A0.1.1

a)Es seien A,B,C Mengen. Zeige: C⊂A ⇔ A∪C = A

#Vorbemerkung:Es wird wiederholt D0.1.3,Bem1 benutzt:

$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ <u>und</u> $M_2 \subset M_1$

Bew: Z.z.(.)C⊂A ⇒ A∪C=A (..)A∪C=A ⇒ C⊂A

(.)A∪C ⊃ A: x∈A ⇒ x∈A oder x∈C ⇒ x∈A∪C und

A∪C ⊂ A: x∈A∪C ⇒ x∈A oder $\underbrace{x\in C}_{x\in A \text{ da } C\subset A\,!}$ ⇔ x∈A

kürzer: x∈A∪C $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{D0.1.4 1}}$ x∈A oder x∈C $\underbrace{\Leftrightarrow}_{C\subset A}$ x∈A

(..)Sei x∈C ⇒ x∈A oder x∈C $\underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{D0.1.4 1.)}}$ x∈ $\underbrace{A\cup C}_{=A}$ ⇒ x∈A.

Also C⊂A

b)Es seien A,B,C Mengen. Zeige: A⊂B ⇔ A∩B = A

Bew:Z.Z:(.)A⊂B ⇒ A∩B = A (..)B∩A = A ⇒ A⊂B

(.)Unabhängig von A⊂B gilt wegen x∈B∩A ⇒ x∈B und x∈A ⇒ x∈A ⇒ B∩A ⊂ A

B∩A ⊃ A: x∈A $\underset{A\subset B}{\Rightarrow}$ x∈B und x∈A $\underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)}$ x∈B∩A

kürzer: x∈ B∩A $\underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)}$ x∈A und x∈B $\underset{A\subset B}{\Leftrightarrow}$ x∈A

(..)x∈A ⇒ x∈B∩A $\underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)}$ x∈B und x∈A ⇒ x∈B. Also A⊂B

andere Formulierung

(.)Es gilt für beliebige Mengen A,B:A∩B⊂A
(denn x∈A∩B ⇒ x∈A und x∈B ⇒ x∈A)
Es sei A⊂B. Z.z. vgl oben : A⊂A∩B
Sei x∈A⊂B ⇒ x∈A und x∈B x∈A∩B ⇒ x∈A∩B

(..)Es gelte A∩B=A . Z.z.: A⊂B
Sei x∈A und x∈B ⇒ x∈A∩B ⇒ x∈A und x∈B ⇒ x∈B
(.) und (..)⇒ Beh

A0.1.2

Finde diejenige Menge A, deren Potenzmenge so wenig Elemente enthält wie nur möglich

Lös:Die Potenzmenge einer Menge ist niemals leer, denn sie enthält immer die Teilmengen ∅ und A; diese sind genau dann gleich, wenn A die leere Menge ist. Also gilt: Ist A≠∅ , so hat $P_{(A)}$ Mindestens 2 Elemente. Daher ist die gesuchte Menge A=∅

A0.1.3

Charakterisiere alle Mengen A,deren Potenzmenge genau 2 Elemente hat

A0.1.4

Charakterisiere alle Mengen A, deren Potenzmenge nur endlich viele Elemente hat

A0.1.5

Seien A={a_1,a_2}, B={b_1,b_2} und M=AxB={(a_i,b_j), i,j=1,2}.
Bestimme die Potenzmenge von M.

A0.1.6
Seien A_j Mengen mit n_j Elementen für $1 \leq j \leq n$. Bestimme die Anzahl der Elemente von $A_1 * \ldots * A_n$.

A0.1.7
In der linearen Algebra wird $\mathbb{R}^n$ meist als Menge der Spaltenvektoren der Länge n definiert. Wieso ist die streng genommen nicht gleich dem kartesischen Produkt $\mathbb{R} * \ldots \mathbb{R}$ (mit n Faktoren)?

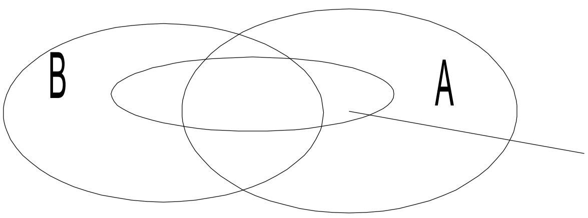
A0.1.8
Zeige:Die Menge aller reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten kann man als kartesisches Produkt von $\mathbb{R}^n$ mit sich selber (m mal) auffassen.

A0.1.9
Es seien A,B Mengen. Zeige:
a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
//D0.1.6 (5) $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$*//*
Bew: $M \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow M \in \mathcal{P}(A)$ und $M \in \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.6} M \subset A$ und $M \subset B \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Beweis siehe unten*}}$

$M \subset A \cap B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.6} M \in \mathcal{P}(A \cap B)$

* $M \subset A$ und $M \subset B \Leftrightarrow M \subset A \cap B$
„$\Rightarrow$" Sei $x \in M \underset{M \subset B,\, M \subset A}{\Rightarrow} x \in A$ und $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

„$\Leftarrow$" Sei $x \in M \underset{M \subset A \cap B}{\Rightarrow} x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ und $x \in B$
b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
//D0.1.4 (4) 1.) $M_1 \cup M_2 := \{x \mid x \in M_1$ *oder* $x \in M_2\}$*//*
//D0.1.6 (5) $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$*//*
Bew: $M \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.4\ 1.)} M \in \mathcal{P}(A)$ oder $M \in \mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M \subset A$ oder $M \subset B \underbrace{\Rightarrow}_{*}$
(Umkehrung stimmt nicht,siehe c)
$M \subset A \cup B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D\,0.1.6} M \subset \mathcal{P}(A \cup B)$
*$x \in M \Rightarrow x \in A$ oder $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$
Anschauungsbeispiel



$M \not\subset A$ oder B

c) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ gilt im allgemeinen nicht(anhand eines Gegenbeispiels)
Lös: $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, $a \neq b$, $A \cup B = \{a,b\}$
$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\varnothing, \{A\}\} \cup \{\varnothing, \{B\}\} = \{\varnothing, A, B\} = \{\varnothing, \{a\}\{b\}\} \neq \{\varnothing, \{a\}\{b\}\{a,b\}\} =$
$\mathcal{P}(A \cup B)$. Also $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$

Bem: Wenn man den Bew b genau anschaut, so sieht man, dass nur an einer Stelle keine Äquivalenzumformung gemacht wurde. $M \subset A$ oder $M \subset B \Rightarrow M \subset A \cup B$. Hier gilt die Umkehrung nicht (z.B. $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $a \neq b$ und wähle $M=A \cup B$) Deshalb konnte in b) kein „=„ stehen.

A0.1.10 Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Zeige:

a) $(A_1 x A_2) \cap (B_1 x B_2) = (A_1 \cap B_1) x (A_2 \cap B_2)$

//D0.1.4 (4) 2.) $M_1 \cap M_2 := \{x / x \in M_1$ *und* $x \in M_2\}$*//*

//D0.1.7 (5) $M_1 * M_2 := \{(x,y) / x \in M_1$ *und* $y \in M_2\}$*//*

Bew: $(x_1,x_2) \in (A_1*A_2) \cap (B_1*B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)} (x_1,x_2) \in A_1*A_2$ und $(x_1,x_2) \in B_1*B_2$ ¿ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.7\ )}$

$(x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2)$ und $(x_1 \in B_1$ und $x_2 \in B_2) \Leftrightarrow$

$(x_1 \in A_1$ und $x_1 \in B_1)$ und $(x_2 \in A_2$ und $x_2 \in B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)}$

$x_1 \in A_1 \cap B_1$ und $x_2 \in A_2 \cap B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.7\ )} (x_1,x_2) \in (A_1 \cap B_1) x (A_2 \cap B_2)$

b) $(A_1 x A_2) = \emptyset \Leftrightarrow A_1 = \emptyset$ oder $A_2 = \emptyset$

*//D0.1.7 (5) M1*M2 :=* $\{(x,y) / x \in M_1$ *und* $y \in M_2\}$*//*

Bew: dazu äquivalente Aussage $(A_1*A_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset$

$(A_1*A_2) \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists (a_1,a_2) \in A_1*A_2 \underset{D0.1.7}{\Leftrightarrow} \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.7} \exists a_1 \in A_1$ und $\exists a_2 \in A_2 \Leftrightarrow$

$A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset$

Andere Formulierung:

„⇒„ Sei $(A_1*A_2) = \emptyset$. Annahme: $A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists a_1 \in A_1$ und $\exists a_2 \in A_2 \Rightarrow$ $(a_1,a_2) \in A_1*A_2$ Widerspruch da $(A_1*A_2) = \emptyset$. Also Annahme falsch, d.h. $A_1 = \emptyset$ oder $A_2 = \emptyset$

„⇐" Sei $A_1 = \emptyset$ oder $A_2 = \emptyset$. Annahme: $(A_1*A_2) \neq \emptyset \Rightarrow (a_1,a_2) \in A_1*A_2 \Rightarrow$ $\exists a_1 \in A_1$ und $\exists a_2 \in A_2 \Rightarrow A_1 \neq \emptyset$ und $A_2 \neq \emptyset$.
Widerspruch, also Annahme falsch, d.h. $(A_1*A_2) = \emptyset$.

c) (.) Wenn $A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2$, so $A_1*A_2 \subset B_1*B_2$;
(..) im Falle $A_1*A_2 \neq \emptyset$ gilt auch die Umkehrung (d.h., wenn $A_1*A_2 \subset B_1*B_2$, so $A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2$.

Bew: (.) Z.z. $A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2 \Rightarrow A_1*A_2 \subset B_1*B_2$.

Sei $(x_1,x_2) \in A_1*A_2 \Rightarrow x_1 \in A_1$ und $x_2 \in A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A_1 \subset B_1, A_2 \subset = B_2} x_1 \in B_1$ und $x_2 \in B_2 \Rightarrow$

$(x_1,x_2) \in B_1*B_2$ d.h. $A_1*A_2 \subset B_1*B_2$

(d.h. wenn $A_1*A_2 \subset B_1*B_2$, so $A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2$)

(..) Zusätzlich sei $A_1*A_2 \neq \emptyset$

Z.z. $A_1*A_2 \subset B_1*B_2 \Rightarrow A_1 \subset B_1$ und $A_2 \subset B_2$:

Bew von $A_1 \subset B_1$: Sei $\underline{x_1 \in A_1} \Rightarrow$ Nach b) folgt aus $A_1*A_2 \neq \emptyset$, daß $A_2 \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x_2 \in A_2 \Rightarrow (x_1,x_2) \in A_1*A_2 \underset{A_1*A_2 \subset B_1*B_2}{\Rightarrow} \underbrace{\Rightarrow}_{A_1*A_2 \subset B_1*B_2} (x_1,x_2) \in B_1*B_2 \Rightarrow x_1 \in B_1$ und $x_2 \in B_2$

$\Rightarrow \underline{x_1 \in B_1} \Rightarrow A_1 \subset B_1$

Bew von $A_2 \subset B_2$ analog

A0.1.11 Setze $B_j = X \backslash A_j$ $\forall j \in J$ und führe die zweite de Morgansche Regel auf die erste zurück: $M_1 \subset M_2 (\subset M_3) \Leftrightarrow M_2^{\,C} \subset M_1^{\,C}$

A0.1.12 Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C \subset A \Leftrightarrow (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

//Distributivgesetze (8): $M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$*//*

//D0.1.4 (4) 2.) $M_1 \cap M_2 := \{x / x \in M_1$ *und* $x \in M_2\}$*//*

Bew: „⇒" Sei $C \subset A$. Z.z $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$:

$(A\cap B)\cup C \underset{\text{Distributivgesetz}}{=} \underbrace{(A\cup C)}_{=A,\,da\,C\subset A}\cap(B\cup C)=A\cap(B\cup C)$

„$\Leftarrow$" Sei $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$ Z.z $C\subset A$

Sei $x\in C \Rightarrow x\in A\cap B$ oder $x\in C \Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup C$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D\,0.1.4.2\ 2.)}$ $x\in A$ und $x\in(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ d.h. $C\subset A$

Widerspruchsbeweis:

Sei $x\in C$. Annahme $x\notin A$ ($\Rightarrow x\notin A$ oder $x\notin B\cup C$)

$x\notin A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\notin (A\cap B)\cup C$

(d.h. nicht ($x\in A\cap B$ oder $x\in C$)) $\Rightarrow x\notin A\cap B$ und $x\notin C \Rightarrow$

$x\notin C$ Widerspruch, also ist die Annahme falsch, d.h. $x\in A$

(Wir haben gezeigt: $x\in C \Rightarrow x\in A$)

A0.1.13 (Siehe auch Distributivgesetze)

Seien A,B und C Mengen. Zeige:

a) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

Lös: $x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A$ oder $x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A$ oder ($x\in B$ und $x\in C$)

$\Leftrightarrow$ ($x\in A$ oder $x\in B$) und ($x\in A$ oder $x\in C$) $\Leftrightarrow x\in(A\cup B)$ und $x\in(A\cup C) \Leftrightarrow$

$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

b) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

A0.1.14

Es seien A,B und C Teilmengen einer Menge $X\neq\emptyset$. Zeige:

a) $A\subset B \Leftrightarrow B^c\subset A^c$.

Lös: (.) $A\subset B \Rightarrow B^c\subset A^c$: Sei $x\in B^c$, d.h. $x\notin B \Rightarrow x\notin A$ (sonst $x\in A \Rightarrow x\in B$ Widerspruch) $\Rightarrow x\in A^c \Rightarrow B^c\subset A^c$

(..) Sei $B^c\subset A^c$, es folgt nach (.) $(A^c)^c\subset(B^c)^c\Rightarrow A\subset B$

b) $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

Lös: Sei $x\in(A\cap B)^c$ baf $\Leftrightarrow x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow x\notin A$ oder $x\notin B \Leftrightarrow$

$x\in A^c$ oder $x\in B^c \Leftrightarrow x\in A^c\cup B^c$

A0.1.15 Beweise: $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

#Lös: $\forall\ x\in(A\setminus(B\setminus C)$ gilt: $\{x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow \{x\in A \wedge (x\notin B \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow$

$\{x\in A \wedge (x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

A0.1.16 Mengen in einfacher Form angeben

a) $X=\bigcup_{q\in Q}\bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

Lös: Sei $q\in\mathbb{Q}$ baf $\Rightarrow q \underbrace{\in}_{q-\varepsilon\le q\le q+\varepsilon} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]\supset\bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

• $x>q \Rightarrow \exists\ \varepsilon_t>0$: $x>q+\varepsilon_t+$ (Bsp $\varepsilon_t=\frac{1}{2}(x-q)$) $\Rightarrow x\notin[q-\varepsilon_t,q+\varepsilon_t]$

•• $x>q$ analog $x\notin[q-\varepsilon_t,q+\varepsilon_t]$

• & •• $x\notin\bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \Rightarrow \bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\{q\} \Rightarrow$

$X=\bigcup_{q\in Q}\bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\bigcup_{q\in Q}\{q\}=\mathbb{Q}$.

b) $Y=\bigcap_{q\in Q}\bigcup_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

Lös : Sei $q\in\mathbb{Q}$ baf, x beliebig, $\varepsilon>|x-q|$ beliebig $\Rightarrow x\in[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \underbrace{\Rightarrow}_{\text{unabhängig von`q}}$

$x\in\bigcup_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \Rightarrow \bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\mathbb{R} \Rightarrow$

$Y=\bigcap_{q\in Q}\bigcup_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\bigcap_{q\in Q}\underbrace{=}_{?}\mathbb{R}$.

c) $Z=\bigcup_{q\ni Q}\bigcap_{\varepsilon>0,\varepsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

Lös: $\varepsilon>0$ baf, wähle $n\in\mathbb{N}$: $n \underbrace{\le}_{N\ \text{unbeschränkt}} 2\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{0\in Q,\,n\in Q} =[0-\varepsilon,0+\varepsilon]\in\bigcap_{q\in Q}$ & $[n-\varepsilon,n+\varepsilon]\in \underbrace{\Rightarrow}_{n<2\varepsilon}\bigcap_{q\in Q}$

$[0-\varepsilon,0+\varepsilon]\cap[n-\varepsilon,n+\varepsilon]=\emptyset \Rightarrow \bigcap_{q\in Q}([0-\varepsilon,0+\varepsilon]\cap[n-\varepsilon,n+\varepsilon])=\emptyset \underset{\varepsilon\, beliebig}{\underbrace{\Rightarrow}}$

$Z=\bigcup_{q\ni Q}\ \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R}\emptyset=\emptyset$

A0.1.17

Def: $\Delta(Z):=\{(x,y)\in Z\,|\,x=y\}\subset Z^2$, Zeige: $X\subset Y \Leftrightarrow \Delta(X)\subset\Delta(Y)$

Bew: „$\Rightarrow$“ Sei $X\subset Y$ & $(a,b)\in\Delta(X)\Rightarrow (a,b)\in X^2=X\mathrm{x}X,\ a=b \Rightarrow (a,b)\in\Delta(Y)$

„$\Leftarrow$“ Sei $\Delta(X)\subset\Delta(Y)$ & $x\in X \Rightarrow (x,x)\in X^2 \Rightarrow (x,x)\in\Delta(X) \Rightarrow (x,x)\in\Delta(Y)\Rightarrow$

$(x,x)\in Y^2 \Rightarrow x\in Y$

A0.1.18 $X,Y\neq\emptyset,\ f:X\to Y,\ f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\ \ \forall\ A,B\in X$

Zu zeigen: f injektiv $\Leftrightarrow f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)\ \ \forall\ A,B\in X$

Bew: «$\Rightarrow$» f injektiv $\Leftrightarrow y\in f(A)\cap f(B)$ (Z.z $y\in f(A\cap B)$) $\underset{y\in f(A),\,y\in f(B)}{\Rightarrow}$

$\exists\ x\in A: y=f(x), \exists\ \tilde{x}\in B: y=f(\tilde{x}) \underset{f\,injektiv,\,x,\tilde{x}\in X}{\Rightarrow} x=\tilde{x} \Rightarrow x=\tilde{x}\in A\cap B \Rightarrow \tilde{x}$

$y=f(x)=f(\tilde{x})\in f(A\cap B)$

»$\Leftarrow$″ $x,\tilde{x}\in X,\ y:=f(x)=f(\tilde{x}) \Rightarrow y\in \underbrace{f(\{x\})}_{=\{f(x)\}}\cap\underbrace{f(\{x\})}_{=\{f(\tilde{x})\}}=f(\{x\}\cap\{\tilde{x}\}) \underset{\{x\}\cap\{\tilde{x}\}\neq\emptyset}{\Rightarrow} x=\tilde{x}\Rightarrow$

f injektiv da $y\in f(\{x\}\cap f(\{\tilde{x}\})$