A1.1.1 Zeige:

a) $\forall\ a\in K: a\otimes 0=0$

Lös: Verwendung von – siehe Konventionen.

Sei $b=a\otimes 0$ gesetzt. Dann ist $b=a\otimes(0\oplus 0)=(a\otimes 0)\oplus(a\otimes 0)=b\oplus b \Rightarrow$

$0=b-b=((b\oplus b)-b=b\oplus(b-b)=b\oplus 0=b$

b) Das additive Inverse $-a$ zu einem $a\in K$ ist eindeutig bestimmt und es gilt $-a=(-1)\otimes a$, wobei -1 das additive Inverse der Zahl 1 bedeutet.

Lös: Gelte $a\oplus b=0$ und $a\oplus c=0$. Mit den Axiomen folgt dann

$b=b\oplus 0=b\oplus(a\oplus c)=(b\oplus a)\oplus c=(a\oplus b)\oplus c=0\oplus c=c$, also $b=c$.

Weiter ist $a+(-1)\otimes a=a\otimes(1\oplus(-1))=a\otimes 0$ und nach a) ist $a\otimes 0=0$.

Also ist $(-1)\otimes a$ additives Inverses zu a.

c) Das multiplikative Inverse a^{-1} zu einem $a\in K\setminus\{0\}$ ist eindeutig bestimmt

Lös: Ann $a\otimes b=1=a\otimes c \Rightarrow c=c\otimes(a\otimes b)=(c\otimes a)\otimes b=(a\otimes c)\otimes b=1\otimes b=b \Rightarrow$ Beh

A1.1.2

Es sei K ein Körper und $a,b\in K$. Zeige die Binomische Formel $(a\oplus b)^2=a^2\oplus 2\otimes a\otimes b\oplus b^2$ nur mit Hilfe der Körperaxiome.

Hierbei ist $2:=1\oplus 1$ und $x^2=x\otimes x$ für $x\in K$

// D1.1.1 (300) (A1) $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)\ \forall\ a,b,c\in K$,//

//(M2) $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a\ \forall\ a\in K$ (M4) $a\otimes b=b\otimes a\ \forall\ a,b\in K$ //

// (D) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

Bew: $(a\oplus b)^2=(a\oplus b)\otimes(a\oplus b)\underset{(D)}{=}(a\oplus b)\otimes a\ \oplus\ (a\oplus b)\otimes b\underset{(M4)}{=}$

$a\otimes(a\oplus b)\ \oplus\ b\otimes(a\oplus b)\underset{(D)}{=}(a\otimes a\oplus a\otimes b)\ \oplus\ (b\otimes a\ \oplus\ b\otimes b)=$

$(a^2\oplus a\otimes b)\ \oplus\ (a\otimes b\ \oplus\ b^2)\underset{(A1)}{=}((a^2\oplus a\otimes b)\ \oplus\ (a\otimes b)\oplus b^2=$

$((a^2\oplus(a\otimes b\oplus a\otimes b))\oplus b^2\underset{(M2)}{=}$

$(a^2\oplus(1\otimes(a\otimes b))\ \oplus\ 1\otimes(a\otimes b))\oplus b^2\underset{(D)}{=}$

$(a^2\oplus(a\otimes b)\otimes(1\oplus 1))\oplus b^2\underset{(M4)}{=}(a^2\oplus 2\otimes(a\otimes b))\oplus b^2=$

$a^2\oplus 2\otimes a\otimes b\oplus b^2$ Klammern können wegen (A1) und (M1) weggelassen werden

Genauer steckt im letzten Schritt eine Def und zwar

$x\oplus y\oplus z:=(x\oplus y)\oplus z\underset{A1}{=}x\oplus(y\oplus z)$

$x\otimes y\otimes z:=(x\otimes y)\otimes z=x\otimes(y\otimes z)$ jeweils $x,y,z\in K$

A1.1.3 Gegeben sei ein Körper (K,+,*). Setze man 2:=1+1. Zeige: Definiert man auf (K) Abbildungen ⊕ und ⊗ durch:
a⊕b=a+b+2, a⊗b:=2a+2b+a*b+2, so erhält man einen Körper K*
mit Addition ⊕ und Multiplikation ⊗

Lös: Definiere 4:=2+2=2*2=2*(1+1)=2*1+2*1=4

Überprüfung der Körperaxiome für ⊕ und ⊗

(A1) Für a,b,c∈K gilt (a⊕b)⊕c=(a+b+2)⊕c=a+b+2+c+2=a+b+c+4=
a+(b+c+4)=a+(b⊕c)+2=a⊕(b⊕c)

(A2) Für a∈K gilt a⊕0=a ⇔ 0+2=0 ⇔ 0=-2 d.h. 0=-2 ist
eindeutiges neutrales Element bzgl a.

(A3) Es sei a∈K. Dann gilt ⇔ a⊕(-a)=0 ⇔ a+(-a)+2=-2 ⇔
(-a)=-a-4, d.h.-a-4 ist das eindeutige additive
Inverse zu a bzgl⊕

(A4) Für a∈K gilt: a⊕b=a+b+2=b+a+2=b⊕a

(M1) Für a,b,c∈K gilt:
a⊗(b⊗c)=a⊗(2b+2c+bc+2)=
2a+2(2b+2c+bc+2)+a(b+2c+bc+2)+2=
2a+4b+4c+2bc+4+2ab+2ac+abc+2a+2
(a⊗b)⊗c=(2a+2b+ab+2)⊗c=
2(2a+2b+ab+2)+2c+(2a+2b+ab+2)c+2=
4a+4b+2ab+4+2c+2ac+2bc+abc+2c+2⇒
a⊗(b⊗c)=(a⊗b)⊗c

(M2) ∀ a≠0=-2 gilt a⊗1=a ⇔ 2a+2*1+a*1+2=a ⇔
a+2*1+a*1+2=0 ⇔ (a+2)(1+1)=0 ⇔ 1+1=0 ⇔ 1=-1
d.h., 1=-1 ist das eindeutige Einselement bzgl ⊗
(Beachte 0⊗1=(-2)⊗(-1)=2(-2)+2(-1)+2+2=-2=1)

(M3) ∀ a≠0 gilt $a⊗a^{-1}=1$ ⇔ $2a+2a^{-1}+aa^{-1}+2=-1$ ⇔
$a^{-1}(a+2)=-1-2-2a$ ⇔ $a^{-1}=\frac{-1-2-2a}{a+2}$ d.h. $\frac{-3-2a}{a+2}$
ist das eindeutige Inverse zu a≠0 bzgl ⊗

(M4) Für a,b∈K gilt: a⊗b=2a+2b+ab+2=2b+2a+ba+2=b⊗a

(D) a⊗(b⊕c)=a⊗(b+c+2)=2a+2(b+c+2)+a(b+c+2)+2=
2a+2b+2c+4+ab+ac+2a+2 und
(a⊗b)⊕(a⊗c)=(2a+2b+ab+2)⊕(2a+2c+ac+2)=
2a+2b+ab+2+2a+2c+ac+2+2 d.h.
a⊗(b⊕c)=(a⊗b)⊕(a⊗c)

Facit: (K,⊕ ,⊗) ist Körper

A1.1.4 Wie sieht es mit der Lösungsmenge zu RR4 für a=0 aus?

A1.1.5 Zeige, daß $(-1)^2=(-1)*(-1)=1$ $(-a)^2=a^2$ gilt.

A1.1.6 Seien a,b,c,d Elemente eines Körpers. Zeige

a) $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ (a,c≠0)

Lös: $(ab^{-1})(cd^{-1})=(ab^{-1})(cd^{-1})\underbrace{(bd)(bd)^{-1}}_{=1}=a\underbrace{b^{-1}b}_{=1}\,c\,\underbrace{d^{-1}d}_{=1}\,(bd)^{-1})=(ac)(bd)^{-1}$.

b) $\frac{a/b}{c/d}=\frac{ad}{bc}$ (b,c,d≠0)

A1.1.7 Es sei $(K,\oplus,\otimes)$ ein Körper mit der Eigenschaft $x^2+y^2\neq 0\ \forall\ (x,y)\neq(0,0)$. Auf $K\times K$ seien folgende Verknüpfungen definiert :

$(x_1,x_2)\ \oplus\ (y_1,y_2):=\ (x_1+y_1,x_2+y_2)$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2):=\ (x_1\, y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)$

Zeige, daß $(K\times K,\oplus,\otimes)$ ein Körper ist

Bem: Wählt man $K=R$ (hier gilt: $x^2+y^2>0\ \forall\ (x,y)\neq(0,0)$), so erhält man hiermit, dass $C= R\times R$ ein Körper ist.

Bew: Prüfe alle Körperaxiome nach D1.1.1:

$\oplus$ und $\otimes$ sind Abb. $(K\times K)\times(K\times K)\to\ K\times K$

(Abgeschlossenheit bzgl $\oplus$ und $\otimes$, denn $x_1+y_1,x_2+y_2,x_1y_1-x_2y_2,x_1y_2+x_2y_1\in K\ \forall\ (x_1x_2),(y_1,y_2)\in K\times K$)

d.h. $(x_1,x_2)\ \oplus\ (y_1,y_2):=\ (x_1+y_1,x_2+y_2)\in\ K\times K$

$(x_1,x_2)\otimes(y_1,y_2):=\ (x_1y_1-x_2y_2,\ x_1y_2+x_2y_1)\in\ K\times K$

//D1.1.1 (300) (A1) $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c)\ \forall\ a,b,c\in K$//

(A1) bzgl $\oplus$ Assoziativgestz

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in\ K\times K$ bel$\Rightarrow$

$$((a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2))\oplus(c_1,c_2)\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}\ (a_1+b_1,a_2+b_2)\oplus(c_1,c_2)\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}$$

$$((a_1+b_1)+c_1,(a_2+b_2)+c_2)\ \underbrace{=}_{(A1)\,in\,K}\ ((a_1+(b_1+c_1),a_2+(b_2+c_2))\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}$$

$$(a_1,a_2)\oplus(b_1+c_1,b_2+c_2)\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}\ (a_1,a_2)\oplus((b_1,b_2))\oplus(\ c_1,c_2))$$

//D1.1.1 (300) (A2) $a\oplus 0=a\ \ \forall\ a\in K$//

// Bem:2.) Eindeutigkeit 0: $a\oplus 0=a$, $a\oplus\overline{0}=a$ …. $\overline{0}=\overline{0}\oplus 0=0\oplus\overline{0}=0$//

(A2) (Existenz der Null) Die Null in $K\times K$ ist (0,0), denn

Für $(a_1,a_2)\in K\times K$ bel gilt: $(a_1,a_2)+(0,0)\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}\ (a_1+0,a_2+0)$

$\underbrace{=}_{(A2)\,in\,K}\ (a_1,a_2)$.

Die Eindeutigkeit der Null folgt aus D1.1.1 Bem 2

//D1.1.1 (300) (A3) $a\oplus(-a)=0$//

//Bem 3.) Eindeutigkeit $-a$: $a\oplus(-a)=0$, $a\oplus\overline{a}=0$… $\underbrace{=}_{A4}\ (-a)\oplus 0\ \underbrace{=}_{A2}\ -a$//

(A3) (Existenz des inversen Elements bzgl $\oplus$)

Sei $(a_1,a_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\oplus(-a_1,-a_2)\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}$

$(a_1+(-a_1),a_2+(-a_2))\ \underbrace{=}_{(A3)\,in\,K}\ (0,0)\ \Rightarrow\ (\underbrace{-a_1}_{\in K},\underbrace{-a_2}_{\in K})\in K\times K$ ist additiv inverses Element von (a_1,a_2) (insbesondere existiert dieses inverse Element in $K\times K$)

Die Eindeutigkeit des Inversen Element bzgl $\oplus$ folgt aus D1.1.1 Bem 3

//D1.1.1 (300) (A4) $a\oplus b = b\oplus a\ \ \forall\ a,b\in K$ //

(A4) (Kommutativgesetz bzgl $\oplus$)

Seien Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\oplus(b_1,b_2)$

$$\underbrace{=}_{Def\ \oplus}\ (a_1+b_1,a_2+b_2)\ \underbrace{=}_{(A4)\,in\,K}\ (b_1+a_1,b_2+a_2)\ \underbrace{=}_{Def\ \oplus}\ (b_1,b_2)\oplus(a_1,a_2)$$

//D1.1.1 (300) (M1) $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c \quad \forall\, a,b,c\in K$//

(M1)(Assoziativgesetz bzgl $\otimes$)

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$

$$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\otimes(c_1,c_2) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$$

$$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)\otimes(c_1,c_2) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$$

$$(a_1b_1-a_2b_2)c_1-(a_1b_2+a_2b_1)c_2\ ,(a_1b_1-a_2b_2)c_2+(a_1b_2+a_2b_1)c_1$$

$$\underbrace{=}_{KAx,\,Rechenr.} a_1b_1c_1-a_2b_2c_1-a_1b_2c_2-a_2b_1c_2,a_1b_1c_2-a_2b_2c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1=$$

$$(a_1(b_1c_1-b_2c_2)-a_2(b_1c_2+b_2c_1),a_1(b_1c_2+b_2c_1)+a_2(b_1c_1-b_2c_2)$$

$$\underbrace{=}_{Def\,\otimes}(a_1,a_2)\otimes(b_1c_1-b_2c_2,b_1c_2+b_2c_1)\underbrace{=}_{Def\,\otimes}$$

$$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\otimes(c_1,c_2))$$

//D1.1.1 (300) (M2) $1\neq 0$ und $a\otimes 1=a \quad \forall\, a\in K$//

//4.) in (M2) Eindeutigkeit 1 mit (M4)//

//RR in K 6.) $a\otimes b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$ Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0 \quad \forall\, a\neq 0 \quad \forall\, a\neq 0$//

(M2)(Existenz der Eins) Die Eins in $K\times K$ ist $(1,0)$,

denn $(1,0) \neq \underbrace{(0,0)}_{Null\,in\,K}$ und für $(a_1,a_2)\in K\times K$ bel gilt:

$$(a_1,a_2)\otimes(1,0) \underbrace{=}_{Def\,\otimes} (\underbrace{a_1\cdot 1}_{=a_1}-\underbrace{a_2}_{=0}\cdot 0,\ \underbrace{a_1}_{=0}\cdot 0+\underbrace{a_2}_{=a_2}\cdot 1)=$$

wg (M2) und Rechenr 6

$$(a_1-0,0+a_2) \underbrace{=}_{Rechenr\,in K} (a_1,a_2)$$

Die Eindeutigkeit der Eins folgt aus Bem4 D1.1.1

//(M3)(300) $\forall\, a\in K\setminus\{0\}$, $a^{-1}\in K$, $a\otimes a^{-1}=1$ //

(M3)(Existenz des inversen Elements bzgl $\otimes$)

Sei $(a_1,a_2)\in K\setminus\{0,0\}$ bel $\Rightarrow$

$\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)$ ist multiplikativ inverses Element von

(a_1,a_2), denn $\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)\in K\times K$

(Wie findet man dieses inverse Element $(b_1,b_2)\in K\times K$?

Ansatz: $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2)=(1,0) \Leftrightarrow a_1b_1-a_2b_2=1,a_2b_1-a_1b_2=0$

$\Leftrightarrow b_1=a_1/(a_1^2+a_1^2),\ b_2=-a_2/(a_1^2+a_1^2)$.

Beachte $a_1^2+a_1^2\neq 0$ nach Vors)

und $(a_1,a_2)\otimes\left(\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}\right) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$

$$\left(a_1\cdot\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}-a_2\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2},\ a_1\cdot\frac{-a_2}{a_1^2+a_2^2}+a_2\frac{a_1}{a_1^2+a_2^2}\right) \underbrace{=}_{Rechenr\,in K}$$

$$\left(\frac{a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2},\frac{-a_1a_2+a_1a_2}{a_1^2+a_2^2}\right)=(1,0)= \text{Eins in } K\times K$$

Die Eindeutigkeit des multiplikativen inversen Elements folgt aus D1.1.1 Bem 4

//(300)(M4) $a\otimes b=b\otimes a \quad \forall\, a,b\in K$//

(M4)(Kommutativgesetz bzgl $\otimes$) Seien

$(a_1,a_2),(b_1,b_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$ $(a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$

$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1) \underbrace{=}_{(M4)} (b_1a_1-b_2a_2,b_1a_2+b_2a_1) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$

$(b_1,b_2)\otimes(a_1,a_2)$

//(300)(D) $a\otimes(b\oplus c)=(a\otimes b)\oplus(a\otimes c)$//

(D)(Distributivgesetz)

Seien $(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in K\times K$ bel $\Rightarrow$

$(a_1,a_2)\otimes((b_1,b_2)\oplus(c_1,c_2)) \underbrace{=}_{Def\,\oplus} (a_1,a_2)\otimes(b_1+c_1,b_2+c_2) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$

$((a_1(b_1+c_1)-(a_2(b_2+c_2),a_1(b_2+c_2)+a_2(b_1+c_1))=$

Rechenr., Axiome, insbes (D) in K

$(a_1b_1+a_1c_1-a_2b_2-a_2c_2,a_1b_2+a_1c_2+a_2b_1+a_2c_1) \underbrace{=}_{Rechenr\,in K}$

$((a_1b_1-a_2b_2)+(a_1c_1-a_2c_2),(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1c_2+a_2c_1)) \underbrace{=}_{Def\,\oplus}$

$(a_1b_1-a_2b_2,a_1b_2+a_2b_1)\oplus(a_1c_1-a_2c_2,a_1c_2+a_2c_1) \underbrace{=}_{Def\,\otimes}$

$((a_1,a_2)\otimes(b_1,b_2))\oplus((a_1,a_2)\otimes(c_1,c_2))$

beachte: $\otimes$ bindet stärker als $\oplus$ (Punkt vor Strich)

Bem:Wählt man $K=R$, (hier gilt: $x^2+y^2>0\ \forall(x,y)\neq(0,0)$),so erhält man hiermit, daß $C=R\times R$ ein Körper ist.

In $C=R\times R$ schreibt man anstelle von (x_1,x_2):$x+iy$ wobei $i=(0,1)$

Anstelle von $\oplus$ und $\otimes$ benutzt man die Symbole + und *, also

$(x_1+ix_2)+(y_1+iy_2):=(x_1+y_1)+i(x_2+y_2)$

$(x_1+ix_2)\cdot(y_1+iy_2):=(x_1y_1-x_2y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

Nach A1.1.7 ist $(C,+,*)$ also ein Körper, d.h. man kann wie gewohnt rechnen. Beachte noch:

$i=(0,1)$ $\quad i^2=i*i=(0+1*i)*(0+1*i) \underbrace{=}_{\text{Def von}\,\cdot} (0\cdot 0-1*1)+(0*1+1*0)i=$

$-1+0*i=-1$ $\quad$ also $i^2=-1$

$i^2=(0,1)*(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$

A1.1.8 Es sei $(G,*)$ eine Gruppe und $a\in G$ (fest). Beweise, daß die folgenden Abbildungen bijektiv sind, und gib jeweils die zugehörigen Umkehrabbildungen an:

Bem:Wir zeigen die Bijektivität von f_j ($j\in\{1,2,3\}$) mit Angabe eines $g_j:G\to G$ mit $g_j\circ f_j=id_G=f_j\circ g_j$

Dann ist $f_j^{-1}=g_j$

Bem:1.)(M1),(M2),M3) bedeuten, $(K\setminus\{0\},\otimes)$ ist Gruppe, die wegen(M4) Abel'sch ist

a) $f_1:G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$ (x^{-1} sei das inverse Element zu x in der Gruppe G)

//A0.2.19 (206) $X,Y\neq\emptyset$ & $f:X\to Y$ Abb Zeige://

//c)Beh(.)f bijektiv $\Leftrightarrow\exists$ g: $Y\to X$ mit $g\circ f=id_x$ $f\circ g=id_y$//

// (..)g eindeutig $g=f^{-1}$ //

//D0.2.6 (203)//

//Bem:3.)f: $X\to Y$ bijektiv g: $Y\to Z$ bijektiv $\Rightarrow$ //

//$g\circ f$: $X\to Z$ bijektiv und $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$//

Lös: $y=x^{-1}\Leftrightarrow x=y^{-1}$ $\quad f_1(x):=x^{-1}$

Sei $g_1:=f_1\Rightarrow (g_1\circ f_1)(x)\underset{f_1=g_1}{=}(f_1\circ f_1)(x)=f_1(f_1(x)=f_1(x^{-1})=$

$(x^{-1})^{-1}=x\ \forall\ x\in G\Rightarrow\ g_1\circ f_1=id_G$ und $f_1\circ g_1\underset{f_1=g_1}{=}g_1\circ f_1=id_G\overset{\Rightarrow}{\scriptstyle A0.2.19\,c)}$

f_1 bijektiv und $f_1^{-1}=f_1(=g_1)$

b) $f_2:G\to G$, $x\mapsto a*x$

Lös: $y=a*x\Leftrightarrow x=a^{-1}*y$

$f_2(x):=a*x$. Definiere g_2: $G\to G$ $g_2(x)=a^{-1}*x\Rightarrow$

$(g_2\circ f_2)(x)=g_2(f_2(x))=g_2(a*x)=a^{-1}*(a*x)=\underbrace{(a*a^{-1})}_{e...1}*x=x\ \forall\ x\in G$

und $(f_2\circ g_2)(x)=f_2(g_2(x))=f_2(a^{-1}*x)=a*(a^{-1}x)=x\Rightarrow$
$g_2\circ f_2=id_G=f_2\circ g_2\Rightarrow f_2$ bijektiv und $f_2^{-1}=g_2$

c) $f_3:G\to G$, $x\mapsto x*a$

Lös: $f_3(x)=x*a$ Definiere $g_3:G\to G$, $g_3(x)=x*a^{-1}=\Rightarrow$ analog a),b)

$\Rightarrow g_3\circ f_3=id_G=f_3\circ g_3\Rightarrow f_3$ bijektiv $\forall\ f_3^{-1}=g_3\Rightarrow$

$(g_3\circ f_3)(x)=g_3(f_3)(x)=g_3(x*a)=(x*a)*a^{-1}=x*(a*a^{-1})=x*1=x$
$\forall\ x\in G$ und $(f_3\circ g_3)(x)=(f_3(g_3)(x)=f_3(x*a^{-1})=(x*a^{-1})*a=$
$x*(a*a^{-1})=x*1=x\ \forall\ x\in G$

A1.1.9 Es sei K ein Körper und $a \in K$ (fest). Auf K seien die Relationen | und ~ wie folgt definiert:

$x|y :\Leftrightarrow \exists\, c \in K$ mit $y=c*x$

$x \sim y :\Leftrightarrow a|(x-y)$

a) Ist die Relation | reflexiv, symmetrisch, transitiv?

Lös: 1. Möglichkeit

//(RR) in K (304) 1.)…. $a\otimes 1=1\otimes a=a \ \forall\, a\in K$ ….//

//6.) $a\otimes b = 0 \Leftrightarrow a=0$ oder $b=0$ Speziell $\Rightarrow a^{-1}\neq 0 \ \forall\, a\neq 0$//

(.) | ist reflexiv: $x|x \ \forall\, x\in K$,

denn $x \underset{\text{Rechenregel 1.)}}{=} 1*x \quad \forall\, x\in K$ (d.h. Wähle $c=1\in K$)

(..) | ist nicht symmetrisch: es gilt $1|0$

(denn $0 \underset{6.)}{=} 0*1$, wähle $c=0\in K$) aber $0\nmid 1$ (d.h. nicht $(0|1)$, 0 teilt nicht 1), denn falls $0|1$,

dann $\exists\, c\in K$ mit $1 = c*0 \underset{6.)}{=} 0$ Widerspruch da $1\neq 0$

(...) | ist transitiv: Es sei $x|y$ und $y|z$,

d.h. $\exists\, c_1 c_2 \in K$: $y=c_1*x$ und $z=c_2*y \Rightarrow$

$z=c_2*y=c_2*(c_1*x) \underset{(M1)}{=} \underbrace{(c_2*c_1)}_{\in K} *x$ und $c_1 c_2 \in K \Rightarrow x|z$

Bem: Die obige Rechnung stimmt immer noch, wenn K durch einen kommutativen Ring ersetzt wird (z.B. Z)

2. Möglichkeit: Wegen $x|y \ \forall\, x\in K\setminus\{0\},\ \forall\, y\in K$

(Wähle $c = \frac{y}{x}$) und $(0|y \Leftrightarrow y=0)$ gilt:

$x|y \Leftrightarrow (x=0 \Rightarrow y=0)$ bzw $(x\neq 0$ oder $y=0)$

$\Rightarrow$ | reflexiv (da $x=0 \Rightarrow y=0$)

| nicht symmetrisch (z.B. $x=0$ und $y=1$)

| transitiv (aus $x=0 \Rightarrow y=0$ und $y=0 \Rightarrow z=0$ folgt $x=0 \Rightarrow z=0$

b) Zeige, daß ~: x~y: ⇔ a|(x-y) eine ÄR ist und bestimme alle ÄKn. (Hinweis:Unterscheide die Fälle a=0 und a≠0)

//Eine Menge R mit zwei inneren binären Verknüpfungen „+“ und//
//„.“ auf R ist ein Ring, wenn gilt://*
//1.)(R,+) ist eine abelsche Gruppe, mit 0 als neutralem //
// Element;//
*//2.)(a*b)*c=a(b*c); //*
//3.)∀ a,b,c ist a(b+c)=a*b+a*c (a+b)*c=a*c+b*c.//*
*//4.)kommunitativer Ring: a*b=b*a//*

//G Menge, (G,○), ○:GxG→G heißt Gruppe, wenn folgende //
//Axiome erfüllt sind://
//∀ a,b,c gilt (a○b)○c=a○(b○c)//
//∃ e∈G, ∀ a∈G:a o e=e o a=a//
//∀ a∈G: ∃ a-1 mit a o a-1=a-1 o a=e //
//G abelsch:zusätzlich gilt a o b=b o a   Abgeschlossenheit//

//D1.1.1 (300)//
//(A1) (a⊕b)⊕c=a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K (A2) a⊕0=a ∀ a Î K//
//(RR) in K (304)//
//1.)a⊕0=0⊕a=a, a⊕(-a)=(-a)⊕ a=0 ∀ a∈K
// a⊗1=1⊗a=a ∀ a∈K, $a\otimes a^{-1}=a^{-1}\otimes a$ ∀ a≠0

Bew:1. Möglichkeit benutze nur Eigenschaften eines kommutativen Ringes (z.B.Z)

x|y: ⇔ ∃ c∈K mit y=c*x

x~y: ⇔ a|(x-y)

(.)~ ist reflexiv:Wegen 0=0·a (mit c=0) gilt a|0=x-x ⇒ x~x

(..)~ ist symmetrisch: Sei x~y ⇒ a|x-y ⇒ $\$$ c∈K: x-y=ca ⇒

$$y-x=-(-y)-x=-(-y+x)=-(x+(-y))=-(x-y)=-(ca)=\underbrace{(-c)}_{\hat{I}K} a \Rightarrow a|y-x$$

⇒ y~x

(...)~ ist transitiv: Seien x~y und y~z ⇒ a|x-y und a|y-z ⇒

$\Rightarrow \$ \ c_1,c_2\in K$ mit $x-y=c_1a$ und $y-z=c_2a \Rightarrow$

$$x-z \underbrace{=}_{(A2)} (x+0)-z \underbrace{=}_{\text{Rechenr}1)} (x+((-y)+y))-z \underbrace{=}_{(A1)} ((x+(-y))+y)-z=$$

$$((x+(-y))+y)+(-z)=(x+(-y))+(y+(-z))= (x-y)+(y-z)=$$

$$c_1a+c_2a= a(c_1+c_2)=\underbrace{(c_1+c_2)}_{\hat{I}K} a\Rightarrow a|x-z \Rightarrow x\sim z$$

2. Möglichkeit

1.Fall:a=0: x~y ⇔ x=y

$$(\text{denn}:0|x-y \Leftrightarrow \$ \ c\in K \ \underbrace{x-y}_{=x+(-y)} =c*0=0 \Leftrightarrow x=-(-y)=y) \Rightarrow$$

~ ist ÄR da = eine ÄR ist

2.Fall:a≠0: x~y ∀ x,y∈K denn a|x-y ⇔ $\$$ c∈K: x-y = c*a wahr ∀ x,y∈K (Wähle c= $(x-y)*a^{-1}$, beachte a≠0) d.h. ~ ÄR

$$\text{ÄK: } x|_\sim = \{y\in K \ |y\sim x\}=\begin{cases}\{x\}, \text{falls} a=0\\ K, \text{falls} a ¹ 0\end{cases}$$

Es macht wenig Sinn, diese x~y Relation in K zu betrachten.