A1.5.14 Zeige:Eine nach oben beschränkte Teilmenge M der natürlichen Zahlen ist endlich

A1.5.15 Zeige:Ist $f: \mathbb{N} \to A$ surjektiv, so ist A höchstens abzählbar.
*Lös:$f: \mathbb{N} \to A$ surjektiv $\Rightarrow$ $\forall$ $a \in A$ existiert mindestens ein $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$
1.Fall:$\forall$ $a \in A$ existiert genau ein $n \in \mathbb{N}: n \mapsto f(n)=a \Rightarrow$ f bij $\Rightarrow$ A abzählbar ∞.
2.Fall:$\exists$ $a_{n+1} \in A$ mit $g:\{k_{n+1}, k_{n+1}+1, \ldots k_{n+1}+\ell_{n+1}\} \to a_{n+1}$???, $n \in \mathbb{N}_0$, $k, \ell \in \mathbb{N}$, $n, \ell, k \leq \infty$, k, $k_{n+1}=k_n+\ell_n+1$??? $\Rightarrow$ $n \mapsto f(n)=a_n$, $n \in \mathbb{N}, n \leq \infty$ $\Rightarrow$ abzählbar $\leq \infty$ $\Rightarrow$ höchstens abzählbar.

A1.5.16 Es sei F die Menge aller 0-1 Folgen aus $\mathbb{R}$, d.h. $F=\left\{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \{0,1\} \ \forall \ n \in \mathbb{N}\right\}$. Zeige, dass F überabzählbar ist.
Lös: Annahme F ist nicht überabzählbar, d.h. F ist höchstens abzählbar.

$|F|=\infty$, denn $\exists$ $(\delta_{nm})_{n=1}^{\infty} \in F$ $\forall$ $m \in \mathbb{N}$, wobei $\delta_{nm}=\begin{cases} 0 \text{ falls } n = m \\ 1 \text{ falls } n \neq m \end{cases} \underbrace{\Rightarrow}_{|F|=\infty}$

F ist abzählbar, d.h. lässt sich in folgender Form

schreiben: $F=\{\overbrace{(a_n)_{n=1}^{\infty}}^{a^{(m)}} : m \in \mathbb{N}\}$

Sei $a^{(m)}=:(a_{mn})_{n=1}^{\infty}$, $m \in \mathbb{N}$

Definiere $a_n=\begin{cases} 0 \text{ falls } a_{mn}=1 \\ 1 \text{ falls } a_{mn}=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $a_n \neq a_{mn}$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ und $a:=(a_{mn})_{n=1}^{\infty} \underbrace{\Rightarrow}_{a_n \in \{0,1\} \ \forall \ n \in \mathbb{N}}$

$a \in F$ $\Rightarrow$ $\exists$ $m_0 \in \mathbb{N}$ $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}=a^{(m_0)}=(a_{n,m_0})_{n=1}^{\infty}$, insbesondere $a_{m_0}=a_{m_0 n_0}$ für ein $m_0 \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ $\exists$ Widerspruch zur Def von a_{m_0} $\Rightarrow$ doch überabzählbar

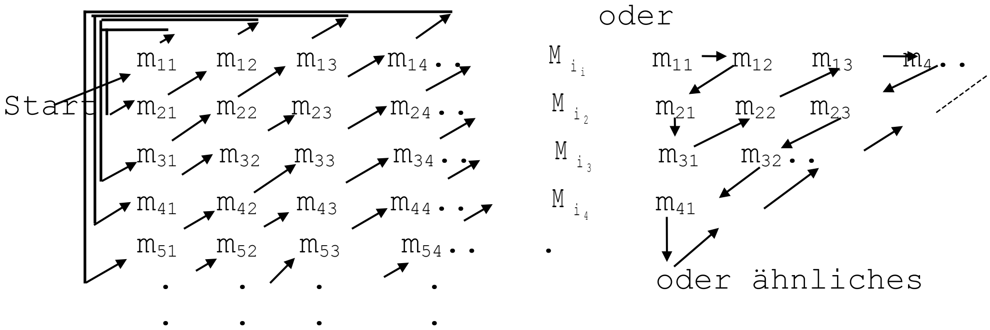
Bem:Wie wir später sehen werden, folgt aus obigem Satz, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebig kleinen Intervall [a,b] mit a<b immer überabzählbar ist. Da ein solches Intervall nur abzählbar viele rationale Zahlen enthält, ist sogar die Menge der irrationalen Zahlen in [a,b] überabzählbar.

A1.5.17 Zeige:Eine beschränkte Teilmenge M der ganzen Zahlen ist endlich
*Lös:Sei $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{Z}: \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \in \mathbb{N}\}$.
$M=P \cup \{0\} \cup L=\{m_+ \in \mathbb{N} \mid m_+=f(n) \leq \overline{m}\} \cup \{0\} \cup \{-m_- \in \mathbb{N} \mid m_-=f(n) \leq \underline{m}\} \subset \mathbb{Z}$
$\Rightarrow$ M durch $\overline{m}$ und $\underline{m}$ beschränkt $\Rightarrow$ $\exists$ Abb $\{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq \overline{m}\} \to P$
mit $n \mapsto f(n)=m_+$ $\forall$ $n \leq m_+$ d.h. bijektiv $\Rightarrow$ $|1,2,...n| \leq \overline{m}$ $\Rightarrow$ $|P|=k \leq \overline{m}$,
$f(n)=f(k+1)=0$ bijektiv $\Rightarrow$
$\exists$ Abb $\{n \in \mathbb{N} \mid k+1 \leq n \leq \overline{m}\} \to L$ mit $n \mapsto f(n)=m_-$ $\forall$ $n \leq m_-$ d.h. bijektiv $\Rightarrow$
$|k+2, k+3, ..., k+n| \leq \underline{m}$ $\Rightarrow$
$\exists$ bij Abb $f:\{1,2,...(k+n) \leq (\overline{m}+1+\underline{m})\} \to P \cup \{0\} \cup L=M$ mit $|M| \leq \overline{m}+1+\underline{m}) \leq \infty$

A1.5.18 Es seien $a,b \in \mathbb{R}$ mit a<b und $f:(a,b] \to \mathbb{R}$ injektiv. Zeige, dass $f((a,b])$ überabzählbar ist.

A1.5.19 Zeige:Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. ist I eine abzählbare Indexmenge und M_i abzählbar für alle $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ abzählbar.
Bew:I abzählbar $\Rightarrow$ I läßt sich in der Form $I=\{i_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ schreiben (mit paarweise verschiedenen i_ν). M_{i_ν} abzählbar $\Rightarrow$

$M_{i_\nu}=\{m_{\nu\mu}:\mu\in\mathbb{N}\}$ (mit $m_{\nu\mu_1}\neq m_{\nu\mu_2}\ \forall\ \mu_1\neq\mu_2$), $\forall\ \nu\in\mathbb{N}$. (jedes M_i, $i\in I$ lässt sich als M_{i_ν}, $\nu\in\mathbb{N}$ schreiben). Betrachte folgendes Schema:



Durchlaufe obiges Schema in Pfeilrichtung und ordne den $m_{\nu\mu}$ fortlaufend die Nummer 1,2,3..zu, wobei man schon aufgetretene $m_{\nu\mu}$'s überspringt,

d.h. $1\mapsto m_{11}$, $2\mapsto \begin{cases} m_{21}, \text{ falls } m_{21}\neq m_{11} \\ m_{12}, \text{ falls } m_{21}=m_{11}\end{cases}$ (beachte: $m_{12}\neq m_{11}$, da $m_{11},m_{12}\in M_{i1}$) usw

Man beachte, daß dieses Verfahren nicht abbricht, da $M_{i_\nu}\subset\bigcup_{i\in I} M_i$ und M_{i_ν} eine unendliche Menge ist.

Dadurch erhält man eine bijektive Abb $\mathbb{N}\to\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} M_{i_\nu}=\bigcup_{i\in I} M_i$, also ist $\bigcup_{i\in I} M_i$ abzählbar.

Bem: Ein exakter mathematischer Beweis obiger Aussage ist relativ aufwendig! Man benötigt z.B. folgende Aussagen:

(.) $f:X\to Y$ surjektiv, wobei X abzählbar $\Rightarrow$ Y höchstens abzählbar

(..) $\exists$ bijektive Abb $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (z.B. g^{-1}, wobei $g:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$
$g(n,m):=1/2(n+m)(n+m+1)+m$)
Es reicht eine surjektive Abb. $\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ z.B. die linksinverse der injektiven Abb $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $(n,m)\mapsto 2^n3^m$

A1.5.20 Geg sei die Menge aller schließlich konstanten Folgen mit rationalen Gliedern, d.h.
$M=\{f: \mathbb{N}\to \mathbb{Q}:$ Es existiert ein n_0 mit $f(n)=f(n_0)\ \forall\ n\geq n_0\}$.
Zeige, dass M abzählbar ist.

Bew: Def $M_{q,n_0}=\{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Q}$ mit $f(n)=q\ \forall\ n\geq n_0\}\ \Rightarrow\ M=\bigcup_{q\in Q}^{\infty} M_{q,n_0}$.

Wir zeigen: M_{q,n_0} ist abzählbar $\forall\ q\in\mathbb{Q},\ n_0\in\mathbb{N}_0$, insbesondere
$M_{q,1}=\{f: \mathbb{N}\to \mathbb{Q}: f(n)=q\ \forall\ n\in \mathbb{N}\}\ \Rightarrow\ |\ M_{q,1}|=1$.
Wenn $n_0\geq 1$, dann ist $M_{q,n_0}=\{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Q}: f(n)=q\ \forall\ n\geq n_0\}=$
$\{(f(1),f(2),...f(n_{0-1}),q,q,q,...):f(1)....f(n_{0-1})\in\mathbb{Q}\}$,
Mit anderen Worten:
$T: M_{q,n_0}\to Q^{n_0-1}, T(f)=(f(1),....f(n_{0-1}))$ ist bijektiv und $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar
$\forall\ n\in \mathbb{N}$ ($\mathbb{Q}^2=\mathbb{Q}x\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ \mathbb{Q}^n=\mathbb{Q}^{n-1}x\mathbb{Q}$ ist abzählbar) $\Rightarrow\ M=\bigcup_{q\in Q}\ \bigcup_{n_0=1}^{\infty} M_{n,q_0}$ ist
abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

A1.5.21 Es seien $\forall\ m_1,m_2\in\mathbb{N}$ und $f:\{1,...,m_1\}\to\{1,...,m_2\}$ bijektiv.
Zeige: $m_1=m_2$. (Zur Erinnerung: $\{1,...,m\}:=\{n\in\mathbb{N}|1\le n\le m\}$)

*//**D0.2.5** (202)Bem 2.) $f:X\to Y$ & $g:Y\to Z$ bij $\Rightarrow$ $g\circ f:X\to Z$ bij und//*
// $(g\circ f)^{-1}:Z\to X:(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ //
*//**S1.5.2** /702/703) Rechenregeln in N: $\forall m,n\in\mathbb{N}$ gilt//*
//6.) $m>n \Rightarrow m\ge n+1 \not\Rightarrow \exists$ natürliche Zahl zwischen n und n+1//
// $(n\neq m \Rightarrow |n-m|\ge 1)$/

Bew: Wird durch Induktion nach $m_1\in\mathbb{N}$ bewiesen.

$A(m_1)$: $m_2\in\mathbb{N}$ und $f:\{1,...,m_1\}\to\{1,...,m_2\}$ bijektiv $\Rightarrow m_1=m_2$)

$m_1=1$: Sei $m_2\in\mathbb{N}$ und $f: \{1\}\to\{1,...,m_2\}$ bijektiv
$\forall\ n\in\{1,...,m_2\}$ gilt $:f(1)=n$, da f surjektiv,
(für $n\in\{1,...,m_2\}\ \exists\ k\in\{1\}$ mit $f(k)=n$, d.h. $f(1)=n$)
insbesondere $1=f(1)=m_2$ (da 1 und $m_2\in\{1,...,m_2\}$), also
$m_1=1=m_2$ d.h. A(1) ist wahr

$m_1 \underbrace{\mapsto}_{m_1\ge 1} m_1+1$: (Induktionsschluß: $A(m_1) \Rightarrow A(m_1+1)$)

Es sei $m_2\in\mathbb{N}$ und $f:\underbrace{\{1,...,m_1+1\}}_{=:M_1} \to \underbrace{\{1,...,m_2\}}_{=:M_2}$ bijektiv,

Z.z. $m_1+1=m_2$

$m_2\in M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{f\ \text{surjektiv}} \exists\ n_0\in M_1: f(n_0)=m_2 \Rightarrow$

$f\big|_{M_1\setminus\{n_0\}} : M_1\setminus\{n_0\}\to \underbrace{M_2\setminus\{m_2\}}_{=\{1,..,m_2-1\}}$ bijektiv (wie man leicht nachprüft)

(Bew: $M_2\setminus\{m_2\}=\{n\in\mathbb{N}: 1\le n\le m_2$ und $n\neq m_2\} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.2} \{n\in\mathbb{N}: 1\le n\le m_2-1\}=\{1,...,m_2-1\}$)

Definiere $g:M\setminus\{n_0\}\to\{1,..,m_1\}$ durch

$g(n)=\begin{cases} n, \text{falls } 1\le n\le n_0-1 \\ n-1, \text{falls } n_0+1\le n\le m_1 \end{cases}$ (beachte: g ist wohldefiniert, da $g(n)\in\{1,..,m_1\}\ \forall\ n\in M_1\setminus\{n_0\}$).

Dann ist g bijektiv, wie man leicht nachrechnet:

g surjektiv: Sei $m\in\{1,..,m_1\}$ bel..

Def $n:=\begin{cases} m, \text{falls } 1\le m\le n_0-1 \\ m+1, \text{falls } n_0\le m\le m_1 \end{cases}$ $\Rightarrow g(n)=m$ und $n\in M\setminus\{n_0\}$

g injektiv: Seien $g(n_1)=g(n_2) \Rightarrow n_1=n_2$ oder $n_1-1=n_2-1 \Rightarrow n_1=n_2$

$\Rightarrow g^{-1}:\{1,..,m_1\}\to M_1\setminus\{n_0\}$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{D0.2.5\ Bem2}$

$f\big|_{M\setminus\{n_0\}} \circ g^{-1}=\{1,..,m_1\}\to\{1,..,m_2-1\}$ bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\underbrace{\Rightarrow}_{IndHyp} m_1=m_2-1$

$\Rightarrow m_1+1=m_2$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & \ldots & n_0-1 & n_0 & n_0+1 & \ldots & m_1 & \xrightarrow{f} & 1\ 2\ ..\ m_2-1\ \ m_2 \\
g\downarrow\ \ g^{-1}\uparrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & 1 & 2 & & n_0-1 & n_0 & & m_1 & & \xrightarrow{f\big|_{M\setminus\{n_0\}}\circ g^{-1}} & 1\ 2\ ..\ m_2-1
\end{array}$$

*Einige eigene Ergänzungen und Änderungen. Fehlerfrei?

$m_1 \underset{m_1\geq 1}{\mapsto} m_1+1=m'_1$: (Induktionsschluß: $A(m_1) \Rightarrow A(m_1+1)$)

Es sei $m_2\in\mathbf{N}$ und $f: M'_1 := \underbrace{\{1,..,m_1+1\}}_{=:M'_1} \rightarrow \underbrace{\{1,...,m_2\}}_{=:M_2}$ bijektiv

Z.z. $m_1+1=m_2$

$m_2\in M_2 \underset{f\ \text{surjektiv}}{\Rightarrow} \exists\ n_0\in M'_1 : f(n_0)=m_2 \Rightarrow$

$f\big|_{M'_1\setminus\{n_0\}} : M'_1\setminus\{n_0\} \rightarrow \underbrace{M_2\setminus\{m_2\}}_{=\{1,..,m_2-1\}}$ bijektiv (wie man leicht nachprüft)

(Bew: $M_2\setminus\{m_2\}=\{n\in\mathbf{N}: 1\leq n\leq m_2$ und $n\neq m_2\} \underset{S1.5.2\,6.)}{\Rightarrow} \{n\in\mathbf{N}: 1\leq n\leq m_2-1\}=\{1,...,m_2-1\}$)

Definiere $g: M'_1\setminus\{n_0\}\rightarrow\{1,..,m_1\}$ durch

$$g(n)=\begin{cases} n, \text{falls } 1\leq n\leq n_0-1 \\ n-1, \text{falls } n_0+1\leq n\leq m_1 \end{cases}$$

(beachte: g ist wohldefiniert, da $g(n)\in\{1,..,m_1\}\ \forall\ n\in M'_1\setminus\{n_0\}$).

Dann ist g bijektiv, wie man leicht nachrechnet

g surjektiv: Sei $m\in\{1,..,m_1\}$ bel..

Def $n:=\begin{cases} m, \text{falls } 1\leq m\leq n_0-1 \\ m+1, \text{falls } n_0\leq m\leq m_1 \end{cases} \Rightarrow g(n)=m$ und $n\in M'_1\setminus\{n_0\}$

g injektiv: Seien $g(n_1)=g(n_2) \Rightarrow n_1=n_2$ oder $n_1-1=n_2-1 \Rightarrow n_1=n_2$

$\Rightarrow g^{-1}:\{1,..,m_1\}\rightarrow M_1\setminus\{n_0\}$ bijektiv $\underset{D0.2.5\ Bem2}{\Rightarrow}$

$f\big|_{M\setminus\{n_0\}} \circ g^{-1} = \{1,..,m_1\}\rightarrow\{1,..,m'_1\}\setminus n_0\rightarrow\{1,..,m_2-1\}$ bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\underset{IndHyp}{\Rightarrow} m_1=m_2-1$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & \ldots & n_0-1 & n_0 & n_0+1 & \ldots & m'_1=m_1+1 & \xrightarrow{f} & 1\ 2\ ..\ m_2-1\ \ m_2 \\
g\downarrow\ \ g^{-1}\uparrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & 1 & 2 & & n_0-1 & n_0 & & m_1 & & \xrightarrow{f\big|_{M\setminus\{n_0\}}\circ g^{-1}} & 1\ 2\ ..\ m_2-1
\end{array}$$

A1.5.22 Zeige, daß folgende zusätzliche Rechenregeln gelten

a) $\forall\ x\in\mathbb{R}: -\infty+x=-\infty$

b) $\forall\ x\in\mathbb{R}_+: x(-\infty)=-\infty, (-x)\infty=-\infty, (-x)(-\infty)=\infty$

c) $-\infty+(-\infty)=-\infty, (-\infty)\infty=-\infty, (-\infty)(-\infty)=\infty$

A1.5.23 Zeige, dass es nicht möglich ist, die Ausdrücke $\infty+(-\infty)$ und $0*\infty$ so zu definieren, daß $\overline{R}$ zu einem Körper wird.

A1.5.24 Bestimme,falls existent, sup M, max M, inf M, und min M für folgende Mengen:

a) $M=\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}: n,m\in\mathbb{N}\}$ b) $M=\{x^2-10x-24: x\in(1,3]\}$ c) $M=[1,\sqrt{2}]\ (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$.

A1.5.25 Zeige: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0: 1/n<\varepsilon$

A1.5.26 Zeige: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0: (n^2-5)^{-1}<\varepsilon$

A1.5.27 Zeige:Ist $z\in\mathbb{C}$ und $|z|\leq 1/n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, so folgt $z=0$

A1.5.28 Zeige: $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper.

A1.5.29 Zeige: Die Menge der rationalen Zahlen r mit $0<r^2\leq 2$ ist nicht leer, nach oben beschränkt und besitzt (in $\mathbb{Q}$) kein Supremum.
Schließe hieraus:

a) Der Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

b) Es gibt mindestens eine positive irrationale Zahl.

A1.5.30 Zeige: Jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ enthält unendlich viele rationale, aber auch irrationale Zahlen.

A1.5.31 Finde die Dual- und die Hexadezimaldarstellunge(d.h. die g-adischen Darstellungen mit g=2 und g=16) der Zahlen n=24, n=123, n=315 . Benutze dabei für g=16 die Bezeichnungen A,B,C,D,E,F für die Ziffern 10,11,12,13,14,15.

Lös:g=2,

$g^0=1, g^1=2, g^2=4, g^3=8, g^4=16, g^5=32, g^6=64, g^7=128, g^8=256$

n=24:24:16=1R8, 8:8=1R0

$=1*16+1*8+0*4+0*2+0*1 \Rightarrow 11000_2$.

n=123:123:64=$\underline{1}$R59:32=$\underline{1}$R27:16=$\underline{1}$R11:8=$\underline{1}$R3:2=$\underline{1}$R$\underline{1}$

$=1*64+1*32+1*16+1*8+0*4+1*2+1*2^0 \Rightarrow 1111011_2$.

n=315:315:2=157R1 $\Rightarrow z_0=1$	9:2=4R1 $\Rightarrow z_5=1$
157:2=78R1 $\Rightarrow z_1=1$	4:2=2R0 $\Rightarrow z_6=0$
78=2=39R0 $\Rightarrow z_2=0$	2:2=1R0 $\Rightarrow z_7=0$
39:2=19R1 $\Rightarrow z_3=1$	1<2 $\Rightarrow z_8=1$
19:2=9R1 $\Rightarrow z_4=1$	

$=100111011_2$.

g=16,

n=24: 24:16=1R8 $\Rightarrow 18_{16}$.

n=315:315:16=19R$\underline{11}$ $\Rightarrow z_0=B$

19:16= $\underline{1}$R$\underline{3}$$\Rightarrow$ $z_1=3$

$=13B_{16}$.

*Andere Formulierung:

g=2 $z_{k_2} \in \{0,1\}$, $p \in \mathbf{N}_0$, $z_{k_{16}} \in \{0,1,...9A,B,...,E,F\}$,

$n=z_0+z_1g+...z_pg^p$

$24=2^? \Rightarrow 2^4+\underbrace{\Delta}_{8=2^3}=0+0*2^1+0*2^2+1*2^3+1*2^4=11000$ (binär)

$=16^? \Rightarrow 16^1+8=8+1*16=18$ (hex)

$123=2^? \Rightarrow \underbrace{64}_{2^6}+\overbrace{\underbrace{32}_{2^5}+\overbrace{\underbrace{16}_{2^4}+\overbrace{\underbrace{8}_{2^3}+\overbrace{\underbrace{2}_{2^1}+\underbrace{1}_{2^0}}^{3}}^{11}}^{27}}^{59} =1+1*2^1+1*2^3+1*2^4+1*2^5+1*2^6=111111$ (bin)

$123=16^? \Rightarrow \frac{7*16}{112+11}=B+7*16=1B$ (hex)

A1.5.32 Es seien $a,b \in \mathbf{R}$ mit $a<b$ und $f:(a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ injektiv. Zeige, daß $f((a,b])$ überabzählbar ist.

A1.5.33 Untersuche, welche der oben eingeführten Intervalle nach oben (unten) beschränkt sind

A1.5.34 Bestimme,falls existent, sup(inf), max(min) der oben eingeführten Intervalle.

A1.5.35

a) $A \subset B$, $\exists$ min A und min B $\Rightarrow$ min A$\geq$min B

Bew: Bspskizze: [[ )] a=min A: $a \in A$ & $A \subset B \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \geq \min B$

b) $A \subset B$, $\exists$ inf A & inf B $\Rightarrow$ inf A$\geq$inf B

Bew: a:=inf A, B:=inf B $\Rightarrow b \leq x \;\forall\; x \in B$ $\;b \leq x \forall x \in B \underset{A \subset B}{\Rightarrow} b \leq x \forall x \in A \Rightarrow$

b untere Schranke von A $\Rightarrow$ $b \leq a$

c) $\exists$ max A und max B $\Rightarrow$ $\exists$ max $(A\cup B)$ & max $\Rightarrow$ $\max(A\cup B)=\max\{\max A, \max B\}$

Bew: Sei $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\leq \max A \wedge x\leq \max B \Rightarrow$

$x\leq\max\{\max A,\max B\}\ \forall\ x\in A\cup B$, da $\max\{\max A, \max B\}\in A\cup B$

ist $\max\{\max A, \max B\}=\max(A\cup B)$

A1.5.36 Max, Min, Sup, Inf?

a) $A=\bigcup_{n\in N}[0,\frac{1}{n}]$

Lös: $\frac{1}{m}\underset{m>n}{\lneq}\frac{1}{n} \Rightarrow [0,\frac{1}{m}]\subset[0,\frac{1}{n}] \Rightarrow [0,\frac{1}{n}]\subset[0,\frac{1}{1}]=[0,1]\ \forall\ n \Rightarrow A=[0,1]$

0$\in A$ & $\forall\ x\in A$: $x\in[0,1] \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow \min A=0$

$0\leq x\ \forall\ x\in A \Rightarrow \inf A=0$

1$\in A$ & $\forall\ x\in A$: $x\in[0,1] \Rightarrow 0\ x\leq 1 \Rightarrow \max A=1$

$x\leq 1\ \forall\ x\in A \Rightarrow \sup A=1$

b) $B=\bigcap_{n\in N}[0,\frac{1}{n}]$

Lös: $0\in[0,\frac{1}{n}] \Rightarrow 0\in B\ \forall\ n$

- $x<0$: $x\notin[0,\frac{1}{1}] \Rightarrow x\notin B$

•• $x>0$: $\underset{N\ unbeschränkt}{\Rightarrow}\ \exists\ n\in\mathbf{N}$: $n>x^{-1} \Rightarrow x>\frac{1}{n} \Rightarrow \exists\ n\in\mathbf{N}$: $x\notin[0,\frac{1}{n}] \Rightarrow x\notin B$

• & •• $\Rightarrow B=\{0\}$, da $x>0$ oder $x<0$ oder $x=0$ in $\mathbf{R} \Rightarrow$

min B=inf B=max b=sup B

c) $C=\bigcap_{n\in N}(0,\frac{1}{n})$

Lös: $(0,\frac{1}{n})\subseteq[0,\frac{1}{n}]\ \forall\ n\in\mathbf{N} \Rightarrow C\subset B=\{0\}$

$0\notin(0,\frac{1}{n}) \Rightarrow 0\notin C \Rightarrow C=\emptyset \Rightarrow$

$\forall\ x\in\mathbf{R}$: x ist obere Schranke von C, x-1 ist ebenfalls obere Schranke von C

$\Rightarrow \nexists\ \bar{s}$: $\bar{s}$ kleinste obere Schranke von C $\Rightarrow$

kein sup, analog kein inf $\Rightarrow$ kein max, kein min

d) $D=\bigcap_{n\in N}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

//**S1.5.18**(763) Intervallschachtelungsprozess

// Vor:Seien $I_n=[a_n,b_n]$, $a_n\leq b_n$ mit $I_{n+1}\subset I_n$, $\forall\ n\in\mathbf{N}$

// Beh:$\exists$ mindestens ein $x\in\mathbf{R}$: $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$, d.h. $a_n\leq x\leq b_n\ \forall\ n\in\mathbf{N}$

Lös: D ist Intervallschachtelung $\underset{S1.5.18}{\Rightarrow} |D|=1 \underset{B}{\Rightarrow} D=\{0\} \Rightarrow$

supD=inf D=max D=min D=0