A1.8.1

a) Ungleichung für arithmetisches und geometrisches Mittel
$\sqrt{ab} \le (a+b)/2 \ \forall\ a,b \ge 0$. Wann gilt hier genau Gleichheit?

*//**A1.2.9** (408) $a,b \in K$. Zeige: d) $2(a^2+b^2) \ge (a+b)^2 \ge 4ab$//*

Lös: $\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \ge 0}_{\text{d.h.}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \ge ab = (\sqrt{ab})^2}$ mit „=0„ ⇔ $\frac{a-b}{2}=0$ ⇔ $a=b$

$\underset{A1.2.9}{\Rightarrow} \underbrace{\left|\frac{a+b}{2}\right|}_{=\frac{a+b}{2}} \ge |\sqrt{ab}| = \sqrt{ab}$ da $a,b \ge 0$ nach Vor. und „=„ ⇔ $a=b$

b) Zeige mit Hilfe der AGM Ungleichung für $n,p \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 2p$, dass
$\sqrt[n]{n^p} < 1+2p/\sqrt{n}$. Anl: Setze $x_j = \sqrt{n}$ für $1 \le j \le 2p$

Lös: Anl ⇒ $\prod_{j=1}^{2p} \sqrt{n} = (\sqrt{n})^{2p} = n^p$. Setze $x_j=1$ für $2p<j\le n$, dann $\prod_{j=1}^{n} x_j = n^p$.

$\sqrt[n]{n^p} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} = G(x_1,\dots x_n)$ ¿ $A(x_1,\dots x_n) = 1/n \sum_{j=1}^{n} x_j =$

$1/n\left(\sum_{j=1}^{2p} \sqrt{n} + \sum_{j=2p+1}^{n} 1\right) = 1/n\left(2p\sqrt{n} + (n-2p)\right) = \frac{2p}{\sqrt{n}} + 1 - 2p/n < 2p/\sqrt{n} + 1$

c) Für $x_1,\dots x_n > 0$ heißt $H(x_1,\dots x_n) = \frac{1}{A(1/x_1,\dots 1/x_n)}$ das harmonische Mittel der Zahlen x_j. Leite aus der AGM Ungleichung ab, dass $H(x_1,\dots x_n) \le G(x_1,\dots x_n)$ gilt, mit = genau dann, wenn alle x_j gleich sind

Lös: $H = \frac{1}{A} \le \frac{1}{G(1/x_1,\dots,1/x_n)} = \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}(1/x_j)}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} = G(x_1,\dots x_n)$.