A1.7.1

a) Berechne für $n \in \mathbb{N}$ die Summen • $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k}$ und •• $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j^2}{k+1}$

Lös: • $\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=j}^{n} \frac{j}{k} \underset{1\le j\le k\le n}{=} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} j \underset{\text{Bsp 2.)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)}{2} =$

$\frac{1}{2}(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1) = \frac{1}{2}(\frac{n(n+1)}{2} + n) = \frac{n}{4}(n+1+2) = \frac{n(n+3)}{4}$

•• $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=1}^{k} j^2 \underset{\text{Bsp 3.)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(2k+1)}{(k+1)6} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k =$
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{18} + \frac{n(n+1)}{12} = \frac{n(n+1)}{36}(4n+2+3) = \frac{n(n+1)(4n+5)}{36}$

b) Beweise: $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^3}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$, [ ]: Das größte Ganze

Bew: Wenn k gerade ⇒ k^3 gerade ⇒ $\frac{k^3}{2} \in \mathbb{Z}$, d.h.

Wenn k ungerade ⇒ k^3 ungerade ⇒ $\frac{k^3}{2} - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, d.h. $\left[\frac{k^3}{2}\right] = \frac{k^3}{2} - \frac{1}{2}$.

Unter den natürlichen Zahlen 1,2,...,n sind $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ ungerade

Zahlen ⇒ $\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{k^3}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{2} - \left[\frac{n+1}{2}\right]\frac{1}{2} \underset{\text{Bsp 4.)}}{=} \frac{1}{2}\left(\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$

A1.7.2 Zeige:

a) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Lös: Teleskopsumme $\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m \quad \forall\ n+1 \ge m$ (d.h. auch n+1=m !) ⇒

$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)} = \sum_{\nu=1}^{n} (1/\nu - \frac{1}{\nu+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$ für $n+1 \ge 1$, d.h. für $n \ge 0$, $n \in \mathbb{N}_0$

Genauer: $= \sum_{\nu=1}^{n} (\underbrace{-\frac{1}{\nu+1}}_{a_{k+1}} - (\underbrace{-\frac{1}{\nu}}_{a_k})) = a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{n+1} - (-\frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n+1}$

b) $\prod_{\nu=1}^{n} (1+1/\nu) = n+1 \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

Lös: Teleskopprodukt $\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$ für $n+1 \ge m$, $a_k \ne 0$ für $m \le k \le n$

Bew anlog Teleskopsumme, d.h. Induktion

⇒ $\prod_{\nu=1}^{n} (1+1/\nu) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\nu+1}{\nu} = \frac{n+1}{1} = n+1$ für $n+1 \ge 1$, d.h. $n \in \mathbb{N}$

c) $\prod_{\nu=0}^{n}(1+x^{2^\nu})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$ und $\forall\ x\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$

(oder $\prod_{\nu=1}^{n}(1+x^{2^\nu})=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^2}$ oder $\prod_{\nu=1}^{n}(1+x^{2^\nu})=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$ o.ä.)

*//**D1.5.2** (709) K:* $\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 1, \text{falls } n < m \\ a_m, \text{falls } n = m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n, \text{falls } m+1 \geq n \end{cases}$

Bew:Induktion nach n, Induktionsanfang

$$n=o:\quad \prod_{\nu=0}^{0}(1+x^{2^\nu})=1+x^{2^0} \underset{\text{D1.5.2}}{=} 1+x^1=1+x=\frac{1-x^2}{1-x}=\frac{1-x^{2^{0+1}}}{1-x}\quad \forall\ x\neq 1$$

$$n\underset{n\geq 0}{\mapsto} n+1: \prod_{\nu=0}^{n+1}(1+x^{2^\nu})=[\underbrace{\prod_{\nu=0}^{n}(1+x^{2^\nu})}_{\text{Ind Hyp}}](1+x^{2^{n+1}}) \underset{\text{IndHyp}}{=} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}(1+x^{2^{n+1}})=$$

$$\frac{1-(x^{2^{n+1}})^2}{1-x}=\frac{1-x^{2\cdot 2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1-x^{2^{(n+1)+1}}}{1-x}\quad \forall\ x\neq 1$$

A1.7.3 Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a>b>0$ sowie $n\in\mathbb{N}$ gegeben.

Zeige, daß dann $na^{n-1}>\frac{a^n-b^n}{a-b}>nb^{n-1}$ gilt.

*//**S1.7.2** (903)a,b∈C, n∈N₀: 2.)* $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$ *//*

Lös: $\frac{a^n-b^n}{a-b}=\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\leq\sum_{k=0}^{n-1} a^k a^{n-1-k}=a^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1=na^{n-1}$ und

$\frac{a^n-b^n}{a-b}=\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\geq\sum_{k=0}^{n-1} b^k b^{n-1-k}=b^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} 1=nb^{n-1}$.

A1.7.4 Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei definiert durch

$a_1=1$ und $a_{n+1}=\dfrac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}$ für $n\in\mathbb{N}$. Bestimme eine explizite Darstellung von a_n.

Lös: $a_1=1$, $a_2=5/8$, $a_3=15/32$, $a_4=51/128$, $a_5=187/512$

$\sqrt{1+24a_n}$ $=5$, 4, $7/2$, $13/4$, $25/8$

Beobachtung: $2^n\sqrt{1+24a_n}=b_n$ ist ganzzahlig. Dann gilt

$b_1=10$ und für $n\in\mathbb{N}$

$$b_{n+1}=2^{n+1}\sqrt{1+24a_{n+1}}=2^{n+1}\sqrt{1+\frac{3}{2}\left(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}\right)}=$$

$$2^{n+1}\sqrt{\frac{2+3+12a_n+3\sqrt{1+24a_n}}{2}}=2^{n+1}\sqrt{\frac{5+12a_n+3*2^{-n}b_n}{2}}=$$

$$2^{n+1}\sqrt{\frac{9+(1+24a_n)+6*2^{-n}b_n}{4}}=2^n\sqrt{9+\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2+6*2^{-n}b_n}=$$

$$2^n\sqrt{\left(\frac{b_n}{2^n}+3\right)^2}=2^n\left(\frac{b_n}{2^n}+3\right)=b_n+3*2^n \Rightarrow b_{n+1}-b_n=3*2^n \Rightarrow$$

$$b_n=\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)}_{\text{Telesks:}\,b_n-b_1}+\underbrace{10}_{b_1}=\sum_{k=1}^{n-1}3*2^k+10=6\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+10\underset{\nu=k-1}{=}6\sum_{\nu=0}^{n-2}2^{\nu}+10=6\,\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+10=$$

$3*2^n+4$ für $n\in\mathbb{N}$.

$$1+24a_n=\left(\frac{b_n}{2^n}\right)^2=\left(\frac{3*2^n+4}{2^n}\right)^2=(3+2^2 2^{-n})^2=(3+2^{2-n})^2.$$

$$a_n=\frac{(3+2^{2-n})^2-1}{24} \text{ für } n\in\mathbb{N}$$

A1.7.5

a) Es seien $n\in\mathbb{N}$ und $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Zeige $\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^2\le n\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2$.

Wann genau gilt Gleichheit?

b) Zeige: $\sum_{\nu=1}^{n}\dfrac{1}{\nu^3}<2\quad\forall\ n\in\mathbb{N}$.

A1.7.6

Berechne $\binom{1/2}{5}$ und $\binom{i-2}{3}$

Lös: $$\frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{5!}=\frac{1*7}{2^5*2*4}=\frac{7}{2^8}=\frac{7}{256}$$

$$\frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{3!}=\frac{5}{6}(5-3i)$$

A1.7.7 Zeige für $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{C}$, dass $\binom{\alpha}{n}=0 \Leftrightarrow \alpha\in\mathbb{N}_0$ und $n>\alpha$

Lös: $$\frac{\overbrace{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}^{1\ \text{Faktor}\ 0}}{n!}$$

A1.7.8 Zeige

a) $\sum_{\nu=k}^{n} \binom{\nu}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ $\forall$ k,n$\in$N mit n$\geq$k

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$; n,m,k$\in N_0$, j$\in$N 1.)* $\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}$ *//*

Bew: Induktion nach n bei festem k$\in$N

$$n=k: \quad \sum_{\nu=k}^{k}\binom{\nu}{k}=\binom{k}{k}=1=\binom{k+1}{k+1}$$

$$n \underset{n\geq k}{\mapsto} n+1: \sum_{\nu=k}^{n+1}\binom{\nu}{k} = \left[\sum_{\nu=k}^{n}\binom{\nu}{k}\right]+\binom{n+1}{k} \underset{\text{IndHyp}}{=} \binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k} \underset{S1.7.4\ 1.)}{=} \binom{n+2}{k+1} = \binom{(n+1)+1}{k+1}$$

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, Hinweis: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

$$\text{Bew: } \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k \underset{\text{Binomialsatz}}{=} (x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n \underset{\text{Binomialsatz}}{=} \Big[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{a_k}x^k)\Big]\Big[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{b_k}x^k)\Big] \underset{A1.9.2}{=}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}, \quad \sum_{k=0}^{2n}\Big[\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}x^k \ \forall\ x\in C \underset{S1.7.4}{\Rightarrow} \binom{2n}{k}=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu} \ \forall$$

k=0,1,…2n $\underset{k=n}{\Rightarrow}$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\underbrace{\binom{n}{n-\nu}}_{\underset{S1.7.4\,3.)}{=}\binom{n}{\nu}}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}^2$$

A1.7.9 Zeige für p,q,$\nu\in N_0$ die Formel $\binom{p+q}{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}\binom{q}{\nu-j}$.

(siehe auch A1.9.8 (1107))

Lös: $\forall$ x$\in$R gilt $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$ und

$$(1+x)^p(1+x)^q=\left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j\right]\left[\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}x^k\right]=(1+x)^{p+q}=\left[\sum_{\nu=0}^{p+q}\binom{p+q}{\nu}x^\nu\right]$$

oBdA p>q

$$\left(\binom{p}{0}x^0+\binom{p}{1}x^1+\binom{p}{2}x^2+\binom{p}{3}x^3+..\binom{p}{p}x^p\right)+\left(\binom{q}{0}x^0+\binom{q}{1}x^1+\binom{q}{2}x^2+\binom{q}{3}x^3+\dots\binom{q}{q}x^q\right)=$$

$$\binom{p}{0}\binom{q}{0}x^0+\binom{p}{0}\binom{q}{1-0}x^1+\binom{p}{0}\binom{q}{2-0}x^2+\binom{p}{0}\binom{q}{3}x^3+\dots \quad \binom{p}{0}\binom{q}{q}x^q+$$

$$\binom{p}{1}\binom{q}{1-1}x^1+\binom{p}{1}\binom{q}{2-1}x^2+\binom{p}{1}\binom{q}{2}x^3+\binom{p}{1}\binom{q}{3}x^4+\dots \quad \binom{p}{1}\binom{q}{q-1}x^q+\binom{p}{1}\binom{q}{q}x^{q+1}+$$

$$\binom{p}{2}\binom{q}{2-2}x^2+\binom{p}{2}\binom{q}{1}x^3+\binom{p}{2}\binom{q}{2}x^4\dots \quad +\binom{p}{2}\binom{q}{q}$$

$x^{q+2}+\dots$

… … …

$$\binom{p}{p}\binom{q}{q}x^{q+p}$$

$=\sum_{\nu=0}^{p+q}x^\nu\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}\binom{q}{\nu-j}$ und Koeffizientenvergl.

A1.7.10 Zeige folgende Idenditäten für Binominalkoeffizienten:

a) Folgere aus $\binom{\alpha}{k}+\binom{\alpha}{k-1}=\binom{\alpha+1}{k}$ für $\alpha\in\mathbb{C}$ und $k\in\mathbb{N}$, dass $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}_0$ $\forall\ n,m\in\mathbb{N}_0$.

Lös: Z.z. $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}_0\ \forall\ n,m\in\mathbb{N}_0$. Es gilt $\binom{\alpha}{0}=1\ \forall\ \alpha\in\mathbb{C}$, $\binom{n}{0}=1\in\mathbb{N}_0\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$,

$n<m$: $\binom{n}{m}=\dfrac{n(n-1)(n-2)..(n-m+1))(n-n)(n-n-1)...(n-m+1}{m!}=$

$0\in\mathbb{N}_0$

Induktion über n

Induktionsanfang n=0: $\binom{0}{m}=0\in\mathbb{N}_0\ \forall\ m>0$, $\binom{0}{0}=1\in\mathbb{N}$ und $\binom{0}{m}\in\mathbb{N}_0\ \forall\ m\in\mathbb{N}_0$.

Induktionshypothese : $\binom{n}{m}\in\mathbb{N}_0\ \forall\ m\in\mathbb{N}_0$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$.

Induktionsschritt $n\to n+1$: Z.z. $\binom{n+1}{m}\in\mathbb{N}_0\ \forall\ m\in\mathbb{N}_0$.

1.Fall: $m=0\Rightarrow\binom{n+1}{0}=1\in\mathbb{N}_0$.

2.Fall: $m>0\Rightarrow\binom{n+1}{m}=\underbrace{\binom{n}{m}}_{\in\mathbb{N}_0}+\underbrace{\binom{n}{m-1}}_{IH:\in\mathbb{N}_0}\in\mathbb{N}_0\Rightarrow$ Beh.

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k=0\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Bew: $=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(1)^{n-k}=(-1+1)^n=0^n=0$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\binom{n+1}{2}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Bew: Induktionsanfang n=1 : $(-1)^1 1^2=-1$, $(-1)^1\binom{2}{2}=-1$

Induktionshypothese : $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\binom{n+1}{2}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n\to n+1$: Z.z. $\sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2=(-1)^{n+1}\binom{n+2}{2}$.

$\sum\limits_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k k^2+(-1)^{n+1}(n+1)^2\underset{IndH}{=}$

$(-1)^n\binom{n+1}{2}+(-1)^{n+1}(n+1)^2=$

$(-1)^{n+1}(-\binom{n+1}{2}+(n+1)^2)=(-1)^{n+1}\binom{n+2}{2}$

NR: $(n+1)^2-\binom{n+1}{2}=n^2+2n+1-\dfrac{(n+1)n}{2!}=$

$\dfrac{2n^2+4n+2-n^2-n}{2}=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=\binom{n+2}{2}$

A1.7.11 Beweise für n∈N die Ungleichung $\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

durch vollständige Induktion.

*//**S1.7.4** (906)n,m∈N₀, j∈N: 2.)* $\binom{n}{m} = \begin{cases} 0 \text{ falls } n < m \\ \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{falls } n \geq m \end{cases}$ //

Bew:n=1: $1/3 \leq \frac{1}{4}\binom{2}{1} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 1/3 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

n↦n+1:Beachte, dass $\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \underset{S1.7.4\,2.)}{=} \frac{1}{4^{n+1}} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} =$

$$\frac{1}{4^n}\frac{2n!}{(n!)^2}\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{1}{4^n}\frac{2n!}{(n!)^2}\frac{(2n+1)(n+1)}{(2(n+1))^2} \underset{S1.7.4\,2.)}{=} \frac{2n+1}{2n+2}\underbrace{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}_{I.H.\geq\frac{1}{2n+1}} \geq$$

$$\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)} \geq \frac{1}{2(n+1)+1} \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\underbrace{\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}}_{\frac{1}{\sqrt{2n+1}}} \leq \frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt{2n+1}} ==$$

$$\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\frac{\sqrt{(2n+3)(2n+1)}}{\sqrt{(2n+2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+3}}$$

A1.7.13 Zu Zeigen: $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ ∀ n∈N

#**S1.5.6**(715)Unleichung von Bernoulli
#Vor:x∈R, x≥-1, n∈N
#Beh:$(1+x)^n \geq 1+nx$

Lös:IA: n=1: $1!=1> \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

IH: $n! > \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$ gelte für ein n∈N

IS: $(n+1)! = \underset{\geq 0}{(n+1)}\, n! > (n+1)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$

$$\Leftrightarrow (n+1)^2\left(\frac{n}{2}\right)^n \geq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n}{2}} \geq \frac{\frac{n+1}{2}}{(n+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = (1-\underset{\geqslant -1}{\frac{1}{n+1}})^n \underset{S1.5.6}{\geqslant} 1-\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{2(n+1)}$$

A1.7.14 Angeordneter Körper

$\forall$ x$\in$K, a$\geq$0, $(1+a)^n \geq \frac{n^2}{4} a^2$

Lös: $(1+a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \underbrace{\geqslant}_{k\geqslant 2} \binom{n}{2} a^2$ da $\binom{n}{k} a^k \geq 0$ $\forall$ $0\leq k\leq n$.

$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{n^2}{4}$, denn $n-1 \underbrace{\geqslant}_{n\geqslant 2} \frac{n}{2} \Leftrightarrow 2n-2\geq n \Leftrightarrow n\geq 2$

($\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{1*2\ldots(n-2)(n-1)n}{1*2*\ldots(n-2)!2}$)