

# Analysis

Die Inhalte zu dem Verzeichnis für LibreOffice werden nach und nach eigearbeitet

Seite

1 0 Vorbemerkungen

1 0.0 Abkürzungen, Vorbemerkungen, Beweismethoden  
Direkter Beweis

2 Indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis

3 0.1 Mengen  
Definition, gleiche Mengen, leere-, Teilmengen  
4 Vereinigung, Schnitt, Differenz, disjunkte  
5 Komplement, Potenzmenge, kartesisches Produkt  
8 Rechenregeln, Folgerungen  
10 System von Mengen  
11 Äquivalenzklasse/Partition

100 0.2 Relationen, Funktionen  
Definition Relation, Äquivalenzrelation,  
Äquivalenzklassen

103 Partition  
106 Funktion, Definitionsbereich, Wertebereich, Urbild  
108 Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f  
200 0.2f Injektive, surjektive, bijektive Abbildungen  
202 Verkettete Abbildungen  
203 Identische Abbildungen

300 1 Axiomatische Einführung der reellen und  
komplexen Zahlen

300 1.1 Definition Gruppe, Körper, Körperaxiome  
301 Verknüpfung, Verknüpfungsgebilde  
302 Definition Gruppe Halbgruppe,, abelsche Gruppe  
304 Untergruppe  
306 Ring, Körper  
314 Abgeleitete Rechenregeln (RR) in  $\mathbb{K}$

400 1.2 Die Anordnungsaxiome  
401 Abgeleitete Rechenregeln in einem angeordneten  
Körper (RR<)  
407 Maximum, Minimum  
408 Absolutbetrag  
409 Dreiecksungleichung  
412 Vorzeichen

500	1.3	Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen Schranken, Supremum, Infimum Schranken, Maximum, Minimum Definition vollständiger Körper Definitionen Intervalle, Dedekindsche Schnitte Quadratwurzel Metrik, Metrischer Raum
600	1.4	Funktionenräume, gerade/ungerade Funktionen, Beschränkte Funktion Monotone Funktionen Beschränkte Funktion
700	1.5	Die natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion Definition Induktive Mengen, natürliche Zahlen und deren Eigenschaften Vollständige Induktion Rechenregeln in $\mathbb{N}$ Vollständige Induktion 2. Fassung Archimedisches Prinzip Wohlordnungssatz Summen, Produkte Unleichung von Bernoulli
750	1.5f	P15f Abzählbare.... Mengen Teilmengen abzählbarer Mengen Abzählbares kartesisches Produkt Abzählbarkeit rationaler Zahlen Maximum und Minimum zu Mengen Ganze, rationale, irrationale Zahlen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ sind abzählbar, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sind überabzählbar Das größte Ganze Division mit Rest $g$ -Adische Zahlendarstellung Intervalle, Intervallschachtelungsprozess
800	1.6	Die komplexen Zahlen Eigenschaften der komplexen Zahlen Potenz komplexer Zahlen
900	1.7	Einige Identitäten, Ungleichungen und Definitionen Teleskopsumme Endliche geometrische Reihe Abelsche partielle Summation Fakultät, Binomialkoeffizient Identitäten zu Binomialkoeffizienten

908		Binomialsatz
1000	1.8	Arithmetisches und geometrisches Mittel
1000		AGM Ungleichung
1100	1.9	Polynome, Nullstellen, grad, rationale Funktionen
1103		Nullstellen
1106		Divisionssatz
1107		Identitätssatz für Polynome
1150	1.9f	
1150		Cauchy-Schwarz Ungleichung
1151		Lagrange Identität
1152		Cauchy Produkt von Polynomen
1152		Minkovsky Ungleichung, Interpolation mit Polynomen
1153		Hauptsatz der Polynominterpolation
1153		Lagrange Darstellung des Interpolationspolynoms
1153		Interpolationspolynom Newtonsche Darstellung
1155		Wurzelfunktion
1157		nte Wurzelfunktion
1200	2	Kapitel Konvergenz von Folgen und Reihen
1200	2.1	Konvergenz und Grenzwert
1209		Beschränkte Folge
		Nullfolgen
1250	2.1f	Cauchyfolge
1250		Eigenschaften konvergenter Folgen
1255		Vergleiche von Folgen
1300	2.2	Reelle, insbesondere monotone Folgen
		Monotone Folgen, Definition Teilfolge, Umordnung,
		triviale Abänderung
1301		Monotone Konvergenz
		Konvergenz von Teilfolgen, Umordnungen und
		trivialen Abänderungen konvergenter Folgen
1307		monotone Teilfolge
1308		Bolzano Weierstraß (BW)
1308		Konvergenzkriterium von Cauchy
1309		Uneigentliche Konvergenz
1315		Division durch Multiplikation und Addition
1315		Wurzelziehen durch Division und Multiplikation und
		Addition

1400	2.3	Exponential-, Logarithmus- und Potenzfunktionen bis 1403 verschiedene Sätze
1403		Intervallschachtelung für e
		Exponentialfunktion Beschränkung
1404		Exponentialfunktion komplex
1408		e: Eulersche Zahl, reelle-, komplexe Exponentialfunktion
1409		Eigenschaften Exponentialfunktion
1450	2.3f	
1451		$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv
1452		natürliche Exponentialfunktion mit Basis e
		Umkehrfunktion $\log(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
		natürlicher Logarithmus bzw Logarithmus zur Basis e
1453		Eigenschaften des Logarithmus
1455		Potenz zur Basis a mit Exponenten b
1456		allgemeine Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion
		allgemeine Potenzfunktion
1456		Eigenschaften dieser Funktionen
1460		Wichtige Grenzwerte
1500	2.4	Häufungswerte (HW) von Zahlenfolgen
		Häufungspunkte (HP) von Mengen
1502		Bolzano Weierstrass (BW)
1504		Cauchyfolge
1505		min H, max H.
1507		limes superior, limes inferior
1509		Beschränkte, konvergente Folgen und Häufungswert
1550	2.5	Doppelfolgen
1550		konvergente
1550		Cauchysches Konvergenzkriterium
1551		Iterierter Limes
1552		Gleichmäßige Konvergenz
1600	3	Unendliche Reihen
1600	3.1	Definition unendliche Reihen, nte Partialsumme
		Konvergenz
1602		Konvergenz/Divergenz der geometrischen Reihe
		Rechenregeln für unendliche Reihen
1605		Teleskopreihe
1606		alternierende Reihe
1607		Leibniz Kriterium
1700	3.2	Reihen mit nicht-negativen Gliedern,

		absolut konvergente Reihen sind konvergent
1701		Majorantenkriterium, Minorantenkriterium
1702		Wurzelkriterium
1704		Quotientenkriterium
1717		Cauchy-Schwarz-Ungleichung
1719		Verdichtungssatz von Cauchy
1750	3.2f	Umordnung, unbedingt-, bedingt konvergent
1753		Riemannscher Umordnungssatz
1756		Absolute Konvergenz <u>unbedingte Konvergenz</u>
1765	3.2ff	Def Doppelreihen, Doppelreihensatz
1769		Cauchyscher Doppelreihensatz
1779		Großer Umordnungssatz
1781		Vertauschung von Grenzwerten
1782		Exponentialfunktion,
1783		Exponentialreihe
1784		Reihen-Cauchy-Produkt
1784		Cauchy-Produktsatz
1800	3.3	Dual- und Dezimalzahlen
1801		g-adische Zahldarstellung reeller Zahlen
1803		g-adische Entwicklung
1805		periodische Entwicklung Q
1900	3.4	Abelsche partielle Summation, Dirichlet-Kriterium
1901		Konvergenzkriterium von Du Bois-Reymond
1902		Konvergenzkriterium nach Dedekind
2000	3.5	Potenzreihen
2001		Konvergenzradius, Berechnung mit Wurzel
2004		Gleichmäßige Konvergenz von Potenzreihen
2100	3.6	Spezielle Potenzreihen und Funktionen
2102		Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion
2103		Einheitskreis, Bogenmasswinkel
2104		Umfang Einheitskreis, Zusammenhang Exponentialfkt
2105		Definition hyperbolische Funktionen
2106		Eigenschaften hyperbolische Funktionen
2107		Definitionen sin, cos
		Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen
2200	4	Funktionsgrenzwerte und stetige Funktionen

2200	4.1	Topologische Begriffe Umgebung, Menge aller inneren Punkte, offener Kern von M, offene Menge
2201		Häufungspunkt, abgeschlossene Hülle von M Kompakte Menge, Randpunkt, isolierter Punkt, uneigentlicher HP von M
2203		Vereinigung aller offenen Teilmengen von M
2205		Durchschnitt aller geschlossenen Obermengen von M
2300	4.2	Funktionsgrenzwerte, Konvergenz Funktionenfolgen Definitionen Konvergenz von Funktionen
2300		dto für Körperelemente
2302		Monotone Funktion
2303		beschränkte Funktion
2304		Funktionen Konvergenz Folgenkriterium
2307		Funktionen Konvergenz Cauchykriterium
2310		Funktionen Konvergenz Grenzwertregeln
2320		Grenzwert monotoner & beschränkter Funktionen
2350	4.2f	Funktionenfolgen, punktweise-, gleichmäßige Konvergenz
2355		Funktionenreihen punktweise-, gleichmäßige Konvergenz
2356		Funktionenfolge Cauchykriterium
2356		Funktionenreihen Cauchykriterium
2361		Majorantenkriterium zu Funktionenreihen
2400	4.3	Stetige Funktionen ...komplexe Mengen
2401		
2408		Exponential-, trigonom.-, hyperb. Funktionen
2409		Folgenstetigkeit
2409		Rechenregeln für Stetigkeit
2450	4.3f	Stetigkeit Potenzreihen
2455		Identitätssatz für Potenzreihen
2455		Eindeutigkeitssatz für Potenzreihen
2459		Fibonacci-Zahlen
2500	4.4	Hauptsätze über stetige Funktionen
2500		Zwischenwertsatz zu stetigen Funktionen
2501		Nullstellen
530	4.4f	Umkehrfunktion und Stetigkeit

2532	sin cos Werte zwischen 0 und $2\pi$
2534	cos, kleinste positive Nullstelle
2535	Definition Pi
2537	Periodizitäten und Idenditäten der trigonometrischen Funktionen
2540	Umkehrfunktionen zu sin, cos, ...
2541	Parametrisierung des Einheitskreises in C
2544	Definition Logarithmus
2560 4.4ff	Globale Extrema
2563	Gleichmäßige Stetigkeit
2564	Gleichmäßige Stetigkeit von $f$
2565	Beschränktheit $f(M)$
2600 4.5	Punktweise/gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und -Reihen
2602	Cauchykriterium Funktionenfolgen und -Reihen
2604	Majorantenkriterium
2609	Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit
2700 5	Differentialrechnung
2702 5.1	Der Begriff der Ableitung, höhere Ableitungen stetig differenzierbar
2704	Differenzierbarkeit
2707	Differenzieren Potenzreihen, Konvergenzradius differenzierte Reihe
2711	Exponential-, trigonometrische-, hyperbolische Funktionen sind differenzierbar
2750 5.1f	Differentiationsregeln
2755	Folgerungen, Ableitungen:
	rationale Funktionen, trigonometrische, hyperbolische Funktionen, Logarythmus, $(ax)'$ , $(\text{Arcsinh } x)'$ , $(\text{Arccosh } x)'$
2757	Produktregel für höhere Ableitungen
2800 5.2	Extrema, Mittelwertsätze der Differentialrechnung
2800	notwendige Bedingung für lokale Extrema
2802	Satz von Rolle
2803	Mittelwertsatz der Differentialrechnung
2804	Erweiterter Mittelwertssatz der Differentialrechnung
	Monotonie und Ableitung
2806	notwendige Bedingung für lokale Extrema anderer Beweis
2807	Maximum, Minimum
2808	Zwischenwertsatz von Darboux
2810	Näherungen Newtonverfahren
2850 5.2f	Grenzwertregel von de l'Hospital

2856	konvexe bzw. konkave Funktionen
2861	Wendepunkt, notwendige Bedingung
	Trigonometrische Funktionenräume
2900	5.3 Der Satz von Taylor
2900	n-fache Nullstellen von Funktionen
2901	Potenzreihen und Ableitungen
2903	n-tes Taylorpolynom und Restglied
2904	Satz von Taylor
2912	Taylorreihe um Entwicklungspunkt $x_0$ .
2916	Hinreichende Bedingung für lokale Extrema bzw. Wendepunkte
3000	5.4_5.6
3000	5.4 Gliedweises Differenzieren
3000	Vertauschung von Grenzwertübergängen
3002	Gliedweises differenzieren von Folgen und Reihen
3007	5.6 Das Argument und der Logarithmus einer komplexen Zahl
3008	$z=r(\cos + i \sin) = r e^{i\varphi}$ $\log z$
3100	6 Integralrechnung
3100	6.1 Riemannsummen und Riemannintegral Zerlegungen, Zwischenpunktvektoren
3101	Ober-, Unterintegral
3102	Riemann integrierbar
3103	Verfeinerung zur Zerlegung
3107	Ober- und Untersummen, Ober-, Unterintegral
3113	Riemann-Integrierbarkeit und Zwischenpunktsummen
3117	Riemann Integrierbarkeitskriterium
3119	Fundamentalabschätzung
3200	6.2 Integrierbarkeit von Funktionen
3200	Setige und monotone Funktionen R-integrierbar
3204	Produkte, Summen integrierbarer Funktionen
3202	Lipschitzbedingung und Integrierbarkeit
3207	Integration über $[a,c], [c,b]$
3209	Mittelwertsatz der Integralrechnung
3300	6.3 Hauptsätze der Differenzial- und Integralrechnung
3303	Stammfunktion
3303	Hauptsatz der DI
3307	$F+C$ Stammfunktion
3400	6.4 Weitere Ergebnisse

3400	Partielle Integration
3402	Substitutionsregel
3409	Integration von Ungleichungen
3410	Mittelwert, Mittelwertsatz der Integralrechnung
3411	Erweiterter Mittelwertsatz der Integralrechnung
3412	2. Mittelwertsatz der Integralrechnung
3413	Gliedweise Integration
3500	6.5 Die Partialbruchzerlegung
3500	Fundamentalsatz der Algebra
3504	Partialbruchzerlegung im Komplexen
3507	Partialbruchzerlegung reeller rationaler Funktionen
3600	6.6 Der Taylorsche Satz
3600	n fache Stammfunktion
3602	Satz von Taylor
3603	lokale Max/Min und $2n - 2n+1$ fache Differenzierung
3604	Taylorpolynom und Restglied
3606	Binomialreihe
3700	6.7 Uneigentliche Integrale
3702	Cauchy Kriterium für uneigentliche Integrale
3703	absolut uneigentlich integrierbar zu uneigentlichen Integralen
3704	absolute Konvergenz...
	Konvergenz zu
	Majorantenkriterium für uneigentliche Integrale
3705	Integralkriterium für Reihen