A1.9.1 Gegeben sei ein Polynom $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ mit $c_n\neq 0$.

Es sei $a\in\mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(a)=0$.

Beweise, dass $|a|<\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n} |c_k|$.

Bew: $|a|<1$: $|a|<1\leq\frac{|c_0|+|c_1|+\ldots|c_n|}{|c_n|}=\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n} |c_k|$.

$$\#\frac{|c_0|+|c_1|+\ldots|c_n|}{|c_n|}=\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n} |c_k|\geq 1 \underbrace{\Rightarrow}_{|a|<1}$$ weiter wie oben

$|a|\geq 1$: $f(a)=0 \Rightarrow c_0+c_1a+\ldots c_{n-1}a^{n-1}+c_na^n=0 \Rightarrow$

$$c_na^n=-c_0-c_1a-\ldots c_{n-1}a^{n-1}=-\sum_{k=0}^{n-1} c_ka^k \Rightarrow$$

$$|c_n||a|^n=|\sum_{k=0}^{n-1} c_ka^k|\leq\sum_{k=0}^{n-1} |c_k||a^k| \Rightarrow$$

$$|c_n||a|^n \star\frac{1}{|c_n||a|^{n-1}}\leq\sum_{k=0}^{n-1} |c_k||a^k| \star\frac{1}{|c_n||a|^{n-1}} \Rightarrow$$

$$|a|\leq\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n-1} |c_k||a|^{k-(n-1)} \underbrace{\leq}_{|a|\geq 1,\ k-(n-1)\leq 0}\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n-1} |c_k|<\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n} |c_k|$$

A1.9.2

a) Es seien $n,m\in\mathbb{N}$, $a_0,\ldots,a_n,b_0,\ldots,b_m\in\mathbb{C}$ mit $a_n,b_m\neq 0$. Zeige, dass für die Polynome $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ gilt:

$P\cdot Q$ ist ein Polynom vom Grad $n+m$, genauer:

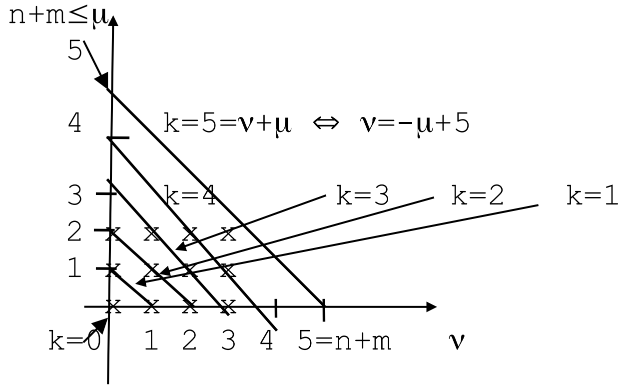
$P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$ mit $c_k=\sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu$, $k=0,\ldots,n+m$, wobei

$a_k=0\ \forall\ k>n$ und $b_k=0\ \forall\ k>m$ gesetzt sei.

Bew: $P(z)*Q(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu \underbrace{z^\nu z^\mu}_{z^{\nu+\mu}} \underset{*}{=} \sum_{k=0}^{n+m}\ \sum_{\substack{0\le\nu\le n+m\\ 0\le\mu\le n+m\\ \nu+\mu=k}} a_\nu b_\mu z^k=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k \Rightarrow$ $P*Q$ ist ein Polynom.

beachte $a_\nu=0$ für $\nu>n$, $b_\mu=0$ für $\mu>m$. Rechts stehen mehr Summanden als links, aber Summe ist gleich.

Genauere Erläuterung der Umsummation am Bsp $n=3$, $m=2$,



m \ n	0	1	2	3	4	5
5	a_0b_5					
		$b_3\ldots b_5=0$				
4	a_0b_4	a_1b_4				
					$a_4\ldots a_5=0$	
3	a_0b_3	a_1b_3	a_2b_3			
2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2		
1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	
0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	a_4b_0	a_5b_0
k=	0	1	2	3	4	5

Bei der linken Summe wird über alle Gitterpunkte im Rechteck $0\le\nu\le n$, $0\le\mu\le m$ summiert, während bei der rechten Summe über alle Gitterpunkte im Dreieck $0\le\nu+\mu\le n+m$ summiert wird. Man beachte, dass in den Punkten des Dreiecks ohne das Rechteck (diese Punkte hat man hinzugenommen) der Wert $a_\nu b_\mu=0$ ist!

Bem: c_k läßt sich auch in der Form $c_k=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}$ schreiben.

$a_n\neq 0$, $b_m\neq 0 \Rightarrow c_{m+n}=\sum_{\nu=0}^{n+m} \underbrace{a_\nu}_{=0 \text{ für } \nu>n} * \underbrace{b_{n+m-\nu}}_{=0 \text{ für } n+m-\nu>m \text{ d.h. } \nu<n} = a_n b_m\neq 0$

(alle Summanden $=0$ für $\nu>n$). Also $\operatorname{grad}(PQ)=n+m$

#Im Bsp oben $n=3$, $m=2$

#$c_0=\sum_{\nu=0}^{0} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{0-0}$, $c_1=\sum_{\nu=0}^{1} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{1-0}+a_1b_{1-1}$,

#$c_2=\sum_{\nu=0}^{2} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{2-0}+a_1b_{2-1}+a_2b_{2-2}\ \ldots$

#$c_5=\sum_{\nu=0}^{5} a_\nu b_{k-\nu}=a_0 \underbrace{b_{5-0}}_{=0\ da\ 5>2} + a_1 \underbrace{b_{5-1}}_{=0\ da\ 4>2} + a_2 \underbrace{b_{5-2}}_{=0\ da\ 3>2} + a_3b_{5-3} + \underbrace{a_4}_{=0\ da\ 4>3} b_{5-4} + \underbrace{a_5}_{=0\ da\ 5>3} b_{5-5}=a_3b_2$

#Im Bsp $n=3$, $m=2$: für $k=4$ ist

#$c_4=\sum_{\nu=0}^{4} a_\nu b_{k-\nu}=a_0 \overbrace{b_{\mu=4>m=2}}^{=0} + a_1 \overbrace{b_{\mu=3>m=2}}^{=0} + a_2b_2+a_3b_1+\overbrace{a_{\nu=3>n=3}}^{=0} b_0=a_2b_2+a_3b_1$

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, Hinweis: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

*//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$ ˅ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$://*

//1.) $\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}$ *//*

//3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}\underbrace{=}_{2.)}\frac{n!}{(n-m)!(n-m-n)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\underbrace{=}_{2.)}\binom{n}{m}$ *falls $n\geq m$//*

//5.) $\binom{\alpha}{j}+\binom{\alpha}{j-1}=\binom{\alpha+1}{j}$ *//*

//6.) $\forall$ *$a,b,z\in C$* ˅ *$n\in N_0$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$*

Bew: $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k\underbrace{=}_{Binomialsatz}(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n\underbrace{=}_{Binomialsatz}[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{a_k}x^k)][\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{b_k}x^k)]$

$\underbrace{=}_{A1.9.2}$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n},\ \sum_{k=0}^{2n}[\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}x^k\ \forall\ x\in C\underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.4}\binom{2n}{k}=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}\ \forall$$

$k=0,1,\ldots 2n\ \underbrace{\Rightarrow}_{k=n}$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\underbrace{\binom{n}{n-\nu}}_{\underset{S1.7.4\ 3.)}{=}\binom{n}{\nu}}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}^2$$

A1.9.3

a) Beweise $\binom{p+q}{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}*\binom{q}{\nu-j}$

Lös: $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}\ \forall\ x\in\mathbb{R}$: $(1+x)^p(1+x)^q=[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j][\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{j}x^k]=$

$$=\sum_{\nu=0}^{p+q}x^\nu\sum_{j=0}^{\nu}\binom{q}{j}\binom{q}{\nu-j}\underset{\text{Koeffizientenvergleich}}{\Rightarrow}\text{Beh}$$

b) Beweise $\forall\ n,m\in\mathbb{N}$ die Gleichung $\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n}{k}*\binom{m}{k}=\binom{m+n}{n}$

*//**A1.9.2** (1101) $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k,\ Q(z)=\sum_{k=0}^{m}b_kz^k$://*

//$P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m}c_kz^k,\ c_k=\sum_{\nu+\mu=k}a_\nu b_\mu,\ k=0,\dots,n+m,$ //

// $a_k=0\ \forall\ k>n$ und $b_k=0\ \forall\ k>m$ gesetzt sei.//

Bew: $P(z)=(1+z)^{m+n}$. Dann gilt $P(z)=\sum_{\nu=0}^{n+m}\binom{m+n}{\nu}z^\nu$ und

$$P(z)=(1+z)^m(1+z)^n=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}z^j\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k=\sum_{\nu=0}^{n+m}z^\nu\sum_{\substack{0\le j\le m\\0\le k\le n\\j+k=\nu}}\binom{m}{j}\binom{n}{k}=\sum_{\nu=0}^{n+m}z^\nu\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{n}{\nu-j}.$$

Nach Identitätssatz für Polynome

$$\binom{m+n}{n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{m+n}\underbrace{\binom{m}{j}\binom{n}{j}}_{0\text{ für }j>m,n}$$

A1.9.4 (Polynomdivision) Gegeben seien Polynome F und G mit $G\neq 0$. Beweise, dass dann Polynome Q und R mit $\gamma(R)<\gamma(G)$ existieren mit $F(x)=Q(x)G(x)+R(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Sind Q und R eindeutig bestimmt?

Hinweis: Es sei $\gamma(G)=m$ und $\gamma(F)=n+1$ sowie $G(x)=\sum_{k=0}^{m}b_kx^k$ und

$F(x)=\sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k$. O.B.d.A. sei $m>0$. Führe eine Induktion nach n durch. Reduziere hierbei den Grad durch Betrachtung des Polynoms $\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)$.

Bew: #Vorbetrachtung:

$\#(\sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k):(\sum_{k=0}^{m}b_kx^k)=(a_{n+1}x^{n+1}+a_nx^n+\dots a_0x^0):(b_mx^m+\dots b_0x^0)=$

$\#\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}+\dots\dots..$usw.

#1. Rest: $\sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_mx^m+\dots b_0x^0)=$

$\#\qquad\sum_{k=0}^{n+1}a_kx^k-a_{n+1}x^{n+1}-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\dots b_0x^0)=$

$\#\qquad\sum_{k=0}^{n}a_kx^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\dots b_0x^0)$

O.B.d.A. $\gamma(G)>0$, sonst $G(x)\equiv c\neq 0 \Rightarrow F(x)=\underbrace{\frac{F(x)}{c}}_{=Q(x)}G(x)+\underbrace{0}_{R(x)}$

A(n): Zu jedem Polynom F vom $\gamma(F)\leq n$ und G vom $\gamma(G)=m$ existieren Polynome Q und R wie oben.

Bew: von A(n) $\forall\, n\in\mathbb{N}$ mit Induktion nach n. Setze $m=\gamma(G)$.

Der „erste" Rest #bezogen auf $\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k\right):\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)$...hat noch

#nichts mit Induktion nach n+1 zu tun

$$\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_0x^0)\ \Rightarrow$$

grad $\tilde{F}(x)=n<n+1$, d.h. es gilt $A_{(n)}$

weiter siehe unten

$n\leq m-1$, d.h. auch

$n=m-1$: Es sei $\gamma(F)<\gamma(G)=m$.

Setze $Q(x)\not\equiv 0$ und $R(x)\equiv F(x)\ \Rightarrow$

$\gamma(R)<m$ und $F(x)=\underbrace{Q(x)}_{\equiv 0}G(x)+R(x)$

$n\mapsto n+1$: Es gelte $A_{(n)}$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Weiter $G(x)=\sum_{k=\nu}^{m} b_k x^k$ mit $b_m\neq 0$

und $F(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ ein Polynom $\gamma\leq n+1$

Betrachte $\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=$

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^k+a_{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\left(-b_m x^m-\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k\right)=$$

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k=\sum_{k=0}^{n} a_n x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k+n+1-m}$$

$$\underset{k\leq m-1;\,n+1-m\leq k+n+1-m\leq n}{\Rightarrow}\ \text{grad}(\tilde{F})\leq n\ \underset{\text{IndHyp}}{\Rightarrow}$$

$\exists$ Polynom mit $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ mit $\tilde{F}(x)=\tilde{Q}(x)G(x)+\tilde{R}(x)$ und $\gamma(\tilde{R})<m$

$$F(x)=\tilde{F}(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=\tilde{Q}(x)G(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)+\tilde{R}(x)=$$

$$\underbrace{\left(\tilde{Q}(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\right)}_{=Q(x)}G(x)+\underbrace{\tilde{R}(x)}_{=R(x)}$$

Eindeutigkeit:

Es gelte $F(x)=Q_1(x)G(x)+R_1(x)=Q_2(x)G(x)+R_2(x)$ mit $\gamma(R_1)<m \vee \text{grad}(R_2)<m$

$\Rightarrow (Q_1(x)-Q_2(x))G(x)=R_1(x)-R_2(x)$

Annahme $Q_1\neq Q_2 \Rightarrow \gamma((Q_1(x)-Q_2(x))G(x))\geq m$ Widerspruch zu

$\gamma(R_2(x)-R_1(x))\leq m-1 \Rightarrow Q_1(x)\equiv Q_2(x) \Rightarrow R_1(x)\equiv R_2(x)$

A1.9.5

$S(x)=\sum_{k=0}^{m} a_kx^k,\ T(x)=\sum_{k=0}^{n} b_kx^k,\quad a_m\neq 0,\ b_n\neq 0,$

$(S*T)(x)=(\sum_{k=0}^{m} a_kx^k)(\sum_{k=0}^{n} b_kx^k)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_kb_jx^{k+j}=\sum_{\underbrace{l}_{=k+j}=0}^{m+n}\sum_{k+j=l} a_jb_kx^l,\ 0\leq k\leq m,\ 0\leq j\leq n$

Höchste Potenz m+n, $\gamma(S*T)=\gamma(S)+\gamma(T)$.

$(S+T)(x)=\sum_{k=0}^{m} a_kx^k+\sum_{k=0}^{n} b_kx^k \underbrace{=}_{oBdA\ m\leq n} \sum_{k=0}^{m} (a_k+b_k)x^k+\sum_{k=m+1}^{n} b_kx^k \Rightarrow \gamma(S+T)=\begin{cases} n, \text{falls } m<n \\ \leq m, \text{falls } m=n \end{cases}\ldots$

falls $a_m+b_m=0\ldots<\ldots\gamma(S+T)\leq\max\{\gamma(S),\gamma(T)\}$

$P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}=\binom{x+\alpha}{\nu}=\dfrac{(x+\alpha)(x+\alpha-1)\ldots(x+\alpha-\nu+1)}{\nu!},$

Zähler ν Faktoren $\Rightarrow \gamma(P(x))=\nu$

$Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\left(\dfrac{x(x-1)\ldots(x-\nu+j+1)}{(\nu-j)!}\right)$

a) Seien P, Q, Q_1 und R Polynome.
Zeige: (.) Aus $P=Q_1Q+R$ mit $\gamma(R)<\gamma(Q)$ folgt $\gamma(Q_1)=\gamma(P)-\gamma(Q)$,
außer
(..) wenn $\gamma(P)<\gamma(Q)$ und dann ist Q_1 das Nullpolynom.

Lös: (*) $\gamma(P)=\gamma(Q_1Q+R)\leq\max\{\gamma(Q_1Q),R\}=\max\{\gamma(Q_1)+\gamma(Q),\ \gamma(R)\}$

(.) $\gamma(P)\geq\gamma(Q)$, Beh. Q_1 ist nicht Nullpolynom
Bew: Annahme Q_1 ist Nullpolynom $\Rightarrow$

$\gamma(P)=\gamma(Q_1Q+R)\leq\max\{\gamma(Q_1Q),R\}\underbrace{=}_{QQ_1=0}\gamma(R)\ \underbrace{\Rightarrow}_{*}$

$\gamma(P)\leq\gamma(R)<\gamma(Q)\ \Rightarrow$ Widerspruch zur Vor. $\gamma(P)\geq\gamma(Q)$

$\gamma(Q_1Q)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\geq\gamma(Q)\geq\gamma(R)\ \Rightarrow$

in (*) gilt „=“ also $\gamma(P)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ \Rightarrow$

$\gamma(Q_1)=\gamma(P)-\gamma(Q)$

(..) $\gamma(P)<\gamma(Q)$. Annahme: Q_1 ist nicht Nullpolynom $\Rightarrow$

$\gamma(Q_1Q)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\geq\gamma(Q)>\gamma(R)\ \Rightarrow$

$\gamma(P)=\max\{\gamma(Q_1)+\gamma(Q),\ \gamma(R)\}=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\geq\gamma(Q)$

Widerspruch zur Vor $\Rightarrow$ Q_1 Nullpolynom

b) Finde Polynome Q_1 und R mit $x^5-2x^2=Q_1(x)(x-1)^2+R(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, und $\gamma(R)<2$.

Lös: $(x^5-2x^2):(x^2-2x+1)=x^3+2x^2+3x+2$ Rest $x-2\ \Rightarrow$

$(x^5-2x^2)=(x^3+2x^2+3x+2)(x-1)^2+(x-2)$

$(\gamma(P)=5>\gamma(Q)=3\ \Rightarrow\ \gamma(Q_1)=5-2=3)$,

$(x^5-2x^2)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(x^2-2x+1)+b_0+b_1x=\ldots.$

$a_3x^5+(a_2-2a_3)x^4+(a_1-2a_2+a_3)x^3+(a_0-2a_1+a_2)x^2+(-2a_0+a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

$a_3=1,\ a_2-2a_3=0, a_2=2,\ a_1-4+1=0,\ a_1=3,\ a_0-6+2=2,\ a_0=6,\ -12+2+b_1=0,$

$b_1=9,\ 6+b_0=0,\ b_0=-6)$

A1.9.6 Zeige: Sind $P,Q\in K_n[x]$, so ist $PQ\in K[x]$ und es gilt $\gamma(PQ)=\gamma(P)+\gamma(Q)$, auch falls eines der Polynome (oder beide) das Nullpolynom ist(sind)

A1.9.7 Zeige, daß die Menge $K(x)$ der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in K ein Körper ist.

A1.9.8 Beweise für $\nu\in\mathbb{N}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ die Identität

$(*)\ \sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}$. Siehe auch A1.9.3.

Anleitung: Nimm zunächst $\alpha=p\in\mathbb{N}$ an. Zeige, dass dann $P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}$

und $Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}$ Polynome vom Grad $\le\nu$ sind. Folgere aus Aufgabe

Polynomdivision, dass $P(x)=Q(x)$ gilt $\forall\ x\in\mathbb{N}$. Wende dann den Idenditätssatz für Polynome an. Schließe dann analog, dass die Gleichung auch für $\alpha\in\mathbb{C}$ gilt.

*//**A1.7.9** (910)Zeige für $p,q,\nu\in N_0$ die Formel* $\binom{p+q}{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}\binom{q}{\nu-j}$ *.//*

*//**A1.9.3** (1107)Beweise $\forall$ n,mnk∈N die Gleichung* $\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n}{k}*\binom{m}{k}=\binom{m+n}{n}$ *//*

//Bew:$P(z)=(1+z)^{m+n}$. ....Nach Identitätssatz für Polynome//

// $\binom{m+n}{n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{m+n}\underbrace{\binom{m}{j}\binom{n}{j}}_{0\text{ für } j>m,n}$ //

Bew: (*)A1.7.9, A1.9.3: $\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}\quad\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}$ (nicht $\in\mathbb{C}$!)

Zunächst $\alpha=p\in\mathbb{N}$.

Setze $P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}=\dfrac{\overbrace{(\alpha+x)(\alpha+x-1)\ldots(\alpha+x-\nu+1)}^{\nu\text{ Terme}}}{\nu!}\Rightarrow\gamma(P)\le\nu$

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1)}{(\nu-j)!}\Rightarrow\gamma(Q)\le\nu$$

Es gilt $P(x)=Q(x)\quad\forall\ x\in\mathbb{N}$ wegen (*).
P(x) und Q(x) stimmen an mehr als $\nu+1$ Stellen überein...
Idenditätssatz Polynome $\Rightarrow P(x)=Q(x)\quad\forall\ x\in\mathbb{C}\Rightarrow$

$\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}\ \forall\ \alpha\in\mathbb{N},\ \beta\in\mathbb{C}$ (**)

$\tilde{P}(x)=\binom{x+\beta}{\nu}$, $\tilde{Q}(x)=\sum_{j=1}^{\nu}\binom{x}{j}\binom{\beta}{\nu-j}$, $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)\quad\forall\ x\in\mathbb{N}$ wegen (**).

Idenditätssatz: $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)\quad\forall\ x\in\mathbb{C}$.
??

A1.9.9 Algebraische Zahlen. Eine Zahl ξ heißt algebraische Zahl, wenn ξ Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn also $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{Z}$ $(a_n \neq 0)$ existieren mit $a_0+a_1\xi+\dots+a_n\xi^n=0$.
Insbesondere ist jede rationale Zahl p/q als Lösung der Gleichung

p-qx=0 $\#\underbrace{p}_{a_0}\underbrace{-q}_{a_1}\underbrace{x}_{\zeta}=0\#$ eine algebraische Zahl.

a) Zeige, dass die Menge der Polynome mit <u>ganzzahligen</u> Koeffizienten abzählbar ist.

Lös: Z.z. $M=\{P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n,\ n\in\mathbb{N},\ a_j\in\mathbb{Z}: j=1\dots n\}$ abzählbar

Bew: $M=\bigcup_{n\in N} M_n=\bigcup_{n\in N}\{P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n,\ a_j\in\mathbb{Z}:1\dots n\}$

(M_n Polynome vom Grad $\leq$ n)

Beh: M_n höchstens abzählbar $\Rightarrow$ M höchstens abzählbar

Bew: Sei $n\in\mathbb{N}$ fest, setze $j=\{0,1,2\dots,n\}$ endlich und $A_j=\mathbb{Z}\neq\emptyset$.

$A=\bigcup_{j=0}^{n} A_j=\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\cup\dots\mathbb{Z}$ (n+1 mal).

$\forall\ P\in M_n$, $P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ $a\in\mathbb{Z}$ ist durch $f:J\to A$, $f(j)=a_j$ eine Abb definiert und umgekehrt für $f:J\to A$ $f(j)\in\mathbb{Z}$ ist ein Polynom definiert d.h. $M_n=\prod_{j\in J}\mathbb{Z}=\prod_{j=0}^{n}\mathbb{Z}$ kart Prod endlich.

$\mathbb{Z}$ höchstens abzählbar $\Rightarrow$ M_n höchstens abzählbar

b) Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

Lös: Z.z. $A=\{\xi$ ist algebraische Zahl$\}$ ist höchstens abzählbar.

Bew: $A=\{\xi\in\mathbb{C}: P(\xi)=0$ für ein $P\in M\}$ =

$\bigcup_{n\in N}\{\xi\in\mathbb{C}: P(\xi)=0$ für ein $P\in M_n\}=\bigcup_{n\in N} A_n$.

Es gilt: $P\in M_n$, $(\gamma)P\leq n$ $\Rightarrow$ es gibt max n Nullstellen.

Beh: A_n ist höchstens abzählbar $\Rightarrow$ A ist höchstens abzählbar.

Bew: $A_n=\bigcup_{P\in M_n}\{\underbrace{\xi\in C: p(\xi)=0}_{N_p\ \text{max } n \text{ Elemente}}\}$, M_n abzählbar $\Rightarrow$ $A_n=\bigcup_{p\in M_n} N_p$ höchstens abzählbar.