für $\xi^2>x/2$)

Für $\varepsilon=\min\{\underbrace{\xi,(\underbrace{x/\xi}_{>\xi}-\xi)/3}_{>0}\}$ gilt dann $\varepsilon/\xi\underbrace{\leq}_{*}1$, also $(\varepsilon/\xi)^2\leq\varepsilon/\xi$

$*$: $\varepsilon=\min\{\underbrace{\xi,(\underbrace{x/\xi}_{>\xi}-\xi)/3}_{>0}\}=\xi\Rightarrow\varepsilon/\xi=1$,

$*$: $\varepsilon=\min\{\xi,(x/\xi-\xi)/3\}=(x/\xi-\xi)/3\ \Rightarrow\ \varepsilon/\xi=((x/\xi-\xi)/3)/\xi=\dfrac{\overbrace{x-\xi^2}^{<\xi^2}}{3\xi^2}$ <1

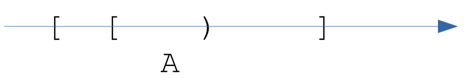
$\Rightarrow$ für $a=\xi+\varepsilon=\xi*1+\xi*\varepsilon/\xi)=\xi(1+\varepsilon/\xi)$:

$a^2=\xi^2(1+\varepsilon/\xi)^2=\ \xi^2(1+2\varepsilon/\xi+\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\xi}\right)^2}_{<\varepsilon/\xi})\leq\ \xi^2(1+3\varepsilon/\xi)=$

$\xi^2(1+\dfrac{3(x/\xi-\xi)}{3\xi})=\xi^2+x-\xi^2\leq x$.

Demzufolge wäre $a=\xi+\varepsilon\in A_x$, also ξ keine obere Schranke für $A_x\Rightarrow$ Widerspruch zu Def von $\xi\Rightarrow\xi^2=x$

A1.3.1
a) Zeige (.) $A\subset B$, $\exists$ min A, min B $\Rightarrow$ min A$\geq$min B
Bew: a $\geq$min A $\forall\ a\in A$ & $A\subset B\Rightarrow a\in B\Rightarrow a\geq$min B
Bspskizze



(..) $A\subset B$, $\exists$ inf A, inf B $\Rightarrow$ inf A$\geq$inf B
Bew: a:=inf A $\underset{A\subset M}{\Rightarrow}$ $a\in B$ $\underset{b:=\inf B}{\Rightarrow}$ a$\geq$b?
A:=inf A, b:=inf B $\Rightarrow b\leq x\ \forall\ x\in B \underset{A\subset B}{\Rightarrow} b\leq x\ \forall\ x\in A\Rightarrow$
b auch untere Schranke von A, d.h. b$\leq$a

(...)$\exists$ max A & max B $\Rightarrow$ $\exists$ max(A$\subset$B) & max (A$\cup$B)=max{max A, max B}

Bew: $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\le \max A \wedge x\le \max B \Rightarrow$
$x\le \max\{\max A, \max B\}\ \forall\ x\in A\cup B$
$\max\{\max A, \max B\}\in A\cup B \Rightarrow \max\{\max A, \max B\}=\max A\cup B$

b) $M=\{t=\underbrace{2-\frac{n-1/2}{n}}_{1+1/2n}\ |n\in\mathbb{N}\}$

n	1	2	3	4
t	3/2	5/4	7/6	9/8

max,sup,min, inf?

Lös:Z.z Vermutung max M=3/2

(.) $n=1 \Rightarrow 2-\frac{n-1/2}{n}=3/2 \Rightarrow 3/2\in M$

(..) $3/2\ge t\ \forall\ t\in M,\ 3/2\ge 1+1/2n \Leftrightarrow 3/2\ge \frac{2n+1}{2n} \Leftrightarrow 6n\ge 4n+2 \Leftrightarrow 2n\ge 2$
$\Leftrightarrow n\ge 1 \Rightarrow 3/2=\max M=\sup M$

Z.z Vermutung inf M=1

(.) 1 ist untere Schranke von M $\Rightarrow 1+\frac{1}{2n}>1$

(..) Kleinste untere Schranke: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t\in M: 1+\varepsilon>t$.

Sei $\varepsilon>0$: $1+\varepsilon>1+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n+2n\varepsilon>2n+1 \Leftrightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon}$.

Wähle $n\in\mathbb{N}: n>\frac{1}{2\varepsilon}$, $t_n:=1+\frac{1}{2n}<1+\frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}}=1+\varepsilon \Rightarrow \inf M=1$

Min M=1?

Annahme $\exists$ min M. min M$\neq$1 $\Rightarrow$ min M=inf M Widerspruch

A1.3.2 Zeige:Ist $A\subset\mathbb{K}$ nach oben(unten) beschränkt, und ist $B\subset A$, $B\neq\emptyset$, so ist B ebenfalls nach oben(unten) beschränkt)

A1.3.3 Sei $A\subset\mathbb{K}$, $A\neq\emptyset$, $B=-A=\{-a:a\in A\}$. Zeige:

a) Genau dann ist A nach oben beschränkt, wenn B nach unten beschränkt

b) Genau dann besitzt A ein Supremum, wenn B ein Infimum besitzt und es gilt sup A=-inf B.

A1.3.4 Zeige: $\mathbb{K}$ selber ist nach oben und unten nicht beschränkt

A1.3.5 Zeige: Genau dann ist ζ Supremum einer Menge $A\subset K$, wenn folgendes gilt: $\forall\ a\in A: a\le\zeta;\ \forall\varepsilon>0\ \exists\ a\in A: a>\zeta-\varepsilon$.
Finde selber eine analoge Charakterisierung für das Infimum von A.

A1.3.6 Seien A,B Teilmengen eines geordneten Körpers.

Definiere $A+B=\{a+b: a\in A \wedge b\in B\}$, $A-B=\{a-b: a\in A \wedge b\in B\}$. Nimm an, dass für alle 4 Mengen $A,B,A+B,A-B$ sup und inf existieren. Zeige:

a) $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

Z.z. $\sup A+\sup B$ ist (.) obere Schranke von $A+B$

(..) kleinste obere Schranke von $A+B$

Bew:

(.) Z.z. $\forall\, x\in(A+B)$: $x\leq\sup A+\sup B$ wie folgt:

Sei $x\in(A+B)$, $x=a+b$, $a\in A$, $b\in B$. Es gilt

$\forall\, a\in A$ $a\leq\sup A$, $\forall\, b\in B$ $b\leq\sup B$ $\Rightarrow$ $\forall\, x=a+b\leq\sup A+\sup B$ $\Rightarrow$

$\sup A+\sup B$ obere Schranke von $A+B$

(..) Sei $A+B\leq m$, Z.z. $\sup A+\sup B\leq m$ wie folgt:

$A+B\leq m \Rightarrow a+b\leq m\ \forall\, a\in A,\ b\in B \underbrace{\Rightarrow}_{b\in B \text{ bel fest}} a\leq m-b\ \forall\, a\in A \Rightarrow$

$m-b$ obere Schranke von A $\Rightarrow$

$\sup A\leq m-b\ \forall\, b\in B$ (da b beliebig gewählt) $\Rightarrow b\leq \underbrace{m-\sup A}_{\text{obere Schranke v B}}\ \forall\, b\in B \Rightarrow$

$\sup B\leq m-\sup A \Rightarrow \sup A+\sup B\leq m$

Ähnliche Aufgabe/Formulierung:

$A,B\subset \mathbb{R}$ seien beschränkte Mengen, d.h.

$|a|\leq c_1$, $|b|\leq c_2$ $\forall\, a\in A,\ b\in B \Rightarrow$

$|a+b|\leq c_1+c_2$ $\forall\, a\in A, b\in B \Rightarrow$

$A+B=\{a+b \mid a\in A, b\in B\}$ ist beschränkt.

Es sei $s_1=\sup A$ und $s_2=\sup B$.

Z.z. $s_1+s_2=\sup(A+B)$ wie folgt

Es gilt: $s_1\geq a$, $s_2\geq b$ $\forall\, a\in A,\ b\in B \Rightarrow s_1+s_2\geq a+b\ \forall\, a\in A,\ b\in B \Rightarrow$

s_1+s_2 ist obere Schranke.

$\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, a_0\in A$, mit $a_0>s_1-\varepsilon/2$ und $b_0\in B$, mit $b_0>s_2-\varepsilon/2 \Rightarrow$

$a_0+b_0\in A+B$ mit $a_0+b_0>s_1+s_2-\varepsilon \Rightarrow s_1+s_2=\sup(A+B)$

b) $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$

Lös: Z.z (.) $A-B\leq\sup A-\inf B$

(..) $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, x\in A-B$, $x\geq(\sup A-\inf B)-\varepsilon$

Sei $\varepsilon>0$ beliebig.

$\exists\, a\in A$: $a\geq\sup A-\varepsilon/2$, $\exists\, b\in B$: $b\leq\inf B+\varepsilon/2$, $-b\geq-\inf B-\varepsilon/2 \Rightarrow$

$x=\underbrace{a-b}_{\in A-B}\geq\sup A-\varepsilon/2-\inf B-\varepsilon/2=(\sup A-\inf B)-\varepsilon$.

c) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

d) $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$

D1.3.2 (506)

Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <):

$\forall\, T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists\, \sup T\in\mathbb{K}$.

Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt

Körper der rellen Zahlen R

Bem:siehe auch A1.3.13.

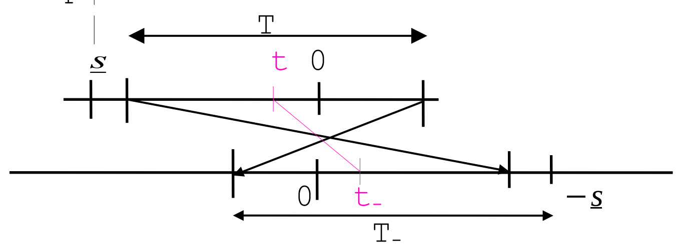
$K=(K,+,\cdot,<)$ ist vollständig:
Jede nach unten beschränkte Menge $T\subset K$, $T\neq\emptyset$
besitzt ein Infimum inf T in K
siehe auch A1.3.13

//**D1.3.1**(500) Sei $(K,<)$ angeordneter Körper $T\subset K$, $T\neq\emptyset$
//1.)Ein Element $\bar{s}\in K$ ($\underline{s}\in K$) ($\bar{s}$, $\underline{s}$ müssen nicht zu T gehören) heißt
// obere (untere) Schranke von T: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$ gilt $t\le\bar{s}$ ($t\ge\underline{s}$)

Bew:Sei $T_-:=\{t_-\in K:-t\in T\}$. Bsp: $t=5\in K$, $-5\in T \Rightarrow -5\in T_-$
$t=-5\in K$, $-(-5)\in T \Rightarrow 5\in T_-$

Dann gilt für $\underline{s}\in K$:
$\underline{s}$ ist untere Schranke von T $\Leftrightarrow$ $\underline{s}\le t$ $\forall$ $t\in T$ $\Leftrightarrow$
$-t=t_-\le-\underline{s}$ $\forall$ $t_-\in T_-$ $\Leftrightarrow$ $-\underline{s}$ ist obere Schranke von T_- $\Rightarrow$ inf $T=-\sup T_-$.
K vollständig $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup T_- $\Leftrightarrow$ $\exists$ inf T

#Bsp:



Für den positiven Kegel K_+ schreiben wir künftig auch R_+, d.h. $x\in R_+$ ist gleichbedeutend mit $x>0$.

*//**S1.3.1** Bsp 8.) (503) Seien $x>0$ und $A_x=\{a>0:a^2\le x\}$. //*
// Falls $\zeta=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.//
*//**D1.3.2** (504) $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <): $\Leftrightarrow$ //*
// $\forall$ $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T\in K$. Ein//
// angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt//
// Körper der rellen Zahlen R//

Für folgendes siehe auch S1.3.2, besser vorher lesen!
Für $x\in R_+$ haben wir in Bsp 8 bei S1.3.1 gezeigt, dass $A_x=\{a\in R\,|\,a^2\le x\}\neq\emptyset$ und nach oben beschränkt ist $\underset{D1.3.2}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\zeta=\sup A_x$ $\underset{Bsp\ 5.)}{\Rightarrow}$ $\zeta^2=x$. Dieses ζ nennen wir die positive Quadratwurzel von x und schreiben $\zeta=\sqrt{x}$.
Wir setzen $\sqrt{0}=0$.

Erweiterte reelle Zahlen $\bar{R}$:
Wir nehmen zu den reellen Zahlen R 2 neue Objekte ∞ und $-\infty$ hinzu,
$\bar{R}=R\cup\{\infty,-\infty\}$ und erweiterte Ordnungsrelation $-\infty<x<\infty$ und definieren die kommutativen Operationen $\infty+x=\infty$ $\forall$ $x\in R$, $\infty+\infty=\infty$, $-\infty+(-\infty)=-\infty$,

$\infty\ast x=\begin{cases}\infty & falls\ x>0\\ -\infty & falls\ x<0\end{cases}$, aber $0\ast\infty$ nicht definiert, $\infty\ast\infty=\infty$,

$(-\infty)\ast\infty=-\infty$, $(-\infty)(-\infty)=\infty$, $\frac{x}{\pm\infty}:=0$ $\forall$ $x\in R$.
$\bar{R}$ ist kein Körper (siehe nicht definiertes)
Intervalle $[a,\infty)=\{x\in R:a\le x<\infty\}$, $(-\infty,b)=\{x\in R:-\infty<x<b\}$

D1.3.3(507) Seien $a,b\in R$, $a\le b$, Dann sei
$[a,b]:=\{x\in R|\ a\le x\le b\}$ abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a,b

$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}|\ a<x\leq b\}, a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
$[a,b):=\{x\in\mathbb{R}|\ a\leq x<b\}, a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall
$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}|\ a<x<b\}, a<b$ offenes Intervall
$(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R}|\ x\leq b\}$, $\quad(-\infty,b):=\{x\in\mathbb{R}|\ x<b\}$
$[a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}|\ x\geq a\}$, $\quad(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}|\ x>a\}$
$(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle

Aus dem Zusammenhang muss sich ergeben, ob (a,b) offenes Intervall oder Paar von a und b ist.

A1.3.7 (Dedekindsche Schnitte)
Geg: $A,B\subset\mathbb{R}$ mit $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}$, $a\leq b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$
Z.z.: $\exists_1\ s\in\mathbb{R}$ mit $a\leq s\leq b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$. (Ersatz für Vollständigkeitsaxiom)
Bew: A ist nach oben beschränkt, denn jedes $b\in B$ ist obere Schranke.
Setze $s=\sup A$.
Dann ist offensichtlich $a\leq s\ \forall\ a\in A \Rightarrow$
s ist kleinste obere Schranke von A: $a\leq s \Rightarrow s\leq b\in B$.
Noch z.z. ist Eindeutigkeit.
Sei $\tilde{s}$: $a\leq\tilde{s}\leq b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$.
Annahme, obere Schranke von A sei $\tilde{s}\neq s \Rightarrow \tilde{s}>s \Rightarrow$
$A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$. $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widerspruch. Also muss $\tilde{s}=s$ sein.

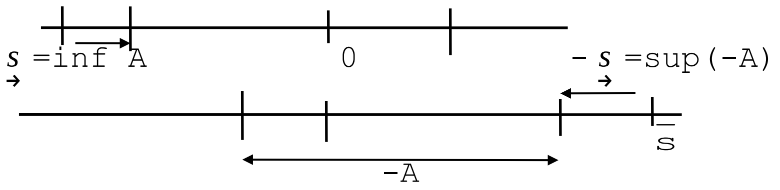
A1.3.9 Zeige: Zu einem $y>0\ \exists_1\ x>0: x^2=y \Rightarrow$ d.h. oben definierte Quadratwurzel von x ist Umkehrabbildung der Funktion x x^2

A1.3.10 Finde heraus, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $x=\sqrt{x}$ richtig bzw falsch ist.
Lös: $x^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x=1\ \&\ x=0$

A1.3.11 Zeige, dass das Vollständigkeitsaxiom zu folgenden Aussagen äquivalent ist
a) Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.
b) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum
c) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum

A1.3.12 Zeige: Für alle $a\in\mathbb{R}$ gilt $|a|=\sqrt{a^2}$

A1.3.13 Es sei K ein angeordneter Körper
a) Definiere für $A\subset K$ die Menge $-A:=\{-x:x\in A\}$.
Zeige: $\exists\ \inf A\in K \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{genau dann, wenn}} \sup(-A)\in K$ existiert
und dann gilt: $\inf A=-\sup(-A)$.
#Bsp
$A:=\{x:x\in A\}$
$-\bar{s}$ $\longleftrightarrow$



Bew: "⇒" Sei $\underset{\rightarrow}{s}=\inf A\in K$.

Wir zeigen: $\sup(-A)=-\underset{\rightarrow}{s}\in K$ (insbesondere existent).

Mit Def:

Zunächst wird gezeigt

(α) $-\underset{\rightarrow}{s}$ ist obere Schranke von $-A$,

dann (β) $-\underset{\rightarrow}{s}$ ist kleinste obere Schranke von $-A$, d.h. $=\sup(-A)$

(α) $\underset{\rightarrow}{s}=\inf A \Rightarrow \underset{\rightarrow}{s}\leq x \;\forall\; x\in A \Rightarrow -\underset{\rightarrow}{s}\geq -x \;\forall\; x\in A \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def v A}} -\underset{\rightarrow}{s}\geq y \;\forall\; y\in -A$

(β) $-\underset{\rightarrow}{s}\leq \bar{s} \;\forall$ oberen Schranken $\bar{s}$ von $-A$

Sei $\bar{s}$ obere Schranke von $-A$ beliebig $\Rightarrow$

$-\bar{s}$ untere Schranke von A

(denn $\bar{s}\geq y \;\forall\; y\in -A \Rightarrow \bar{s}\geq -x \;\forall\; x\in A \Rightarrow -\bar{s}\leq x \;\forall\; x\in A$)

$\underbrace{\Rightarrow}_{s_{\rightarrow}=\inf A} -\bar{s}\leq \underset{\rightarrow}{s} \Rightarrow \bar{s}\geq -\underset{\rightarrow}{s}$

"⇐" Analog Aus Bew folgt $\sup(-A)=-\underset{\rightarrow}{s}=-\inf(A)$

b) Es seien A,B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit $A\subset B$

(.) Zeige: Falls $\sup A$ und $\sup B$ in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\sup A\leq\sup B$

//BeM: 3.)(500) Sei $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $\exists \sup T$ bzw $\inf T \Rightarrow$//

// $\sup T = \min\{\mathring{s} \,/\, \mathring{s}$ ist obere Schranke von T in $\mathbb{K}\}$//

Lös: Z.z. $\exists \sup A, \sup B\in\mathbb{K} \Rightarrow \sup A\leq\sup B$,

$\sup A \underbrace{=}_{\text{Bem 3}} \min\{s' : s'$ ist obere Schranke von A in $\mathbb{K}\}$ $\underbrace{<=}_{\textit{Abschätzung}}$

$\min\{s'' : s''$ ist obere Schranke von B in $\mathbb{K}\} = \sup B$

Bew: Aus „>"

Annahme $\exists\ s_0''$ obere Schranke von B mit $\sup A>s_0''$ $\underbrace{\Rightarrow}_{A\subset B}$

s_0'' ist obere Schranke von A mit $\sup A>s_0''$ $\Rightarrow$ Widerspruch

Bem: $s_0''\geq b\ \forall\ b\in B \Rightarrow s_0''>a,\ A\subset B\ \forall\ a\in A$

(..) Zeige: Falls $\inf A$ und $\inf B$ in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\inf A\geq\inf B$

Lös: analog (.)

(...) Gibt es solche Mengen $A\neq B$, für die $\inf A$, $\inf B$, $\sup A$, $\sup B$ existieren, mit $\sup A=\sup B$ und $\inf A=\inf B$?

Lös: Sei $B=(0,1] \Rightarrow \sup B=1$, $\inf B=0$ (insbesondere existent in $\mathbb{K}$).

$A:=(0,1]\setminus\{\underbrace{1/2}_{\text{irgend ein Punkt}}\} \Rightarrow \sup A=1$, $\inf A=0$.

analog zum Bew für B

A1.3.14 Es sei K ein angeordneter Körper und A:={x∈K:x>1}.
Existieren inf A, min A, sup A, max A in K? Bestimme im Falle der Existenz die entsprechenden Werte.

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf K//*
// R:=<,Anordnungsaxiome://
// (O2)Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//
*// (O3)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*
*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*
// 2.)∃ maxT ⇔ ∃ supT∈K und supT∈T: maxT=supT//
// ∃ minT ⇔ ∃ infT∈K und infT∈T: minT=infT//

Bew:(.)sup A existiert nicht in K, sonst wäre sup A∈K obere Schranke von A d.h. x≤sup A ∀ x∈A $\underbrace{\Rightarrow}_{x>1\,\forall x\in A}$ 1<sup A, 0<sup A $\underbrace{\Rightarrow}_{(O2),(O3)}$ 1<(sup A)+1
$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def } A}$ (sup A)+1∈A Widerspruch zu sup A obere Schranke von A, denn sup A<(sup A)+1
max A existiert nicht in K, da sup A nicht existiert in K, wg. S1.3.1 2.)
(..)inf A existiert und inf A=1. Bew mit Def von inf, denn
α)1 ist untere Schranke von A, klar, da 1<x ∀ x∈A (insbesondere 1≤x ∀ x∈A)
β)1≥ $\underline{s}$ ∀ unteren Schranken $\underline{s}$ von A.
Bew:Annahme: ∃ $\underline{s}$ >1 für untere Schranke von A $\underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{R}\mathbb{R}}$ ∃ c∈K:1<c< $\underline{s}$,
insbesondere c∈A.
Widerspruch zu $\underline{s}$ untere Schranke von A, da c< $\underline{s}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{\alpha),\beta),Def}$
inf A=1∈K
min a existiert nicht, da 1∉A (S1.3.1)

Andere Formulierung:
M_1={x∈R:x>2}
Lös:Es gilt sup M_1=∞ und inf M_1=2, min M_1 existiert nicht.
Bew:M_1≠∅, da 2+1>2, d.h.2+1∈M_1.
M_1 besitzt keine obere Schranke, denn wenn s eine obere Schranke wäre, dann müsste gelten: s $\underbrace{\geq}_{!}$ 2+1 ⇒ s+1 $\underbrace{>}_{!}$ 2 ∧ s+1>s Widerspruch ⇒ sup M_1=∞
2 ist untere Schranke von M_1.
Annahme s>2 ⇒ 2< $\frac{2+s}{2}$ <s,
d.h. $\frac{2+s}{2}$ <s und $\frac{2+s}{2}$ ∈M_1 ⇒ s ist keine untere Schranke von M_1 ⇒ inf M_1=2. Da 2∉M_1 existiert min M_1 nicht.

A1.3.15 A,B≠∅, A,B⊂R. ∀ a∈A,b∈B gelte a≤b. Zeige, sup A≤inf B.
Lös:Ann sup A>inf B ⇒ ∃ a∈A mit a≥inf B+ε/2 ⇒ inf B≤a-ε/2 ⇒
∃ b∈B mit b≤(a-ε/2)+ε/4=a-ε/4 ⇒ Widerspruch zur Vor b≥a

A1.3.16

Bestimme sup X und inf X (mit Bew) für folgende Mengen X und prüfe, ob diese Mengen ein max oder min besitzen

a) $X=\{x: x=\frac{|t|}{1+|t|}, t\in\mathbb{R}\}$

Lös: $0\le|t|<1+|t| \Rightarrow 0\le\frac{|t|}{1+|t|}<\frac{|t|}{|t|}=1 \quad \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ 0 ist untere Schranke,

1 ist obere Schranke von X.

- inf,min? Für t=0 ist $\frac{|t|}{1+|t|}=0 \Rightarrow 0\in X$, 0=min X=inf X
- sup? Annahme $\exists$ m<1 mit $\frac{|t|}{1+|t|}\le m \quad \forall t\in\mathbb{R}$, $1-m>0 \Leftrightarrow$

  $|t|\le m(1+|t|)=m+|t|m \Leftrightarrow |t|-|t|m\le m \Leftrightarrow |t|(1-m)\le m \Leftrightarrow |t|\le\frac{m}{1-m} \quad \forall t\in\mathbb{R}$,

  Widerspruch zu $\mathbb{R}$ unbeschränkt $\Rightarrow \forall m: m\ge x: x\in X \Rightarrow m\ge1 \Rightarrow$ sup X=1.
- Annahme 1=max X? $\Rightarrow 1\in X \Rightarrow 1=\frac{|t|}{1+|t|} \Leftrightarrow 1+|t|=|t| \Leftrightarrow 1=0!$ falsch $\Rightarrow 1\notin X \Rightarrow$

  X hat kein max.

Andere Formulierung:

$M=\{y=\frac{|x|}{1+|x|}: x\in\mathbb{R}\}$

*//**D1.2.2** (405) $K=(K,+,{}^*,<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$.//*
// $\overline{m}$ =maxT:$\Leftrightarrow$ $\forall t\in T$: $t\le\overline{m}$. $\underline{m}$ =min T:$\Leftrightarrow \forall t\in T$: $\underline{m}\le t$//
*//**S1.3.1** (501) Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
// 1.) $\bar{s}$ = supT: $\Leftrightarrow$ α) $\bar{s}$ ist obere Schranke von T und //
// β) $\forall\, \varepsilon>0$ ist $\bar{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T//
// $\Leftrightarrow \forall t\in T$: $t\le\bar{s}$ und $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\bar{s}-\varepsilon$//
// 2.) $\exists$ minT $\Leftrightarrow \exists$ infT$\in K$ und infT$\in T$: minT=infT//

Lös: Beh $M=[0,1)$. Damit inf M=min M=0, sup M=1, $\exists$ kein max M, denn

$0\in M$ und $0\le y \quad \forall y\in M \underbrace{\Rightarrow}_{D1.2.2}$ min M=0 $\Rightarrow$ inf M $\underbrace{=}_{S1.3.1\ 2.)}$ 0.

1 ist obere Schranke von M und $1-\varepsilon \quad \forall\, \varepsilon>0$ ist keine obere

Schranke von M $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 1.)}$ sup M=1 $\underbrace{\overset{S1.3.1\ 2.)}{\Rightarrow}}_{1\notin M}$ max M existiert nicht, da

$1\notin M$

Bew: • $M\subset[0,1)$, sei $y\in M$,

Nebenrechnung: $1+|x|>|x|$, $\frac{1}{1+|x|}<\frac{1}{|x|}$, $\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}$

d.h. $y=\frac{|x|}{1+|x|}$ mit $x\in\mathbb{R} \Rightarrow 0\le|x|<1+|x| \Rightarrow 0\le\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}=1$ falls $x\neq0$

bzw

$0\le\frac{0}{1+0}<1$, falls x=0

• $M\supset[0,1)$, $y\in[0,1)$, Nebenrechnung: $y=\frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y+xy=x \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

Definiere $x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x\ge0 \Rightarrow y=\frac{x}{1+x}=\frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow y\in M$

Ähnliche Aufgabe

$M=\{ \frac{|x|}{1+2|x|} : x\in\mathbb{R}\}$

Es gilt min M=inf M=0, sup M=1/2, max existiert nicht.

Für $x\in\mathbb{R}$ gilt $0\le \frac{|x|}{1+2|x|} = \frac{2|x|}{1+2|x|} * \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$0\in M$ ist untere Schranke $\Rightarrow$ min M=0=inf M

½ obere Schranke vom M $\Rightarrow$ Sei $0<s<1/2$.

Setze $t=\frac{s+1/2}{2}$ ($\Rightarrow$ $0<s<t=\frac{s+1/2}{2}<1/2$).

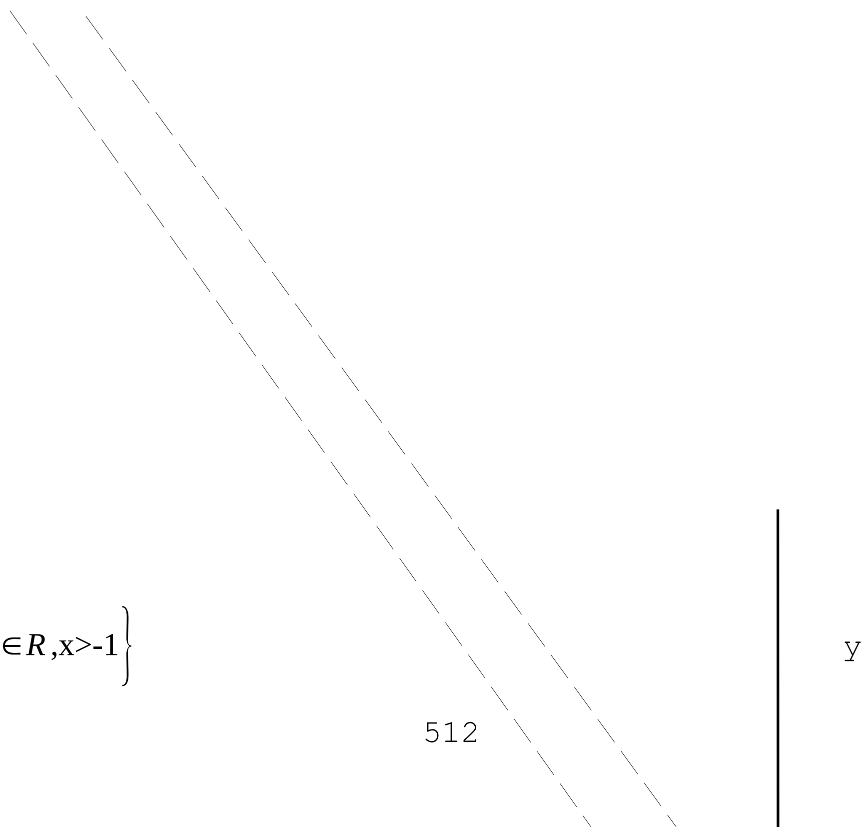
Dann ist $t\in M$, denn für $\underbrace{x>0}_{x=|x|}$ gilt $t=\frac{x}{1+2x} \Leftrightarrow 2t=\frac{1+2x-1}{1+2x} \Leftrightarrow$

$2t=1-\frac{1}{1+2x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+2x}=1-2t \Leftrightarrow 1+2x=\frac{1}{1-2t} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{1}{\underbrace{1-2\underbrace{t}_{>0}}_{<1}}}^{>1}-1\right)>0 \Rightarrow$

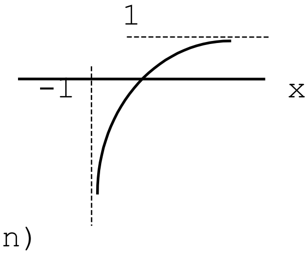
$\exists\, x\in\mathbb{R}$: $s>t=\underbrace{\frac{|x|}{1+2|x|}}_{\in M}<1/2 \Rightarrow$

s ist also keine obere Schranke $\Rightarrow$ 1/2=supM, $y=\left\{\frac{x}{1+x}:x\in R, x>-1\right\}$

$1/2\notin M \Rightarrow$ maxM existiert nicht



b) M= $y=\left\{\frac{x}{1+x}:x\in R, x>-1\right\}$



Beh: $M=(-\infty,1)$, damit $\inf M=-\infty$ d.h. M ist nach unten nicht beschränkt.
$\nexists$ kein inf M und kein min M
sup M=1. $\nexists$ kein max M,
Begründung analog zu a)

Bew: Wir zeigen zunächst: $M=(-\infty,1)=\{y\in\mathbb{R}: y<1\}$
(dann anhand von $(-\infty,1)$ sup, inf, max, min)
mit $M\subset(-\infty,1)$ & $M\supset(-\infty,1)$:

- $M\subset(-\infty,1)$: $y\in M$, zu zeigen $y\in(-\infty,1)$

  $\Rightarrow \exists\, x\in\mathbb{R},\ x>-1$ mit $y=\dfrac{x}{1+x}$ $\Rightarrow y<1$, d.h. $y\in(-\infty,1)$,

  denn 1.Fall $x=0 \Rightarrow y=0<1$

  2.Fall $x>0 \Rightarrow 1+x>x \Rightarrow \dfrac{1}{1+x}<\dfrac{1}{x} \Rightarrow y=\dfrac{x}{1+x} \underbrace{<}_{x>0} \dfrac{x}{x}=1$

  3.Fall $x<0 \Rightarrow y=\underbrace{x}_{<0}\ \underbrace{\dfrac{1}{1+x}}_{>0 \text{ da } x>-1} <0<1$

- $M\supset(-\infty,1)$: zunächst: $y\in(-\infty,1) \Rightarrow y<1 \Rightarrow 1-y>0$

  zu zeigen $y\in M\ \forall\ y\in(-\infty,1)$

  falls aus $y=\dfrac{x}{1+x}$ folgt: $x\in\mathbb{R} \wedge x>-1$

  Betrachtung:

  $$y=\frac{x}{1+x} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x>-1\Leftrightarrow 1+x>0\Leftrightarrow x\neq 0} y+yx=x \Leftrightarrow x-yx=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$$

  1.Fall $y\geq 0$, $x=\underbrace{\dfrac{1}{1-y}}_{>0,\text{da } y<1}\geq 0>-1$ wie in Def M gesetzt

  2.Fall $y<0$, $-y>0 \Rightarrow +1-y>-y>0, 1-y>-y>0$

  $$x=\frac{y}{1-y} \underbrace{>}_{*} \frac{y}{-y}=-1 \Rightarrow y\in M, \text{ da } y=\frac{x}{1+x}$$

  $$*1-y>-y \Rightarrow \frac{1}{1-y}<\frac{1}{-y} \Rightarrow x=\frac{y}{1-y} \underbrace{>}_{y<0} \frac{y}{-y}=-1$$

//***S1.3.1*** *(501) Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//
// $\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ infT$\in$K und infT$\in$T: minT=infT//

Aus $M=(-\infty,1)$ folgt sofort die Beh., denn

(.) Wäre M nach unten beschränkt, so $\exists$ $k\in\mathbb{R}: k\neq y$, $\forall\ y\in M=(-\infty,1) \Rightarrow k\leq 1 \Rightarrow k-1<1$, also $k-1\in M$ Widerspruch zu k untere Schranke $(k-1<k)$.

(..) min M existiert nicht, da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert (S1.3.1)

(...) sup M=1

(....) max M<x nicht, da $1\notin M$ (und S 1.3.1)

Andere Formulierung:

$X=\{x \mid x=\dfrac{t}{1+t},\ t>-1\}$

Lös:Für $-1<t<0 \Rightarrow \frac{t}{1+t}<0$

Für $t>0 \underbrace{\Rightarrow}_{wie\ a)}$ $x=\{0\le x<1\}$ und sup $X=1$, es existiert kein max.

Beh: X ist nach unten unbeschränkt

Bew:Annahme $\exists\ K\in\mathbb{R}$ (oBdA $K<1$) mit $x\ge K\ \forall\ x\in X \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Def Menge}} \frac{t}{1+t}\ge K\ \forall\ t>-1$

$\Leftrightarrow t\ge K+Kt \Leftrightarrow t\underbrace{(1-K)}_{>0}\ge K \Leftrightarrow t\ge \frac{K}{1-K}>-1$ da $K>K-1$ bzw $\frac{K}{K-1}<1 \Leftrightarrow \frac{K}{1-K}>-1$

$\Leftrightarrow \exists\ t^*:=1/2(\underbrace{\underbrace{\frac{K}{1-K}}_{>-1}-1}_{>-2})>\frac{K}{1-K}>t>-1 \Rightarrow$ Widerspruch ????

da $t>-1$, d.h. auch $t>\frac{K}{1-K} \Rightarrow$ Annahme $x\ge K$ falsch $\Rightarrow$ Beh falsch

Andere Formulierung:

$M=\{ \frac{x}{1+x}, x\in\mathbb{R}, x>-1\}$, sup, inf, max, min?

Lös: zu beweisen $\inf M=-\infty$, d.h. nicht nach untenbeschränkt $\Rightarrow$ inf M in $\mathbb{R}$ nicht existent

min, max existiert nicht, sup M=1

$M=(-\infty,1)=\{y\in\mathbb{R}: y<1\}$ wenn $M\subset(-\infty,1) \wedge M\supset(-\infty,1)$

$M\subset(-\infty,1)$: $y\in M \Rightarrow \exists\, x\in\mathbb{R}, x>-1$ mit $y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y<1$, d.h. $y\in(-\infty,1)$ denn

1.Fall: $x=0$, $1+x>x \Rightarrow y=0<1$

2.Fall: $x>0$, $1+x>x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{1+x}<1=\frac{x}{x}$

3.Fall: $x<0$: $y=\underbrace{x}_{<0} * \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0}<0<1$

$M\supset(-\infty,1)$: $y\in(-\infty,1)$, d.h. $y<1$. Setze $x:=\frac{y}{1-y}$ (vgl oben) $\Rightarrow$

$x\in\mathbb{R}$ & $x>-1$, denn

1.Fall: $y\geq 0 \Rightarrow x=\underbrace{y}_{>=0} * \underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0} \geq 0>-1$

2.Fall: $y<0$: $1-y>-y \Rightarrow \frac{1}{1-y}<\frac{1}{-y} \Rightarrow x=\frac{y}{1-y}>\frac{y}{-y}=-1$

$\Rightarrow y\in M$, da $x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x-xy=y \Rightarrow x=y+xy \Rightarrow$

$y=\frac{x}{1+x}\in M$

$M=(-\infty,1) \Rightarrow$

(.) Wäre M nach unten beschränkt $\Rightarrow \exists\, K\in\mathbb{R}$: $K\neq y\in M=(-\infty,1) \Rightarrow K<1 \Rightarrow$ $k-1<1 \Rightarrow k-1\in M \Rightarrow$ Widerspruch zu K ist untere Schranke (K=1<K)

(..) min existiert nicht da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert.

(...) sup M=1 Bew siehe a)

(....) max M existiert nicht, da $1\notin M$

c) M= $t=\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{m}:m,n\in N\right\}$

Vermutung: n,m→∞ ⇒ M→0 ⇒ (..) inf M=0, min M existiert nicht.

n,m=1 ⇒ M=3∈M ⇒ (.) sup M=max M=3

*//**D1.2.2** (405) K=(K,+,*,<) & T⊂K, T≠∅. $\overline{m}$=maxT:⇔ ∀ t∈T: t≤$\overline{m}$.//*

*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*

// 1.) $\underset{\rightarrow}{s}$ inf T:⇔ α) $\underset{\rightarrow}{s}$ ist untere Schranke von T und //

// β) ∀ ε>0 ist $\underset{\rightarrow}{s}$ +ε keine untere Schranke von T //

// ⇔ ∀ t∈T: t≥$\underset{\rightarrow}{s}$ und ∀ ε>0 ∃ t_ε∈T mit t_ε<$\underset{\rightarrow}{s}$ +ε//

// 2.)∃ maxT ⇔ ∃ supT∈K und supT∈T: maxT=supT//

Beh:=Vermutung

Bew:(.) $\frac{1}{n}+\frac{2}{m}\underbrace{\leq}_{n\geq 1}\frac{1}{1}+\frac{2}{m}\underbrace{\leq}_{m\geq 1}1+\frac{2}{1}=3$ ∀ m,n∈N ⇒

t≤3 ∀ t∈M und 3∈M (mit m=n=1) $\underbrace{\Rightarrow}_{D\,1.2.2}$ max M=3 $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 2.)}$ sup M=3

(..)Wegen $\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}+\underbrace{\frac{2}{m}}_{>0}>0$ ∀ m,n∈N ist 0 untere Schranke von M

Zwischenbetrachtung: ∀ε>0 ∃ t_ε∈M mit t_ε<0+ε (dann existiert inf M)

Bew:Sei ε>0 bel fest, N ist unbeschränkt ⇒

∃ $\underbrace{n_0,m_0}_{\text{von } \epsilon \text{ abhängig}}$ ∈N: n_0>2/ε, m_0>2·2/ε.

Setze $t_\varepsilon:=\frac{1}{n_0}+\frac{2}{m_0}$ ⇒ t_ε∈M und t_ε<ε/2+ε/2=ε

Aus Zwischentr $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 1.)}$ inf M=0 $\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 2.}}^{0\notin M}$ min M existiert nicht

d) M={1}∪ $\left\{\frac{n-m}{n+m}|n,m\in N\right\}$

//**S1.3.1** (501)Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//

// 1.) $\underset{\rightarrow}{s}$ inf $T:\Leftrightarrow$ α) $\underset{\rightarrow}{s}$ ist untere Schranke von T und //

// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\underset{\rightarrow}{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //

// $\Leftrightarrow\ \forall\ t\in T$: $t\geq\underset{\rightarrow}{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underset{\rightarrow}{s}+\varepsilon$//

// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup$T\in K$ und sup$T\in T$: maxT=supT//

Lös:Es gilt $\frac{n-m}{n+m}<\frac{n}{n+m}<1$, 1 obere Schranke von M und

$\frac{n-m}{n+m}>\frac{-m}{n+m}>-1$, -1 untere Schranke von M.

Wegen $1\in M$ folgt 1=max M=sup M.

Bleibt zu zeigen:-1=inf M, min M existiert nicht

$\underset{\rightarrow}{s}=-1$, zu zeigen: $\forall\ t\in T$: $t\geq-1\ \wedge\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in M$ mit $t_\varepsilon<-1+\varepsilon$

Ansatz n=1, $\exists$ m ?:... wobei

$\frac{1-m-1+1}{1+m}<-1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{1+m}+\frac{-m-1}{1+m}<-1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{1+m}-1<-1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon}<1+m \Leftrightarrow m>\frac{2}{\varepsilon}-1.$

Statt 1 beliebiges n_0 gewählt

$\frac{n_0-m-n_0+n_0}{n_0+m}<-1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2n_0}{n_0+m}+\frac{-m-n_0}{n_0+m}<-1+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2n_0}{n_0+m}-1<-1+\varepsilon \Leftrightarrow$

$\frac{2n_0}{n_0+m}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{n_0+m}{2n_0}>\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n_0+m>\frac{2n_0}{\varepsilon} \Leftrightarrow m>\frac{2n_0}{\varepsilon}-n_0$

Wähle hier ein $m\in\mathbb{N}$ mit $m>\frac{2}{\varepsilon}$ bzw $\frac{2n_0}{\varepsilon}-n_0$

(existiert, da $\mathbb{N}$ nicht beschränkt).

Dann gilt $\frac{1-m}{1+m}\in M$ und $\frac{1-m}{1+m}<-1+\varepsilon$

$\Rightarrow$ -1=inf M und min M existiert nicht, denn $-1\notin M$

e) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x-a)(x-b)(x-c)<0\}$, wobei $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a<b<c$.

Lös:Es gilt $A=(x-a)(x-b)(x-c)=0$ für $x\in\{a,b,c\}$.

Da $a<b<c$ ist, gilt

$x<a<b<c \Rightarrow x<a \wedge x<b \wedge x<c \Rightarrow x-a<0 \wedge x-b<0 \wedge x-c<0 \Rightarrow A<0$

$a<x<b<c \Rightarrow x>a \wedge x<b \wedge x<c \Rightarrow x-a>0 \wedge x-b<0 \wedge x-c<0 \Rightarrow A>0$

$a<b<x<c \Rightarrow x>a \wedge x>b \wedge x<c \Rightarrow x-a>0 \wedge x-b>0 \wedge x-c<0 \Rightarrow A<0$

$a<b<c<x \Rightarrow x>a \wedge x>b \wedge x>c \Rightarrow x-a>0 \wedge x-b>0 \wedge x-c>0 \Rightarrow A>0$

$(x-a)(x-b)(x-c)<0$, wenn $x\in\{(-\infty,a)\cup(b,c)\}$ und $x\in\{(a,b)\cup\{b,\infty\}$???$\Rightarrow$

$A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,(x-a)(x-b)(x-c)<0\}=(-\infty,a)\cup(b,c)$ $\Rightarrow$

A ist nicht nach unten beschränkt, inf $A=-\infty$

und sup A=c, denn c ist obere Schranke von A und für $\varepsilon>0$ existiert $d\in(b,c)$ mit $d>c-\varepsilon$ $\Rightarrow$ max A existiert nicht, denn $c\notin A$.

S1.3.2(518)

Vor: $x\in\mathbb{R}$, $x\geq0$,.

Beh: $\exists$ genau ein $y\in\mathbb{R}$ mit $y\geq0$ und $y^2=x$

($y=:\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x)

//**D1.3.2** *(504) $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <): ⇔ //*
// $\forall\, T\subset K,\ T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists\ \sup T\in K$. Ein angeordneter,//
// vollständiger (bzgl Anordnung)
// Körper heißt Körper der rellen Zahlen R

Bew:Z.z (.)Existenz (..) Wert y^2 und (...)Eindeutigkeit, oBdA $x>0$

(.)Betrachte $T:=\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq 0$ und $y^2\leq x\}\subset\mathbb{R}$ d.h. alle Axiome benutzbar.

$T\neq\emptyset$ (da $0\in T$) und beschränkt:

untere Schranke 0,

obere Schranke $y=x+1$

(denn für $y>x+1\ \underbrace{\Rightarrow}_{y\geq 0}\ y^2>(x+1)^2=x^2+2x+1>x \Rightarrow y^2>x$)

$\Rightarrow T\neq\emptyset$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}\ \exists\ y:=\sup T\ (0\leq y\leq x+1)$

(..) Z.z. $y^2=x$. Lösungsweg: $y^2\not>x$: $y^2\not<x$ wie folgt:

●Annahme $y^2>x$:Setze $\varepsilon=\dfrac{y^2-x}{2y}>0$,

Betrachte $(y-\varepsilon)^2=y^2-2\varepsilon y+\varepsilon^2>y^2-2\varepsilon y=y^2-2\dfrac{y^2-x}{2y}y=x$ d.h $y-\varepsilon$ ist obere Schranke von T ⇒ Widerspruch zur Def von y, also ist $y^2\leq x$

● Annahme $y^2<x$

Sei $\varepsilon=\dfrac{x-y^2}{2y+1}>0$,

(oBdA $\varepsilon\leq 1$ ⇒ sonst $\dfrac{x-y^2}{2y+1}>1 \Rightarrow x-y^2>2y+1 \Rightarrow x>y^2+2y+1=(y+1)^2 \Rightarrow$
$(y+1)^2<x$ ⇒ Widerspruch zur Annahme $y^2<x$)

Betrachte $(y+\varepsilon)^2=y^2+\varepsilon\ (2y+\underbrace{\varepsilon}_{<1})\leq y^2+\varepsilon(2y+1)=y^2+\dfrac{x-y^2}{2y+1}(2y+1)=x \Rightarrow$

$(y+\varepsilon)^2\leq x \Rightarrow y+\varepsilon\in T$ Widerspruch zu y ist obere Schranke von T

$\underbrace{\Rightarrow}_{(O1)}\ y^2=x$

//**D1.2.1** *(400) $(K,+,*)$ angeordnet: ⇔ $\exists$ auf K R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O1) $\forall$ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://
// a<b oder b<a oder a=b //

(...)Eindeutigkeit: Annahme $\exists\ y\neq z\in\mathbb{R}$, $y^2=z^2=x$

α) $y<z$ $y^2<yz<zz=z^2$ Widerspruch

β) $y>z$, $y^2>yz>zz=z^2$ Widerspruch ⇒ Eindeutigkeit

..$0<y<z \Rightarrow y^2<yz<z^2$

Bem:

1.) Sei $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|0\leq x\}$, dann ist $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definiert durch $x\mapsto f(x)=x^2$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion ($0\leq x_1\leq x_2 \Rightarrow x_1^2\leq x_2^2$) injektiv $f^{-1}: [0,\infty)\to[0,\infty)$ $x\mapsto\sqrt{x}$

$f: \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^2$ ist bij, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}:(y)=\sqrt{y}$ Quadratwurzelfunktion

2.) α) $a,b\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a}\ \sqrt{b}=\sqrt{ab}$

Bew: $\sqrt{a}, \sqrt{b}\geq 0$ $(\sqrt{a}\ \sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\ \sqrt{b})(\sqrt{a}\ \sqrt{b})=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$

Wegen der Eindeutigkeit der $\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

β) $0\leq a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$

Bew: Annahme $\sqrt{a}\geq\sqrt{b}\geq 0 \Rightarrow a\geq b$ Widerspruch

γ) $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$

Bew: da $a^2=(-a)^2\geq 0$, $a\geq 0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=a$, $a<0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a \Rightarrow$
$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$

3.) Die Funktion $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^2$ ist bijektiv, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ (Wurzelfunktion)

D1.3.4 (519) Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d: X\text{x}X\to\mathbb{R}$, heißt Metrik auf X, wenn für beliebige $x,y,z\in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:

1.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2.) Symmetrie: $d(x,y)=d(y,x)$
3.) Dreiecksungleichung: $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

S1.3.3 (519) **Positive Definitheit**

$d: X\text{x}X\to\mathbb{R} \Rightarrow d(x,y)\geq 0$

Bew: $0=\frac{1}{2}d(x,x) \underset{D1.3.4\ 3.)}{<=} \frac{1}{2}(d(x,y)+d(y,x)) \underset{D1.3.4\ 2.)}{=}$
$\frac{1}{2}(d(x,y)+d(x,y))=d(x,y) \Rightarrow d(x,y)\geq 0$

D1.3.5 (519)

(X,d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. (Manche Autoren fordern zusätzlich, dass $X\neq\emptyset$.
In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.)

Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.