## 1.3(500) **Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen**

Alle bisherigen Überlegungen gelten z.B auch für den Körper der rationalen Zahlen.

**D1.3.1**(500) Sei $(K,<)$ angeordneter Körper $T\subset K$, $T\neq\emptyset$

1.) Ein Element $\bar{s}\in K$ $(\underline{s}\in K)$ $(\bar{s}, \underline{s}$ müssen nicht zu T gehören) heißt obere (untere) Schranke von T: $\Leftrightarrow$ $\forall\ t\in T$ gilt $t\leq\bar{s}$ $(t\geq\underline{s})$

2.) T heißt nach oben (unten) beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine obere (untere) Schranke von T

3.) T heißt beschränkt: $\Leftrightarrow$ T ist nach oben und unten beschränkt.

4.) Ein $\overleftarrow{s}\in K$ $(\underrightarrow{s}\in K)$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von T (größte untere Schranke oder Infimum von T): $\Leftrightarrow$

α) $\overleftarrow{s}$ $(\underrightarrow{s})$ ist obere (untere) Schranke von T

β) $\overleftarrow{s}\leq\bar{s}$ $\forall$ oberen Schranken $\bar{s}$ von T $(\underrightarrow{s}\geq\underline{s}$ $\forall$ unteren Schranken $\bar{s}$ von T)

Bez: $\overleftarrow{s}=\sup T$ $(\underrightarrow{s}=\inf T)$

Andere Formulierung:

a=supA: $\begin{cases} \forall\ x\in A: x\leq a \ \ d.h.\ a \text{ ist obereSchranke von } A \\ \forall\ c\in R: x\leq c\ \forall\ x\in A\Rightarrow a\leq c,\ d.h.\ a \text{ ist obereSchranke von } A \end{cases}$ $\Leftrightarrow$

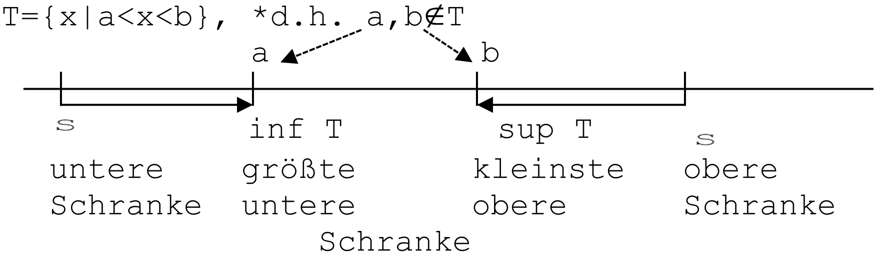
$a\in R$ ist kleinste obere Schranke von A

Bem: $a\in T$, z.B. $T=\{t|t\geq a\}\Rightarrow a=\inf T=\min T$

$a\notin T$, z.B. $T=\{t|t>a\}\Rightarrow a=\inf T\neq\min T$

Bsp/Merkskizze

$T=\{x|a<x<b\}$, *d.h. $a,b\notin T$




Bez: 1.) Ist $T\subset K$ nach oben/unten nicht beschränkt, so schreibt man $\sup T:=\infty$ $(\inf T:=-\infty)$ (dann existiert supT/infT nicht)

2.) Für $T=\emptyset$ sei $\sup\emptyset:=-\infty$, $\inf T:=+\infty$

Bem: 1.) $T\subset K$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ $c\in K$ mit $|t|\leq c$ $\forall$ $t\in T$

2.) Falls existent, sind sup T und inf T eindeutig bestimmt

Bew: $s_1, s_2=\sup T\Rightarrow s_1\leq s_2$ und $s_2\leq s_1\Rightarrow s_1=s_2$

3.) Sei $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $\exists$ sup T bzw inf T $\Rightarrow$

$\sup T=\min\{\bar{s}\,|\,\bar{s}$ ist obere Schranke von T in $K\}$

$\inf T=\max\{\underline{s}\,|\,\underline{s}$ ist untere Schranke von T in $K\}$

d.h. sup T und inf T müssen nicht, können aber $\in K$ sein.

Wenn sup T bzw inf T $\in K$, siehe S1.3.1 2.

**Zusätzliche Ausführungen:**

Seien $A\neq\emptyset$, $A,B\subset K$ und sei $\zeta\in K$. Wir schreiben dann

$A\leq\zeta \Leftrightarrow \zeta\geq A \Leftrightarrow \forall\, a\in A : a\leq\zeta$ obere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A\geq\zeta \Leftrightarrow \zeta\leq A \Leftrightarrow \forall\, a\in A : a\geq\zeta$ untere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A\leq B \Leftrightarrow B\geq A \Leftrightarrow \forall\, b\in B : A\leq b$

Jedes $\zeta$ mit $A\leq\zeta$ heißt obere Schranke für A, jedes $\zeta$ mit $A\geq\zeta$ heißt untere Schranke für A. Falls A eine obere (untere) Schranke besitzt, dann heißt A nach oben(unten)beschränkt. Falls A nach oben und unten beschränkt ist, nennen wir A kurz beschränkt.

$a\in A$, welches gleichzeitig obere(untere) Schranke von A ist, heißt maximales (minimales)Element oder kürzer Maximum(Minimum) von A und wir schreiben: $a=\max A$ ($a=\min A$).

**S1.3.1**(501) Vor.:Sei $K$ angeordnet und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$

Beh:1.) $\overleftarrow{s}=\sup T :\Leftrightarrow$ $\alpha)$ $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und

$\beta)$ $\forall\,\varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T

$\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\leq\overleftarrow{s}$ und $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$

Bew:Negation von $\beta)$: $\exists\,\varepsilon_0>0$ aus $K$ und $\forall\, t\in T: t\leq\overleftarrow{s}-\varepsilon_0 \Leftrightarrow$

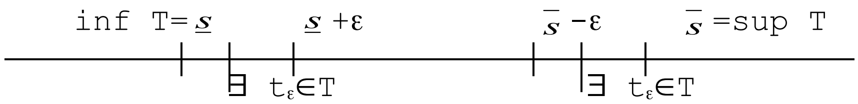
$\exists\,\varepsilon_0>0$ aus $K$: $\tilde{s}\leq\overleftarrow{s}-\varepsilon_0$ ist obere Schranke von T, die kleiner als $\overleftarrow{s}$ ist

analog

$\underline{s}=\inf T :\Leftrightarrow$ $\alpha)$ $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und

$\beta)$ $\forall\,\varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T

$\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\geq\underline{s}$ und $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$




2.) $\exists \max T \Leftrightarrow \exists \sup T\in K$ und $\sup T\in T$: $\max T=\sup T$

$\exists \min T \Leftrightarrow \exists \inf T\in K$ und $\inf T\in T$: $\min T=\inf T$

*//**D1.2.2** (405) $K=(K,+,{}^{*},<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$. $\overline{m}=\max T :\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\leq\overline{m}$ .//*

Bew: „$\Rightarrow$„ $\overline{m}:=\max T \underbrace{\Rightarrow}_{D1.2.2} \forall\, t\in T$ gilt $t\leq\overline{m}$ und $\overline{m}\in T \Rightarrow$

$\overline{m}\leq s$ $\forall$ oberen Schranken von T, $\overline{m}$ obere Schranke von T $\Rightarrow$

$\forall\, s'$ die obere Schranke von T gilt $t\leq s'$ $\forall\, t\in T$.

$\overline{m}\in T \Rightarrow \overline{m}\leq s' \Rightarrow \exists\ \overline{m}=\sup T\in T$

„$\Leftarrow$„ $\overline{m}=\sup T$ und $\overline{m}\in T \Rightarrow \forall\, t\in T: t\leq\overline{m}$ . Da $\overline{m}\in T \Rightarrow \exists \max T=\overline{m}$

Bsp:1.) $T=(0,1] \Rightarrow 1=\max T=\sup T$, $0=\inf T\neq\min T$

2.) $\mathbb{R}\supset M=(0,1)\cup[2,5]$

$\forall\, x>5$: $m\leq5$ $\forall\, m\in M$, aber x ist nicht kleinste obere Schranke.

Analog für $x=0$, also $\sup M=\max M=5$, $\inf M=0$

3.) $A:=\{x\in\mathbb{R}:\ 0\le x<5\}$

$\inf A=\min A=0$.

Bew: 0 ist untere Schranke da $0\le a\ \forall\ a\in A$. Sei $r>0\ \Rightarrow$

$r$ ist keine untere Schranke von A, denn $\tilde{r}:=\frac{r}{2}<r$, aber

$\tilde{r}\in A\ \Rightarrow$ 0 ist größte untere Schranke. $0\in A$. Analog $\sup A=1$.

$1\notin A\ \Rightarrow\ \nexists\ \max A$

4.) $B:=\{\frac{1}{n}:\in\mathbb{N}\}$. $\inf >B=0\notin B\ \Rightarrow\ \nexists\ \max B$

5.) $x\ge 0,\ x^2\ge 2\ \Leftrightarrow\ x>\sqrt{2}$

Bew: "$\Leftarrow$" $x\ge\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x*x\ge\sqrt{2}*\sqrt{2}=2>0$

„$\Rightarrow$" Annahme $x<\sqrt{2}\ \Rightarrow\ x*x<\sqrt{2}*\sqrt{2}=2\ \Rightarrow$

Definiere $C:=\{x\in\mathbb{R}:x\ge\sqrt{2}$ und $x<3\}$...Beh $\min C=\sqrt{2}\ \Rightarrow$

$\sqrt{2}\in C$ und $\sqrt{2}\le c\ \forall\ c\in C\ \underbrace{\Rightarrow}_{\exists\min C}\ \min C=\inf C=\sqrt{2}\ \underbrace{\Rightarrow}_{\nexists\max C}$

$\forall\ x\in C:\ \underbrace{y}_{\in M}=\frac{x+3}{2}>x$. $\sup C=3:\ 3\ge c\ \forall\ c\in C$

6.) Sei $(\mathbb{K},<)$ und $T=\{x\in\mathbb{K}\mid -1<x\le 0\}=(-1,0]$

$\max T=\sup T=0$, $\inf T=-1$, $\min T$ existiert nicht.

Bew: $\inf T=-1\ \Rightarrow$ Es gilt $-1\le x\ \forall\ x\in T\ \Rightarrow\ -1$ ist untere Schranke.

Annahme: $s>-1$ sei ebenfalls untere Schranke von T.

Definiere $\tilde{s}=\frac{-1+s}{2}\ \underbrace{\Rightarrow}_{RR<}\ -1<\tilde{s}<s<0\ \Rightarrow\ \tilde{s}\in T$, aber $\tilde{s}<s$

Widerspruch zu s ist untere Schranke von T

7.) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $A,B\subset\mathbb{K}$, $A,B\neq\emptyset$ und beschränkt.

Z.z $\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\sup B\}$

Bew: ObdA sei $\sup A\ge\sup B$, z.B. $A=[0,5)$, $B=(-2,3)\ \Rightarrow$

Sup $A=5$, $\sup B=3$

(.) Z.z. $\sup A$ obere Schranke: $\sup A\ge t\ \forall\ t\in A\ \Rightarrow$

$\sup A\ge\sup B\ge b\ \forall\ b\in B\ \Rightarrow\ \sup A\ge u\ \forall\ u\in A\cup B$

(..) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ u\in A\cup B:\sup A-\varepsilon<u$, sup A ist Supremum von A d.h.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\ u\in A:\sup A-\varepsilon<u$, $u\in A\ \Rightarrow\ u\in A\cup B$, $\sup A-\varepsilon<u$, $u:=t$

(.) und (..) $\Rightarrow\ \sup A=\sup A\cup B$

8.) $\mathbb{K}_+$ (d.h. $0\notin\mathbb{K}_+$) ist nach unten beschränkt durch $\zeta=0$. Ist $\eta\in\mathbb{K}_+$ $\Rightarrow\ \eta/2\in\mathbb{K}_+$ und $\eta/2<\eta$. Also kann kein Element von $\mathbb{K}_+$ gleichzeitig untere Schranke von $\mathbb{K}_+$ sein und deshalb ist 0 die größte untere Schranke von $\mathbb{K}_+\ \Rightarrow\ 0=\inf\mathbb{K}_+$. $0\notin\mathbb{K}_+\ \Rightarrow\ \mathbb{K}_+$ besitzt kein Minimum.

$\mathbb{K}_+$ nicht nach oben beschränkt, denn gäbe es eine obere Schranke für $\mathbb{K}_+$, etwa $\zeta$, so wäre sowohl $\zeta\in\mathbb{K}_+$ also auch $\zeta+1\in\mathbb{K}_+$, und mit $\zeta+1>\zeta$ ergibt sich ein Widerspruch.

9.) Seien $x>0$ und $A_x=\{a>0:a^2\le x\}$.
Falls $\zeta=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.

*//**S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*

*// 1.) $\overleftarrow{s} = \sup T$: $\Leftrightarrow$ $\alpha$) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und //*

*// $\beta$) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T //*

*// $\Leftrightarrow$ $\forall\ t\in T$: $t\le\overleftarrow{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$ //*

Bew: Angenommen, daß

1.Fall: $\zeta^2>x$. Sei $\varepsilon=\underbrace{(\underbrace{\zeta^2-x}_{<\zeta^2})/(2\zeta)}_{<\zeta/2}$ (d.h. $x=\zeta^2-2\zeta\varepsilon$) $\Rightarrow$ $0<\varepsilon<\zeta/2$. $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1}$

$\exists\ a\in A_x: a>\zeta-\varepsilon \Rightarrow x\ge a^2>(\zeta-\varepsilon)^2> \underbrace{\xi^2-2\xi\varepsilon}_{¿\xi^2-2\xi\varepsilon+\varepsilon^2} =x$, was nicht sein kann.

2.Fall: $x>\zeta^2$. ($\zeta^2$ sehr nahe bei x)

Für $\varepsilon=\min\{\zeta, \underbrace{(\underbrace{x/\zeta}_{>\zeta}-\zeta)}_{>0}/3\}$ gilt dann $\varepsilon/\zeta\le 1$, also $(\varepsilon/\zeta)^2\le\varepsilon/\zeta$

$\Rightarrow$ für $a=\zeta+\varepsilon=\zeta*1+\zeta*\varepsilon/\zeta)=\zeta(1+\varepsilon/\zeta)$:

$a^2=\zeta^2(1+\varepsilon/\zeta)^2= \zeta^2(1+2\varepsilon/\zeta+\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)^2}_{<\varepsilon/\zeta}) \le \zeta^2(1+3\varepsilon/\zeta)=$

$\zeta^2(1+\frac{3(x/\zeta-\zeta)}{3\zeta})=\zeta^2+x-\zeta^2\le x$.

Demzufolge wäre $a=\zeta+\varepsilon\in A_x$, also $\zeta$ keine obere Schranke für $A_x$ $\Rightarrow$ Widerspruch zu Def von $\zeta$ $\Rightarrow$ $\zeta^2=x$

**A1.3.1**

a) Zeige (.) $A\subset B$, $\exists$ min A, min B $\Rightarrow$ min A$\ge$min B

Bew: a_min A: $a\in A$ & $A\subset B \Rightarrow a\in B \Rightarrow a\ge\min B$

Bspskizze

A

(..) $A\subset B$, $\exists$ inf A, inf B $\Rightarrow$ inf A$\ge$inf B

Bew: a:=inf A $\underbrace{\Rightarrow}_{A\subset M}$ $a\in B$ $\underbrace{\Rightarrow}_{b:=\inf B}$ $a\ge b$?

A:=inf A, b:=inf B $\Rightarrow$ $b\le x\ \forall\ x\in B$ $\underbrace{\Rightarrow}_{A\subset M}$ $b\le x\ \forall\ x\in A$ $\Rightarrow$

b auch untere Schranke von A, d.h. $b\le a$

(...) $\exists$ max A & max B $\Rightarrow$ $\exists$ max($A\subset B$) & max (AUB)=max{max A, max B}

Bew: $x\in AUB \Rightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow x\le\max A \wedge x\le\max B \Rightarrow$

$x\le\max\{\max A, \max B\}\ \forall\ x\in AUB$

Da max{max A, max B}$\in$AUB ist max{max A, max B}=max AUB

b) $M=\{\underbrace{2-\frac{n-1/2}{n}}_{1+1/2n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ n 1 2 3 4

t 3/2 5/4 7/6 9/8

max, sup, min, inf?

Lös: Z.z Vermutung max M=3/2

(.) $n=1 \Rightarrow 2-\frac{n-1/2}{n}=3/2 \Rightarrow 3/2\in M$

(..) $3/2\geq t\ \forall\ t\in M$, $3/2\geq 1+1/2n \Leftrightarrow 3/2\geq \frac{2n+1}{2n} \Leftrightarrow 6n\geq 4n+2 \Leftrightarrow 2n\geq 2$

$\Leftrightarrow n\geq 1 \Rightarrow 3/2=\max M=\sup M$

Z.z Vermutung inf M=1

(.) 1 ist untere Schranke $\Rightarrow 1+\frac{1}{2n}>1$

(..) Kleinste untere Schranke: $\forall\varepsilon>0\ \exists\ t\in M: 1+\varepsilon>t$.

Sei $\varepsilon>0$: $1+\varepsilon>1+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n+2n\varepsilon>2n+1 \Leftrightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon}$.

Wähle $n\in\mathbb{N}: n>\frac{1}{2\varepsilon}$, $t_n:=1+\frac{1}{2n}<1+\frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}}=1+\varepsilon \Rightarrow \inf M=1$

Min M=1?

Annahme $\exists$ min M. min $M\neq 1 \Rightarrow$ min M=inf M Widerspruch

**A1.3.2** Zeige: Ist $A\subset K$ nach oben(unten) beschränkt, und ist $B\subset A$, $B\neq\emptyset$, so ist B ebenfalls nach oben(unten) beschränkt)

**A1.3.3** Sei $A\subset K$, $A\neq\emptyset$, $B=-A=\{-a: a\in A\}$. Zeige:

a) Genau dann ist A nach oben beschränkt, wenn B nach unten beschränkt

b) Genau dann besitzt A ein Supremum, wenn B ein Infimum besitzt und es gilt sup A=-inf B.

**A1.3.4** Zeige: K selber ist nach oben und unten nicht beschränkt

**A1.3.5** Zeige: Genau dann ist ζ Supremum einer Menge $A\subset K$, wenn folgendes gilt: $\forall\ a\in A: a\leq\zeta$; $\forall\varepsilon>0\ \exists\ a\in A: a>\zeta-\varepsilon$.
Finde selber eine analoge Charakterisierung für das Infimum von A.

**A1.3.6** Seien A,B Teilmengen eines geordneten Körpers.
Definiere $A+B=\{a+b: a\in A\wedge b\in B\}$, $A-B=\{a-b: a\in A\wedge b\in B\}$. Nimm an, dass für alle 4 Mengen A,B,A+B,A-B sup und inf existieren. Zeige:

a) sup(A+B)=sup A+sup B

Z.z. supA+sup B ist (..)kleinste (.)obere Schranke von A+B

(.) Z.z. $\forall\ x\in(A+B): x\leq \sup A+\sup B$

Bew: Sei $x\in(A+B)$, $x=a+b$, $a\in A$, $b\in B$. Es gilt

$\forall\ a\in A\ a\leq\sup A$, $\forall\ b\in B\ b\leq\sup B \Rightarrow \forall\ x=a+b\leq\sup A+\sup B \Rightarrow$ obere Schranke

(..) Sei $A+B\leq m$, Z.z. $\sup A+\sup B\leq m$.

$A+B\leq m \Rightarrow a+b\leq m\ \forall\ a\in A,\ b\in B \underbrace{\Rightarrow}_{b\in B \text{ bel fest}} a\leq m-b\ \forall\ a\in A \Rightarrow$

m-b obere Schranke von A $\Rightarrow \sup A\leq m-b\ \forall\ b\in B$ (da b beliebig gewählt) $\Rightarrow b\leq \underbrace{m-\sup A}_{\text{obere Schranke v B}}\ \forall\ b\in B \Rightarrow \sup B\leq m-\sup A \Rightarrow \sup A+\sup B\leq m$

Ähnliche Aufgabe/Formulierung:

$A,B\subset \mathbb{R}$ seien beschränkte Mengen, d.h. $|a|\le c_1$, $|b|\le c_2$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$ $\Rightarrow$ $|a+b|\le c_1+c_2$ $\forall$ $a\in A, b\in B$ $\Rightarrow$ $A+B=\{a+b|a\in A, b\in B\}$ ist beschränkt.
Es sei $s_1=\sup A$ und $s_2=\sup B$. Z.z. $s_1+s_2=\sup(A+B)$
Es gilt: $s_1\ge a$, $s_2\ge b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$ $\Rightarrow$ $s_1+s_2\ge a+b$ $\forall$ $a\in A$, $b\in B$ $\Rightarrow$ $s_1+s_2$ ist obere Schranke.
$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $a_0\in A$, mit $a_0>s_1-\varepsilon/2$ und $b_0\in B$, mit $b_0>s_2-\varepsilon/2$ $\Rightarrow$ $a_0+b_0\in A+B$ mit $a_0+b_0>s_1+s_2-\varepsilon$ $\Rightarrow$ $s_1+s_2=\sup(A+B)$

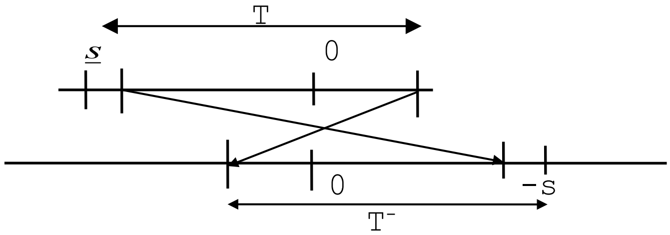
b) $\sup(A-B)=\sup A-\inf B$
Lös: Z.z (.) $A-B\le\sup A-\inf B$ (..) $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $x\in A-B$, $x\ge\sup A-\inf B-\varepsilon$
Sei $\varepsilon>0$ beliebig. $\exists$ $a\in A: a\ge\sup A-\varepsilon/2$,
$\exists$ $b\in B: b\le\inf B+\varepsilon/2$, $-b\ge-\inf B-\varepsilon/2$, $\Rightarrow$
$x=a-b\ge\sup A-\varepsilon/2-\inf B-\varepsilon/2=\sup A-\inf B-\varepsilon$.

c) $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$

d) $\inf(A-B)=\inf A-\sup B$

**D1.3.2** (505)
Ein angeordneter Körper $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich $<$):
$\Leftrightarrow$ $\forall$ $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ und $T$ nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T\in\mathbb{K}$.
Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der rellen Zahlen $\mathbb{R}$
Bem: siehe auch A1.3.13. $\mathbb{K}=(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ ist vollständig: $\Leftrightarrow$ Jede nach unten beschränkte Menge $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ besitzt ein Infimum $\inf T$ in $\mathbb{K}$
Bew: Sei $T^-:=\{x\in K: -x\in T\}$. Dann gilt für $\underline{s}\in K$:
$\underline{s}$ ist untere Schranke von $T$ $\Leftrightarrow$ $\underline{s}\le t$ $\forall$ $t\in T$ $\Leftrightarrow$
$x\le-\underline{s}$ $\forall$ $t\in T^-$ $\Leftrightarrow$ $-\underline{s}$ ist obere Schranke von $T^-$ $\Rightarrow$ $\inf T=-\sup T^-$.
$\mathbb{K}$ vollständig $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\sup T^-$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\inf T$

#Bsp:




Für den positiven Kegel $\mathbb{K}_+$ schreiben wir künftig auch $\mathbb{R}_+$, d.h. $x\in\mathbb{R}_+$ ist gleichbedeutend mit $x>0$.
*//**S1.3.1** Bsp 5.) (501) Seien $x>0$ und $A_x=\{a>0: a^2\le x\}$. //*
*// Falls $\zeta=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.//*
*//**D1.3.2** (504) $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich $<$): $\Leftrightarrow$ //*
*// $\forall$ $T\subset K$, $T\neq\emptyset$ und $T$ nach oben beschränkt $\exists$ $\sup T\in K$. Ein//*
*// angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt//*
*// Körper der rellen Zahlen R//*
Für folgendes siehe auch S1.3.2
Für $x\in\mathbb{R}_+$ haben wir in Bsp 5 bei S1.3.1 gezeigt, daß $A_x=\{a\in\mathbb{R}|a^2\le x\}\neq\emptyset$ und nach oben beschränkt ist $\underset{D1.3.2}{\Rightarrow}$ $\exists$ $\zeta=\sup A_x$ $\underset{Bsp\ 5.)}{\Rightarrow}$ $\zeta^2=x$. Dieses $\zeta$ nennen wir die positive Quadratwurzel von $x$ und schreiben $\zeta=\sqrt{x}$.
Wir setzen $\sqrt{0}=0$.
Erweiterte reelle Zahlen $\overline{R}$:
Wir nehmen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ 2 neue Objekte $\infty$ und $-\infty$ hinzu,

$\overline{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty,-\infty\}$ und erweiterte Ordnungsrelation $-\infty<x<\infty$ und definieren die kommutativen Operationen $\infty+x=\infty\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $\infty+\infty=\infty$, $-\infty+(-\infty)=-\infty$, $\infty * x= \begin{cases} \infty \text{ falls } x>0 \\ -\infty \text{ falls } x<0 \end{cases}$, aber $0*\infty$ nicht definiert, $\infty*\infty=\infty$,

$(-\infty)*\infty=-\infty$, $(-\infty)(-\infty)=\infty$, $\frac{x}{\pm\infty}:=0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

$\overline{R}$ ist kein Körper (siehe nicht definiertes)

Intervalle $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a \le x<\infty\}$, $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<b\}$

**D1.3.3**(506) Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a\le b$, Dann sei

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a,b

$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$, $a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall

$[a,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$, $a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall

$(a,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$, $a<b$ offenes Intervall

$(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R} \mid x\le b\}$, $(-\infty,b):=\{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$

$[a,\infty):=\{x\in\mathbb{R} \mid x\ge a\}$, $(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$

$(-\infty,\infty):=\mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle

Aus dem Zusammenhang muß sich ergeben, ob (a,b) offenes Intervall oder Paar von a und b ist.

**A1.3.7** (Dedekindsche Schnitte)

Geg: $A,B\subset\mathbb{R}$ mit $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}$, $a\le b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$

Z.z.: $\exists_1\ s\in\mathbb{R}$ mit $a\le s\le b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$. (Ersatz für Vollständigkeitsaxiom)

Bew: A ist nach oben beschränkt, denn jedes $b\in B$ ist obere Schranke.
Setze s=sup A. Dann ist offensichtlich $a\le s\ \forall\ a\in A$, s ist kleinste obere Schranke von A, also $s\le b\in B$.
Noch z.z. ist Eindeutigkeit.

Sei hierzu $\tilde{s}$ mit $a\le\tilde{s}\le b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$.

Annahme $\tilde{s}\neq s$. Da $\tilde{s}$ obere Schranke von A ist, muss $\tilde{s}>s$ sein.
Dann folgt

$A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$. $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widerspruch. Also muss $\tilde{s}=s$ sein.

Andere Formulierung:

Bew: Sei $M\neq\emptyset$, nach oben beschränkt: $\exists$ sup M

Sei $m\in M \wedge \tilde{M}=\{x\in M: x\ge m\}\subset M \Rightarrow$ M beschränkt $\wedge\ \exists$ s:sup $\tilde{M} \Rightarrow$

s ist obere Schranke von M $\Rightarrow\ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ m\in\tilde{M}: x>s-\varepsilon \Rightarrow s=\sup M$

A ist nach oben beschränkt, da jedes $b\in B$ obere Schranke.

Setze s=sup A $\Rightarrow a\le s\ \forall\ a\in A$. s ist kleinste obere Schranke von A $\Rightarrow$ $s\le b\ \forall\ b\in B$.

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{s}$: $a\le\tilde{s}\le b\ \forall\ a\in A,\ b\in B$. Annahme $\tilde{s}\neq s$: $\tilde{s}$ obere Schranke von A, muss $\tilde{s}>s$ sein $\Rightarrow A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$, da $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widersapruch $\Rightarrow \tilde{s}=s$

**A1.3.9** Zeige: Zu einem $y>0\ \exists_1\ x>0: x^2=y \Rightarrow$ d.h. oben definierte Quadratwurzel von x ist Umkehrabbildung der Funktion x $x^2$

**A1.3.10** Finde heraus, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $x=\sqrt{x}$ richtig bzw falsch ist.

**A1.3.11** Zeige, daß das Vollständigkeitsaxiom zu folgenden Aussagen äquivalent ist

a) Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.

b) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum

c) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum

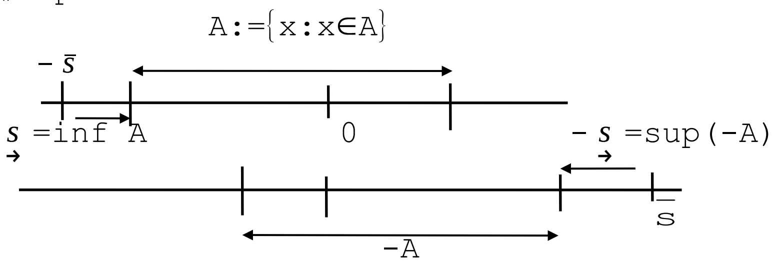
**A1.3.12** Zeige: Für alle $a\in\mathbb{R}$ gilt $|a|=\sqrt{a^2}$

**A1.3.13** Es sei K ein angeordneter Körper

a) Definiere für $A\subset K$ die Menge $-A:=\{-x:x\in A\}$.

Zeige: Es existiert $\inf A\in K$ genau dann, wenn $\sup(-A)\in K$ existiert und dann gilt: $\inf A=-\sup(-A)$.

#Bsp




Bew: "⇒" Sei $\underline{s}=\inf A\in K$.

Wir zeigen: $\sup(-A)=-\underline{s}\in K$ (insbesondere existent).

Mit Def:

($\alpha$) $-\underline{s}$ ist obere Schranke von $-A$:

$\underline{s}=\inf A\Rightarrow \underline{s}\le x\ \forall\ x\in A\Rightarrow -\underline{s}\ge -x\ \forall\ x\in A\ \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def v A}}\ -\underline{s}\ge y\ \forall\ y\in -A$

($\beta$) $-\underline{s}\le\bar{s}\ \forall$ oberen Schranken $\bar{s}$ von $-A$

Sei $\bar{s}$ obere Schranke von $-A$ beliebig $\Rightarrow$

$-\bar{s}$ untere Schranke von A (denn $\bar{s}\ge y\ \forall\ y\in -A\Rightarrow$
$\bar{s}\ge -x\ \forall\ x\in A\Rightarrow -\bar{s}\le x\ \forall\ x\in A$) $\underbrace{\Rightarrow}_{s=\inf A}\ -\bar{s}\le\underline{s}\Rightarrow \bar{s}\ge -\underline{s}$

"⇐" Analog Aus Bew folgt $\sup(-A)=-\underline{s}=-\inf(A)$

b) Es seien A,B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit $A\subset B$

(.) Zeige: Falls sup A und sup B in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\sup A\leq\sup B$

*//BeM: 3.)(500) Sei $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $\exists \sup T$ bzw $\inf T \Rightarrow$//*

*// $\sup T = \min\{\overset{\circ}{s} \mid \overset{\circ}{s}$ ist obere Schranke von T in $\mathbb{K}\}$//*

Lös: Z.z. $\exists \sup A, \sup B\in\mathbb{K} \Rightarrow \sup A\leq\sup B$,

$\sup A \underbrace{=}_{\text{Bem 3}} \min\{s' : s' \text{ ist obere Schranke von A in } \mathbb{K}\} \underbrace{\leq}_{\text{Abschätzung}}$

$\min\{s'' : s'' \text{ ist obere Schranke von B in } \mathbb{K}\} = \sup B$

Bew: Aus „>"

Annahme $\exists\, s_0''$ obere Schranke von B mit $\sup A>s_0''$ $\underbrace{\Rightarrow}_{A\subset B}$

$s_0''$ ist obere Schranke von A mit $\sup A>s_0''$ $\Rightarrow$ Widerspruch

Bem: $s_0''\geq b\ \forall\, b\in B \Rightarrow s_0''>a$, $A\subset B\ \forall\, a\in A$

(..) Zeige: Falls inf A und inf B in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\inf A\geq\inf B$

Lös: analog (.)

(...) Gibt es solche Mengen $A\neq B$, für die inf A, inf B, sup A, sup B existieren, mit sup A=sup B und inf A =inf B?

Lös: Sei $B=(0,1] \Rightarrow \sup B=1$, $\inf B=0$ (insbesondere existent in $\mathbb{K}$).

$A:=(0,1]\setminus\{\underbrace{1/2}_{\text{irgend ein Punkt}}\} \Rightarrow \sup A=1,\ \inf A=0.$

analog zum Bew für B

**A1.3.14** Es sei K ein angeordneter Körper und A:={x∈K:x>1}.
Existieren inf A, min A, sup A, max A in K? Bestimme im Falle der Existenz die entsprechenden Werte.

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf K//*
*// R:=<,Anordnungsaxiome://*
*// (O2)Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//*
*// (O3)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*
*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*
*// 2.)∃ maxT ⇔ ∃ supT∈K und supT∈T: maxT=supT//*
*// ∃ minT ⇔ ∃ infT∈K und infT∈T: minT=infT//*

Bew:(.)sup A existiert nicht in K, sonst wäre sup A∈K obere Schranke von A d.h. x≤sup A ∀ x∈A $\underbrace{\Rightarrow}_{x>1\,\forall x\in A}$ 1<sup A, 0<sup A $\underbrace{\Rightarrow}_{(O2),(O3)}$ 1<(sup A)+1

$\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def } A}$ (sup A)+1∈A Widerspruch zu sup A obere Schranke von A, denn sup A<(sup A)+1

max A existiert nicht in K, da sup A nicht existiert in K, wg. S1.3.1 2.)

(..)inf A existiert und inf A=1. Bew mit Def von inf, denn

α)1 ist untere Schranke von A, klar, da 1<x ∀ x∈A (insbesondere 1≤x ∀ x∈A)

β)1≥ $\underline{s}$ ∀ unteren Schranken $\underline{s}$ von A.

Bew:Annahme: ∃ $\underline{s}$ >1 für untere Schranke von A $\underbrace{\Rightarrow}_{RR}$ ∃ c∈K:1<c< $\underline{s}$ ,

insbesondere c∈A.

Widerspruch zu $\underline{s}$ untere Schranke von A, da c< $\underline{s}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{\alpha),\beta),Def}$

inf A=1∈K

min a existiert nicht, da 1∉A (S1.3.1)

Andere Formulierung:
$M_1$={x∈R:x>2}
Lös:Es gilt sup $M_1$=∞ und inf $M_1$=2, min $M_1$ existiert nicht.
Bew:$M_1$≠∅, da 2+1>2, d.h.2+1∈$M_1$. $M_1$ besitzt keine obere Schranke, denn wenn s eine obere Schranke wäre, dann müsste gelten: s≥2+1 und s+1>2 und s+1>s Widerspruch ⇒ sup $M_1$=∞

2 ist untere Schranke von $M_1$. Sei nun s>2. Dann gilt 2< $\frac{2+s}{2}$ <s,

d.h. $\frac{2+s}{2}$ <s und $\frac{2+s}{2}$ ∈$M_1$ ⇒ s ist keine untere Schranke von $M_1$ ⇒ inf $M_1$=2. Da 2∉$M_1$ existiert min $M_1$ nicht.

**A1.3.15** A,B≠∅, A,B⊂R. ∀ a∈A,b∈B gelte a≤b. Zeige, sup A≤inf B.
Lös:Ann sup A>inf B ⇒ ∃ a∈A mit a≥inf B+ε/2 ⇒ inf B≤a-ε/2 ⇒
∃ b∈B mit b≤(a-ε/2)+ε/4=a-ε/4 ⇒ Widerspruch zur Vor b≥a

**A1.3.16**

Bestimme sup X und inf X (mit Bew) für folgende Mengen X und prüfe, ob diese Mengen ein max oder min besitzen

a) $X=\{x: x=\frac{|t|}{1+|t|},\ t\in\mathbb{R}\}$

Lös: $0\le|t|<1+|t| \Rightarrow 0\le \frac{|t|}{1+|t|} < \frac{|t|}{|t|}=1\ \ \forall\ t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ 0 ist untere Schranke,

1 ist obere Schranke von X.

- inf,min? Für t=0 ist $\frac{|t|}{1+|t|}=0 \Rightarrow 0\in X$, 0=min X=inf X
- sup? Annahme $\exists$ m<1 mit $\frac{|t|}{1+|t|}\le m\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$, $1-m>0 \Leftrightarrow$

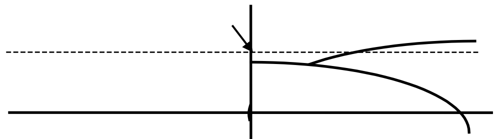
  $|t|\le m(1+|t|)=m+|t|m \Leftrightarrow |t|(1-m)\le m \Leftrightarrow |t|\le\frac{m}{1-m}\ \ \forall\ t\in\mathbb{R}$,

  Widerspruch zu $\mathbb{R}$ unbeschränkt $\Rightarrow \forall$ $m: m\ge x: x\in X \Rightarrow m\ge 1 \Rightarrow$ sup X=1.
- 1=max X? $t\in\mathbb{R}: 1=\frac{|t|}{1+|t|} \Leftrightarrow 1+|t|=|t| \Leftrightarrow 1=0!$ falsch $\Rightarrow 1\notin X \Rightarrow$

  X hat kein max.

Andere Formulierung:

$M=\{\frac{|x|}{1+|x|}: x\in\mathbb{R}\}$



*//**D1.2.2** (405) $K=(K,+,^*,<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$.//*
*// $\overline{m}$ =maxT:$\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$: $t\le\overline{m}$ . $\underline{m}$ =min T:$\Leftrightarrow\forall$ $t\in T$: $\underline{m}\le t$//*
*//**S1.3.1** (501)Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
*// 1.) $\bar{s}$ = supT: $\Leftrightarrow$ α) $\bar{s}$ ist obere Schranke von T und //*
*// β) $\forall$ ε>0 ist $\bar{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T//*
*// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$: $t\le\bar{s}$ und $\forall$ ε>0 $\exists$ $t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\bar{s}-\varepsilon$//*
*// 2.)$\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ infT$\in$K und infT$\in$T: minT=infT//*

Lös:Beh $M=[0,1)$. Damit inf M=min M=0, sup M=1, $\exists$ kein max M,denn $0\in M$ und $0\le y\ \ \forall\ y\in M \underbrace{\Rightarrow}_{D1.2.2}$ min M=0 $\Rightarrow$ inf M $\underbrace{=}_{S1.3.1\ 2.)}$ 0.

1 ist obere Schranke von M und 1-ε $\forall$ ε>0 ist keine obere Schranke von M $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 1.)}$ sup M=1 $\underbrace{\overset{S1.3.1\ 2.)}{\Rightarrow}}_{1\notin M}$ max M existiert nicht, da $1\notin M$

Bew: ● $M\subset[0,1)$, sei $y\in M$,

Nebenrechnung: $1+|x|>|x|$, $\frac{1}{1+|x|}<\frac{1}{|x|}$, $\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}$

d.h. $y=\frac{|x|}{1+|x|}$ mit $x\in\mathbb{R} \Rightarrow 0\le|x|<1+|x| \Rightarrow 0\le\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}=1$ falls $x\neq 0$

bzw

$0\le\frac{0}{1+0}<1$, falls x=0

● $M\supset[0,1)$, $y\in[0,1)$, Nebenrechnung: $y=\frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y+xy=x \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

Definiere $x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x\ge 0 \Rightarrow y=\frac{x}{1+x}=\frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow y\in M$

Ähnliche Aufgabe

$M=\{ \frac{|x|}{1+2|x|} : x\in\mathbb{R}\}$

Es gilt min M=inf M=0, sup M=1/2, max existiert nicht.

Für $x\in\mathbb{R}$ gilt $0\leq \frac{|x|}{1+2|x|} = \frac{2|x|}{1+2|x|} * \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow$

$0\in M$ ist untere Schranke $\Rightarrow$ min M=0=inf M

½ obere Schranke vom M $\Rightarrow$ Sei s<1/2. Setze $t=\frac{s+1/2}{2}$

($\Rightarrow$ s<t<1/2).

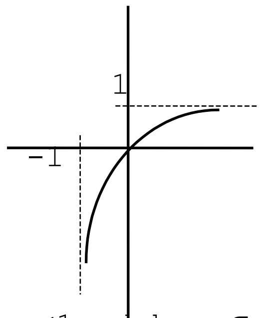
Dann ist $t\in M$, denn für x>0 gilt $t=\frac{x}{1+2x} \Leftrightarrow 2t=\frac{1+2x-1}{1+2x} \Leftrightarrow$

$2t=1-\frac{1}{1+2x} \Leftrightarrow \frac{1}{1+2x}=1-2t \Leftrightarrow 1+2x=\frac{1}{1-2t} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(\overbrace{\frac{1}{\underbrace{1-2t}_{<1}}}^{>1}-1\right) \Rightarrow$

s ist also keine obere Schranke $\Rightarrow$ 1/2=supM,
$1/2\notin M \Rightarrow$ maxM existiert nicht

b) $M=\left\{\frac{x}{1+x} : x\in R, x>-1\right\}$

Beh: $M=(-\infty,1)$, damit inf $M=-\infty$ d.h. M ist nach unten nicht beschränkt.
$\exists$ kein inf M und kein min M
sup M=1. $\exists$ kein max M,
Begründung analog zu a)
Bew: Wir zeigen : $M=(-\infty,1)=\{y\in\mathbb{R}: y<1\}$.




- $M\subset(-\infty,1): y\in M \Rightarrow \exists\ x\in\mathbb{R},\ x>-1$ mit $y=\frac{x}{1+x} \Rightarrow y<1$, d.h. $y\in(-\infty,1)$,

  denn 1.Fall $x=0 \Rightarrow y=0<1$

  2.Fall $x>0 \Rightarrow 1+x>x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{x} \Rightarrow y=\frac{x}{1+x} \underbrace{<}_{x>0} \frac{x}{x}=1$

  3.Fall $x<0 \Rightarrow y=\underbrace{x}_{<0}\ \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0 \text{ da } x>-1} <0<1$

- $M\supset(-\infty,1]: y\in(-\infty,1]$, d.h. $y<1$, $1-y>0$, $y=\frac{x}{1+x} \underbrace{\Leftrightarrow}_{x>-1\Leftrightarrow 1+x>0} y+yx=x \Leftrightarrow$

  $x-yx=y \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

  Setze $x:=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x\in\mathbb{R}$ und $x>-1 \Rightarrow y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$ ,
  denn

  1.Fall $y\geq 0$, $x=y\underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0, \text{da } y<1} \geq 0>-1$ wie in Def M gesetzt

  2.Fall $y<0, 1-y>-y$, $x=\frac{y}{1-y} \underbrace{>}_{*} \frac{y}{-y}=-1 \Rightarrow y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$

  $*1-y>-y \Rightarrow \frac{1}{1-y}<\frac{1}{-y} \Rightarrow x=\frac{y}{1-y} \underbrace{>}_{y<0} \frac{y}{-y}=-1$

*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*
*// 2.)$\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//*
*// $\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ infT$\in$K und infT$\in$T: minT=infT//*

Aus $M=(-\infty,1)$ folgt sofort die Beh., denn

(.) Wäre M nach unten beschränkt, so $\exists$ $k\in\mathbb{R}: k\neq y$, $\forall$ $y\in M=(-\infty,1)$ $\Rightarrow$ $k\leq 1$ $\Rightarrow$ $k-1<1$, also $k-1\in M$ Widerspruch zu k untere Schranke ($k-1<k$).

(..) min M existiert nicht, da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert (S1.3.1)

(...) sup M=1

(....) max M<x nicht, da $1\notin M$ (und S 1.3.1)

Andere Formulierung:

$X=\{x: x=\frac{t}{1+t}, t>-1\}$

Lös: Für $-1<t<0$ $\Rightarrow$ $\frac{t}{1+t}<0$

Für $t>0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{wie a )}}$ $x=\{0\leq x<1\}$ und sup X=1, es existiert kein max.

Beh: X ist nach unten unbeschränkt.

Bew: Annahme $\exists$ $K\in\mathbb{R}$ (oBdA $K<1$) mit $x \geq K$ $\forall$ $x\in X$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Def Menge}}$ $\frac{t}{1+t}\geq K$ $\forall$ $t>-1$

$\Leftrightarrow$ $t\geq \underbrace{(1-K)}_{>0} K$ $\Leftrightarrow$ $t\geq \frac{K}{1-K}>-1$ da $K>K-1$ bzw $\frac{K}{K-1}<1$ $\Leftrightarrow$ $\frac{K}{1-K}>-1$

$\Leftrightarrow$ $\exists$ $t:=1/2(\underbrace{\underbrace{\frac{K}{1-K}}_{>-1}-1}_{>-2})$, $\frac{K}{1-K}>t>-1$ $\Rightarrow$ $\frac{K}{1-K}>t>-1$ Widerspruch

*da $t>-1$, d.h. auch $t>\frac{K}{1-K}$ $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ Beh falsch

Andere Formulierung:

M={ $\frac{x}{1+x}$ , x∈$\mathbb{R}$, x>-1}

Lös: zu beweisen inf M=-∞, d.h. nicht nach untenbeschränkt ⇒
inf M in $\mathbb{R}$ nicht existent

min, max existiert nicht, sup M=1

M=(-∞,1)={y∈$\mathbb{R}$: y<1} weil

M⊂(-∞,1): y∈M ⇒ ∃ x∈$\mathbb{R}$, x>-1 mit y= $\frac{x}{1+x}$ ⇒ y<1,d.h. y∈(-∞,1) denn

1.Fall: x=0, 1+x>x ⇒ y=0<1

2.Fall: x>0, 1+x>x ⇒ $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{x}$ ⇒ $\frac{1}{1+x} < \frac{x}{x}$ =1

3.Fall: x<0: y= $\underbrace{x}_{<0} * \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0}$ <0<1

M⊃(-∞,1): y∈(-∞,1), d.h. y<1. Setze x:= $\frac{y}{1-y}$ (vgl oben) ⇒

x∈$\mathbb{R}$ & x>-1, denn 1.Fall: y≥0 ⇒ x= $\underbrace{y}_{>=0} * \underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0}$ ≥0>-1

2.Fall: y<0: 1-y>-y ⇒ $\frac{1}{1+y} < \frac{1}{-y}$ ⇒ x= $\frac{y}{1-y}$ >= $\frac{y}{-y}$ =-1

⇒ y∈M, da y= $\frac{x}{1+x}$

M=(-∞,1) ⇒ zu Beweisendes da

(.)Wäre M nach unten beschränkt ⇒ ∃ K∈$\mathbb{R}$: K≠y∈M=(-∞,1) ⇒ K<1 ⇒
k-1<1 ⇒ k-1∈M ⇒ Widerspruch zu K ist untere Schranke (K=1<K)

(..)min existiert nicht da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert.

(...)sup M=1 Bew siehe a)

(....)max M existiert nicht, da 1∉M

c) M= $\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{m}: m,n\in N\right\}$

*//**D1.2.2** (405) $K=(K,+,^*,<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$. $\overline{m}$ $=\max T:\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$: $t\leq\overline{m}$ .//*
*//**S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T\subset$ K, $T\neq\emptyset$, $s\in$K//*
*// 1.) $\underset{\rightarrow}{s}$ inf $T:\Leftrightarrow$ $\alpha$) $\underset{\rightarrow}{s}$ ist untere Schranke von T und //*
*// $\beta$) $\forall$ $\varepsilon>0$ ist $\underset{\rightarrow}{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //*
*// $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$: $t\geq\underset{\rightarrow}{s}$ und $\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underset{\rightarrow}{s}+\varepsilon$//*
*// 2.) $\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ supT$\in$K und supT$\in$T: maxT=supT//*

Beh: Aus Vermutung inf M=0, min M existiert nicht, sup M=max M=3

Bew: (.) $\frac{1}{n}+\frac{2}{m}\underset{n\geq1}{\leq}\frac{1}{1}+\frac{2}{m}\underset{m\geq1}{\leq}1+\frac{2}{1}=3$ $\forall$ m,n$\in$N $\Rightarrow$

$t\leq3$ $\forall$ $t\in M$ und $3\in M$ (mit m=n=1) $\underbrace{\Rightarrow}_{D\,1.2.2}$ max M=3 $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 2.)}$ sup M=3

(..) Wegen $\underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}+\underbrace{\frac{2}{m}}_{>0}>0$ $\forall$ m,n$\in$N ist 0 untere Schranke von M

Zwischenbetrachtung: $\forall\varepsilon>0$ $\exists$ $t_\varepsilon\in M$ mit $t_\varepsilon<\varepsilon$?

Bew: Sei $\varepsilon>0$ bel fest N ist unbeschränkt $\Rightarrow$

$\exists$ $\underbrace{n_0,m_0}_{\text{von }\epsilon\text{ abhängig}}\in$N: $n_0>2/\varepsilon$, $m_0>2\cdot2/\varepsilon$.

Setze $t_\varepsilon:=\frac{1}{n_0}+\frac{2}{m_0}$ $\Rightarrow$ $t_\varepsilon\in M$ und $t_\varepsilon<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

Aus Zwischenbeh $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 1.)}$ inf M=0 $\overbrace{\underbrace{\Rightarrow}_{S1.3.1\ 2.}}^{0\notin M}$ min M existiert nicht

d) M=$\{1\}\cup\left\{\frac{n-m}{n+m}|n,m\in N\right\}$

Lös: Es gilt $\frac{n-m}{n+m}<\frac{n}{n+m}<1$, 1 obere Schranke von M und

$\frac{n-m}{n+m}>\frac{-m}{n+m}>-1$, -1 untere Schranke von M.

Wegen 1$\in$M folgt 1=max M=sup M.
Bleibt zu zeigen: -1=inf M.
Da −1 untere Schranke, genügt es, zu zeigen, dass t$\in$M mit $t<-1+\varepsilon$
$\forall$ $s>-1+\varepsilon$. Andererseits gilt $\frac{1-m-1+1}{1+m}<-1+\varepsilon$ $\Leftrightarrow$

$\frac{2}{1+m}-1<-1+\varepsilon$ $\Leftrightarrow$ $\frac{2}{\varepsilon}<1+m$ $\Leftrightarrow$ $m>\frac{2}{\varepsilon}-1$. Wähle hier ein m$\in$N mit $m>\frac{2}{\varepsilon}$

(existiert, da N nicht beschränkt). Dann gilt $\frac{1-m}{1+m}\in M$ und $\frac{1-m}{1+m}<-1+\varepsilon$

$\Rightarrow$ -1=inf M und min M existiert nicht, denn $-1\notin M$

e) $\{x\in R\,|\,(x-a)(x-b)(x-c)<0\}$, wobei a,b,c$\in$R, a<b<c.
Lös: Es gilt A=(x-a)(x-b)(x-c)=0 für x$\in$\{a,b,c\}. Da a<b<c ist, gilt
(x-a)(x-b)(x-c)<0, wenn $x\in\{(-\infty,a)\cup(b,c)\}$ und $x\in\{a,b\})\cup\{b,\infty\}$ $\Rightarrow$
$\{x\in R\,|\,(x-a)(x-b)(x-c)\}=(-\infty,a)\cup(b,c)$ $\Rightarrow$
A ist nicht nach unten beschränkt, inf A=$-\infty$ und sup A=c, denn
c ist obere Schranke von A und für $\varepsilon>0$ existiert
$d\in(b,c)$ mit $d>c-\varepsilon$ $\Rightarrow$ max A existiert nicht, denn $c\notin A$.

**S1.3.2** (515)

Vor: Sei $x\geq 0, x\in \mathbb{R}$.
Beh: $\exists$ genau ein $y\in\mathbb{R}$ mit $y\geq 0$ und $y^2=x$
($y=:\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x)

//**D1.3.2** (504) $(K,+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <): $\Leftrightarrow$ //
// $\forall\ T\subset K,\ T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ sup$T\in K$. Ein angeordneter,//
// vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der rellen
//Zahlen R//
Bew: Z.z (.)Existenz und (..)Eindeutigkeit, oBdA $x>0$
(.)Betrachte $T:=\{y\in\mathbb{R} \mid y\geq 0$ und $y^2\leq x\}\subset \mathbb{R}$ d.h. alle Axiome benutzbar.
$T\neq\emptyset$ (da $0\in T$) und beschränkt: untere Schranke 0, obere Schranke $x+1$ (denn $y>x+1 \underbrace{\Rightarrow}_{y\geq 0} y^2>(x+1)^2=x^2+2x+1>x) \Rightarrow$ T beschränkt $\neq\emptyset$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D1.3.2}$ $y:=\sup T$ existiert $(0\leq y\leq x+1)$
Z.z. $y^2=x$. Lösungsweg: $y^2 \not> x$: $y^2 \not< x$:
Annahme $y^2>x$: Setze $\varepsilon=\frac{y^2-x}{2y}>0$ (siehe oben),

Betrachte $(y-\varepsilon)^2=(y-\frac{y^2-x}{2y})^2=y^2-2\varepsilon y+\varepsilon^2>y^2-2\varepsilon y=x$ d.h $y-\varepsilon$ ist obere Schranke von T $\Rightarrow$ Widerspruch zur Def von y, also ist $y^2\leq x$
Annahme $y^2<x$
$\varepsilon=\frac{x-y^2}{2y+1}>0$, (oBdA $\varepsilon\leq 1 \Rightarrow$ sonst $\frac{x-y^2}{2y+1}>1 \Rightarrow x-y^2>2y+1 \Rightarrow$
$x>y^2+2y+1$
$\Rightarrow x>(y+1)^2=y^2+2y+1$ Widerspruch, siehe oben)
$(y+\varepsilon)^2=y^2+\varepsilon\ (2y+\underbrace{\epsilon}_{<1\ <=\ x+1})\leq y^2+\varepsilon(2y+1)=x \Rightarrow (y+\varepsilon)^2\leq x \Rightarrow (y+\varepsilon)\in T\ldots$
$y+\varepsilon\in T$ Widerspruch zu y ist obere Schranke von T $\underbrace{\Rightarrow}_{(O1)}$ $y^2=x$

//**D1.2.1** (400) $(K,+,*)$ angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K $R:=<$, Anordnungsaxiome://
//(O1) $\forall\ a,b\in K$ gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://
// $a<b$ oder $b<a$ oder $a=b$ //

(..)Eindeutigkeit: Annahme $\exists\ y\neq z\in\mathbb{R}$, $y^2=z^2=x$
$\alpha$) $y<z$ $y^2<yz<zz=z^2$ Widerspruch
$\beta$) $y>z$, $y^2>yz>zz=z^2$ Widerspruch $\Rightarrow$ Eindeutigkeit
..$0<y<z \Rightarrow y^2<yz<z^2$

Bem:

1.) Sei $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|0\le x\}$, dann ist $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definiert durch $x \mapsto f(x)=x^2$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion $(0\le x_1\le x_2 \Rightarrow x_1^2\le x_2^2)$ injektiv $f^{-1}: [0,\infty)\to[0,\infty)$ $x \mapsto \sqrt{x}$

$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^2$ ist bij, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}:(y)=\sqrt{y}$ Quadratwurzelfunktion

2.) $\alpha$) $a,b\ge 0 \Rightarrow \sqrt{a}\,\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

Bew: $\sqrt{a}, \sqrt{b}\ge 0$ $(\sqrt{a}\,\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\,\sqrt{b})(\sqrt{a}\,\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$

Wegen der Eindeutigkeit der $\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$\beta$) $0\le a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$

Bew: Annahme $\sqrt{a}\ge\sqrt{b}\ge 0 \Rightarrow a\ge b$ Widerspruch

$\gamma$) $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$

Bew: da $a^2=(-a)^2\ge 0$, $a\ge 0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=a$, $a<0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a \Rightarrow$
$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$

3.) Die Funktion $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^2$ ist bijektiv, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ (Wurzelfunktion)

**D1.3.4** Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d: X\times X\to\mathbb{R}$, heißt Metrik auf X, wenn für beliebige $x,y,z\in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:

1.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

2.) Symmetrie: $d(x,y)=d(y,x)$

3.) Dreiecksungleichung: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

**S1.3.3 Positive Definitheit**

$d: X\times X\to\mathbb{R} \Rightarrow d(x,y)\ge 0$

Bew: $0=\frac{1}{2}d(x,x) \underset{D1.3.4\,3.)}{<=} \frac{1}{2}(d(x,y)+d(y,x)) \underset{D1.3.4\,2.)}{=}$
$\frac{1}{2}(d(x,y)+d(x,y))=d(x,y) \Rightarrow d(x,y)\ge 0$

**D1.3.5** (516)

(X,d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. (Manche Autoren fordern zusätzlich, dass $X\ne\emptyset$.
In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.)
Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.