A1.2.1 Zeige: Aus $a<b$ folgt $a<(a+b)/2<b$

A1.2.2 Zeige: Ist $a\geq 0$, und gilt $\forall\ \varepsilon>0: a\leq\varepsilon$, so folgt $a=0$

A1.2.3 $a,b,c,d\in(K,>)$, $b,d>0$, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ so gilt $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Lös: $b+d>0$ und $1/b$, $1/d$, $\frac{1}{b+d}>0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d)<(a+c)b \Leftrightarrow ab+ad<ab+cb \Leftrightarrow ad<cb \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d} \text{ und}$$
$$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d<(b+d)c \Leftrightarrow ad<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}.$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

*//**A1.1.3** (303) (K,+,*). $a\oplus b=a+b+2$, $a\otimes b:=2a+2b+a*b+2$,//*

// K :$\oplus$ und $\otimes$ …. $0=-2$, $-a=-a-4$, $1=-1$, $a^{-1}=\frac{-3-2a}{a+2}$ //*

A1.2.4 Kann der Körper $(K,\oplus,\otimes)$ aus A1.1.3 angeordnet werden?

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K R:=<,Anordnungsaxiome://*

// (O3) $a<b \Rightarrow a+c<b+c\ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c<b*c$ //

Lös: Wir verwenden die gleichen Ordnungsrelationen wie beim ursprünglichen Körper. (O1) und (O2) gelten unverändert weiter, unabhängig von den Verknüpfungen

Zu (O3): Es seien $a,b,c\in K$ mit $a<b$

a) $a\oplus c<b\oplus c$:

$a<b \Rightarrow a+c+2<b+c+2 \Rightarrow a\oplus c<b\oplus c$

b) Wenn $c>0=-2$ dann folgt $a\otimes c<b\otimes c$:

$a<b \Rightarrow a(\underbrace{c+2}_{>0})<b(c+2)$

$\Rightarrow ac+2a<bc+2b \Rightarrow ac+2a+2c+2<bc+2b+2c+2 \Rightarrow$
$ac+2a+2c+2<bc+2b+2c+2 \Rightarrow a\otimes c<b\otimes c$

A1.2.5

a)Kann ein Körper mit 3 Elementen angeordnet werden?

//**(RR<)**(400) 4.)$a\neq 0 \Rightarrow a^2:=a\cdot a>0$, speziell $1>0,-1<0$//

*//**D1.2.1** (O2)(400)Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c$ //*

Lös:Nein,denn:Sei K ein dreielementiger Körper $\Rightarrow$

K hat die Gestalt $\{0, 1, -1\}$, (0 und 1 liegen in jedem Körper, dazu $-0=0$ und -1, wobei $-1\neq 1$, da sonst 2 elementiger Körper)

$(1\neq 0,\ 1\neq -1)$.

Es gilt hier $2:=1+1=-1$, denn $1+0=1$, $1+(-1)=0$.

Wäre $1+1=1$, so $1=0$ weil auch $1+0=1$ Widerspruch bzw

$1+1=0$, so $1=-1$ da auch $1+(-1)=0$ Widerspruch $\Rightarrow$

Annahme:K kann angeordnet werden? $\Rightarrow$

$$0 \underset{4.)}{<} 1=1+0 \underset{(O2)\,..0<1}{<} 1+1=2\in K=\{0,\ 1,\ -1\} \Rightarrow 0<1<1+1=2$$

Falls $2=0 \Rightarrow 0 \underset{(O2)}{<} 2=0$ Widerspruch,

Falls $2=1 \Rightarrow 1<2=1$ Widerspruch,

Falls $2=-1 \Rightarrow 0<2=-1$ Widerspruch zu Regel (4) $\Rightarrow$

Annahme falsch, also kann K nicht angeordnet werden

oder: $0<1=1+0<1+1=-1 \Rightarrow 0<-1$ Widerspruch zu (O1),

denn $0>-1$ (ausführlich steht hier $0<1$ und $1<-1$)

Bem:Kein endlicher Körper kann angeordnet werden

(Beweisidee: $0<1<2<3...<-1$ Widerspruch)

b) Beweise: Ein Körper K ist genau dann ein angeordneter Körper, wenn eine Teilmenge $P \subset K$ existiert, so dass gilt:

(P1) Für jedes $x \in K$ gilt genau eine der Alternativen $x=0$, $x \in P$ oder $-x \in P$.

(P2) Aus $x,y \in P$ folgt $x+y \in P$

(P3) Aus $x,y \in P$ folgt $xy \in P$

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow$ $\exists$ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*

//(O1) $\forall$ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://

// a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie) //

*//**(RR<)**(400) 2.)a>b $\Leftrightarrow$ -a<-b, speziell a>0 $\Leftrightarrow$ -a<0//*

//siehe auch D1.2.1 andere Formulierung//

Bew: "$\Rightarrow$" K angeordnet $\Rightarrow$ (P1)...(P3) gilt

Def $P:=\{x \in K : x>0\}$ $\Rightarrow$ $P \subset K$ (Menge der postiven Elemente von K) $\Rightarrow$ ...Rechne P(1)...P(3) nach.

- Zu P(1): Sei $x \in K$ beliebig. Setze $a=x$ und $b=0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(O1)}$

  Es gilt genau eine der drei Aussagen:
  - $x<0$ oder • $0<x$ oder • $x=0$, d.h.
  - $-x>-0=0$ oder • $x>0$ oder • $x=0$, d.h.
  - $x=0$ oder • $x<0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{RR\,2.)} -x>0$ oder • $x>0$ d.h
  - $x=0$ oder • $-x>0 \in P$ oder • $x \in P$

*//(O3)a<b $\Rightarrow$ a+c < b+c $\forall$ c∈K a<b und 0<c $\Rightarrow$ a*c < b*c //*

//(O2)Aus a<b und b<c $\Rightarrow$ a<c (Transitivität) $\forall$ a,b,c∈K//

- Zu P(2): Seien $x,y \in P$, d.h. $x>0, y>0 \Rightarrow x=x+0 \underbrace{<}_{(O3),\,mit\,0<y} y+x=x+y$

  $\underbrace{\Rightarrow}_{(O2)}$ $0<x+y$, d.h. $x+y \in P$

*//**(RR<)**(400)(.)a,b>0 d.h. a>0 und b>0 $\Rightarrow$ ab>0 //*

// (..)a>0,b<0 $\Rightarrow$ ab<0, //

// (...) a<0 und b<0 $\Rightarrow$ ab>0//

- Zu (P3): Es seien $x,y \in P \Rightarrow 0<x$ und $0<y \Rightarrow 0*y<x*y \Rightarrow x*y \in P$

"$\Leftarrow$" Sei $P \subset K$ mit (P1)-(P3) erfüllt.

Definition Relation < auf K: durch $a<b :\Leftrightarrow b-a \in P$.

Rechne jetzt (O1)-(O3) nach:

(O1) (400)a<b oder b<a oder a=b (Trichotonie)

- Zu (O1): Seien $a,b \in K$ beliebig. Mit $x:=b-a$ folgt aus (P1): Es gilt genau eine der 3 folgenden Aussagen
  - $x=0$ oder • $x \in P$ oder • $\underbrace{-x}_{(b-a)} \in P$, d.h.
  - $b-a=0$ $(a=b)$ oder • $a<b$ oder • $a-b \in P$, d.h.
  - $\underbrace{a=b}_{b-a=0 (Bew\ Körperax)}$ oder • $a<b$ oder • $b<a$

  Nebenrechnung: $-(b-a)=a-b$, denn

  $-x=-(b+(-a))=-b-(-a)=-b+(-(-a))=-b+a=a+(-b)=a-b$

(O2)(400)Aus a<b und b<c ⇒ a<c
(A1)(300)(a⊕b)⊕c= a⊕(b⊕c) ∀ a,b,c∈K,
(A2)   a⊕0= a ∀ a∈K
(A3)   a⊕(-a)=0
(A4)   a⊕b = b⊕a ∀ a,b∈K

- Zu (O2):Seien a<b und b<c d.h.
  b-a∈P und c-b∈P(nach Def von <) ⇒ c-a=
  $\underbrace{(c-b)}_{=x:\in P}+\underbrace{(b-a)}_{=y\in P}\in P$ nach (P2) $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def} <}$ a<c
  ausführlicher: Klammern werden weggelassen
  wegen (A1), c-a $\underbrace{=}_{(A2)}$ c+0-a $\underbrace{=}_{(A3).(A4)}$ $\underbrace{c+(-b)}_{=c-b}$+b-a)

*//(O3)(400)(.)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, (..)a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*
// (403)(P3)Aus x,y∈P folgt xy∈P//

- Zu (O3):(.)Sei a<b und c∈K beliebig, d.h. b-a∈P ⇒
  (b+c)-(a+c) $\underbrace{=}_{A2,A3}$ b-a∈P $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Def} <}$ a+c<b+c
  (..)Sei a<b und c>0 d.h. b-a∈P und c-0∈P ⇒
  bc-ac $\underbrace{=}_{\text{Körperax,(D)und Rechenr.}}$ $\underbrace{(b-a)}_{\in P}\underbrace{c}_{\in P}$ ∈P(nach (P3) ⇒
  ac<bc
  ausführlich: bc-ac=bc+(-(ac))=bc+(-a)c=
  (b+(-a))c=(b-a)c)

c) Zeige, dass ein angeordneter Körper unendlich viele Elemente haben muss.

A1.2.6 Beweise $\frac{a}{1+a}\le\frac{b}{1+b}$ für 0≤a≤b , a,b∈R.

*//(O3)(400)a<b ⇒ a+c < b+c ∀ c∈K, a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c//*
Lös:Für a=0 oder a=b ist die Beh erfüllt

Es sei 0<a<b $\underbrace{\Rightarrow}_{(O3}$ a+ab $\underbrace{<}_{(O3}$ b+ab ⇒ a(1+b)<b(1+a) $\underbrace{\Rightarrow}_{1+b>0,\,1+a>0}$

$\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}>0$ $\underbrace{\Rightarrow}_{(O3}$ $a(1+b)\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}<b(1+a)\frac{1}{1+a}*\frac{1}{1+b}$ ⇒

$\frac{a}{1+a}<\frac{b}{1+b}$

A1.2.7 Seien a,b,c,d Elemente eines angeordneten Körpers. Bestimme alle $x\in K$, für die gilt:

a) *: $\frac{d}{b+c} < \frac{d}{x+c} \le \frac{d}{a+c}$ (0<a<b, 0<c, d beliebig)

Lös: 1. Fall d>0 $\Rightarrow d^{-1}>0$

$$\Leftrightarrow 0<\frac{1}{b+c}<\frac{1}{x+c}\le\frac{1}{a+c} \underbrace{\Leftrightarrow}_{b,c>0\Rightarrow b+c>0\Rightarrow \frac{1}{b+c}>0} a+c\le x+c<b+c \Leftrightarrow$$

$a \le x<b$ (*) $\Rightarrow a\le x<b$ (notwendig)

$a\le x<b \Rightarrow$ (*) hinreichend

2. Fall d=0 (*) $0<0\le 0$ nie erfüllt für $x\in K$.

3. Fall d<0

(*) $\Leftrightarrow \frac{1}{a+c}\le\frac{1}{x+c}<\frac{1}{b+c} \Rightarrow b<x\le a$ notwendig, nicht hinreichend, da a<b nie erfüllt.

b) Ist b,d>0 und $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, so gilt $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

Bew: Es ist b+d>0 und $\frac{1}{b},\frac{1}{d},\frac{1}{b+d}>0 \Rightarrow$

$\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d)<(a+c)b \Leftrightarrow ab+ad<ab+cb \Leftrightarrow ad<cb \Rightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ und

$\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d<(b+d)c \Leftrightarrow ad<bc \Leftrightarrow \frac{a}{b}<\frac{c}{d}$.

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, was nach Vor richtig ist. Also folgt die Beh.

c) *: $x^2+(a-b)x-ab\ge 0$ $(a,b\ge 0)$

Lös: * $\Leftrightarrow (x+a)(x-b)\ge 0 \Leftrightarrow$

- $[(x+a)\ge 0$ und $(x-b)\ge 0]$ oder • $[(x+a)\le 0$ und $(x-b)\le 0]$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$
- $(x\ge -a$ und $x\ge b)$ oder • $(x\le -a$ und $x\le b)$ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{0<a,b,-a<0<b}$ $x\ge b$ oder $x\le -a$

A1.2.8 Zeige: Für a<b<0 ist |a|>|b|>0

A1.2.9 Es seien a,b,c Elemente eines angeordneten Körpers K. Zeige:
a) aus a<b und b≤c folgt a<c

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O2) Aus a<b und b<c ⇒ a<c ∀ a,b,c∈K//

Bew: 1.Fall b=c, a<b=c d.h. a<c

2.Fall b≠c ⇒ b<c $\underbrace{\Rightarrow}_{a<b(O2)}$ a<c

b) $|a+b|=|a|+|b|$ gilt genau dann, wenn $a,b\geq 0$ oder $a,b\leq 0$.

Bew: “⇒„ Sei $|a+b|=|a|+|b|$..

Annahme ($a<0$ oder $b<0$) und ($a>0$ oder $b>0$) $\Rightarrow$

($a<0$ und $b>0$) oder ($a>0$ und $b<0$).

O.B.d.A.: $a<0$ und $b>0$ (sonst vertausche a und b)

$$-a+b \underset{\text{Def Betrag}}{=} |a|+|b|=|a+b|=\begin{cases} a+b\ \text{falls}\ a+b>0 \\ -(a+b),\ \text{falls}\ a+b<0 \end{cases} \Rightarrow$$

$-a=a$ oder $b=-b \Rightarrow 2a=0$ oder $2b=0 \underset{2\neq 0}{\Rightarrow}$

$\underbrace{a=0 \text{ oder } b=0}_{\text{angeordneter Körper}}$ Widerspruch, also Annahme falsch,

d.h. $a,b\geq 0$ oder $a,b\leq 0$

„⇐„ Sei $a,b\geq 0$ oder $a,b\leq 0$.

1.Fall: $a,b\geq 0 \Rightarrow a+b\geq 0 \Rightarrow |a+b| \underset{\text{Def}}{=} a+b=|a|+|b|$

2.Fall: $a,b\leq 0 \Rightarrow a+b\leq 0$

Bew: $-a\geq 0, -b\geq 0 \underset{\text{s 1.Fall}}{\Rightarrow} \underbrace{(-a)+(-b)}_{-(a+b)} \geq 0 \Rightarrow a+b\leq 0$

$$|a+b| \underset{(a+b)\leq 0}{=} -(a+b)=-a-b=(-a)+(-b)=|a|+|b|$$

Andere Formulierung:

Bew: „⇐„ Sei $a\geq 0$ und $b\geq 0$ dann gilt $|a|+|b|=\underbrace{a+b}_{\geq 0}=|a+b|$.

Wenn $a\leq 0$ und $b\leq 0$ dann $|a|+|b|=\underbrace{-a-b}_{\geq 0}=|-a-b|=|a+b|$.

“⇒„ $|x|^2=x^2$ da $x^2=(-x)^2$ (siehe auch c)

Sei $|a+b|=|a|+|b| \Rightarrow |a+b|^2=(|a|+|b|)^2=|a|^2+2\underbrace{|ab|}_{RR}+|b|^2 \Rightarrow$

$2ab=2|ab| \Rightarrow ab\geq 0$ d.h. ($a\geq 0$ und $b\geq 0$) oder wenn ($a\leq b$ und $b\leq 0$)

Hierbei wurde benutzt: $x^2=\begin{cases} x\cdot x \\ (-x)\cdot(-x) \end{cases}=|x||x|=|x|^2$

c) $a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn $|a|<|b|$

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
// (O2)Aus $a<b$ und $b<c \Rightarrow a<c \ \forall\ a,b,c\in K$//
// (O3)$a<b \Rightarrow a+c < b+c \ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$//

Bew: "⇒„Sei $a^2<b^2$.

1.Möglichkeit:

Annahme $|a|\geq|b| \Rightarrow \underbrace{|a|^2}_{a^2} = a^2=|a|\cdot|a| \underset{\text{mit (O3)}}{\geq} |a|\cdot|b| \geq \underbrace{|b||b|}_{|b|^2=b^2} = b^2 \underset{(O2)}{\Rightarrow}$

$a^2\geq b^2$ Widerspruch, also Annahme falsch d.h. $|a|<|b|$

*//**(RR<)**(400) 2.)$a>b \Leftrightarrow -a<-b$, speziell $a>0 \Leftrightarrow -a<0$//*
// 3.)(.)$a,b>0$ d.h. $a>0$ und $b>0 \Rightarrow ab>0$ //
// (..)$a>0,b<0 \Rightarrow ab<0$, //
// (...) $a<0$ und $b<0 \Rightarrow ab>0$//
*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf R:=<,Anordnungsaxiome://*
// (O3)$a<b \Rightarrow a+c < b+c \ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$ //

2.Möglichkeit:

$(b-a)(b+a)=b^2-a^2>0 \underset{RR\ 3.)}{\Rightarrow}$ $b-a>0$ und $b+a>0$ oder $b-a<0$ und $b+a<0 \Rightarrow$

$(b>a$ und $b>-a)$ oder $\underbrace{(b<a \text{ und } b<-a)}_{-b>-a \text{ und } -b>a} \Rightarrow$

$b>|a|$,insbesondere $b>0$, oder
$-b>|a|$,insbesondere $-b>0$, $\Rightarrow |b|>|a|$

„⇐„Sei $|a|<|b| \Rightarrow a^2=|a|^2=|a||a| \underset{\text{(O3) da } |a|<|b|}{\leq} |a||b| \underset{\text{(O3) da} |b|>0,\ |a|<|b|}{\leq}$

$|b||b|=|b|^2=b^2$ d.h. $a^2\leq|a||b|$ und $|a||b|<b^2 \underset{\text{Vgl Teil a}}{\Rightarrow} a^2<b^2$

Hierbei wurde benutzt:

$x^2=\begin{cases} x\cdot x \\ (-x)\cdot(-x)\end{cases}=|x||x|=|x|^2$ sowie

$x<y, 0\leq z \Rightarrow xz\leq yz$ (Bew:1. Fall:$z=0 \Rightarrow xz=0\leq0=yz$

2. Fall: $z\neq0$, d.h. $z>0 \underset{(O3)}{=} xz<yz \Rightarrow$

$xz\leq yz$)

d) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2\geq4ab$

*//D**1.1.1** (300/301)//*
//Menge min 2 Elemente: K //
// (K,⊕,⊗): ⇔ ∃ 2 Abbildungen ⊕: KxK→K und ⊗: KxK→K //
//(A1) $(a\oplus b)\oplus c= a\oplus(b\oplus c) \ \forall\ a,b,c\in K$//
*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O3)$a<b \Rightarrow a+c < b+c \ \forall\ c\in K$, $a<b$ und $0<c \Rightarrow a*c < b*c$ //

Bew: $(a+b)^2-4ab=(a^2+2ab+b^2)-4ab \underset{\text{Rechenr in K}}{=} a^2-2ab+b^2=(a^2+2a(-b)+(-b)^2)=$

$(a-b)^2\geq0$ (wg $x^2>0 \ \forall\ x\in K\setminus\{0\}$) $\underset{\text{A1...mit(O3)}}{\Rightarrow} (a+b)^2\geq4ab$

$0\leq(a-b)^2=a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 2ab\leq a^2+b^2 \Rightarrow 4ab\leq a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\leq2(a^2+b^2)$
weil $a^2+2ab+b^2\leq2a^2+2b^2 \Rightarrow 2ab\leq a^2+b^2 \Rightarrow 0\leq a^2-2ab+b^2 \Rightarrow 0\leq(a-b)^2$

Andere Formulierung für $(a+b)^2 \geq 4ab$:

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$. Die Aussage $(a-b)^2 \geq 0$ ist aber richtig (RR im Körper) und daher auch die äquivalente Aussage $(a+b)^2 \geq 4ab$

A1.2.10 Beweise: $\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ für $x,y \in \mathbb{R}$.

*//**A1.2.6** (404) $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$ für $0 \leq a \leq b$, $a,b \in R$.//*

Bew: $\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{\overbrace{|x+y|}^{a}}{1+\underbrace{|x+y|}_{a}} \underbrace{\leq}_{A1.2.6} \frac{\overbrace{|x|+|y|}^{b}}{1+\underbrace{|x|+|y|}_{b}} =$

$$\frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

A1.2.11 $(a_n) \in \mathbb{R}$, $a_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} a \in \mathbb{R}$, $a_n \leq c \in \mathbb{R}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige $a \leq c$

Bew: Sei $\varepsilon>0$, $N \in \mathbb{N}$: $|a_n-a|<\varepsilon$ $\forall$ $n \geq N \Rightarrow a_n-\varepsilon<a<a_n+\varepsilon<c+\varepsilon$

Annahme $a>c \Rightarrow a>c$, $a<c+\varepsilon \Rightarrow 0<a-c<\varepsilon$ $\forall$ $\varepsilon>0$

$\varepsilon := \frac{a-c}{2} >0 \Rightarrow 0<a-c< \frac{a-c}{2}$ …...Widerspruch!

b) $a_n := 1-\frac{1}{n} <1=c$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$.

Lös: $a_n \underset{n\to\infty}{\rightleftarrows} :a \Rightarrow a=c$