Analysis

(1)0 Vorbemerkungen

(1)0.0 Abkürzungen, Vorbemerkungen, Beweismethoden

Abkürzungen, soweit sie sich nicht aus dem Zusammenhang erklären:
$\forall$:für alle $\exists$: es existiert $\exists_1$: es existiert genau ein

Vor.: Voraussetzung Beh.: Behauptung Lös:Lösungen
Bew : Beweis Bez: Bezeichnung baf: beliebig, aber fest
Dx.x.x: Definitionx.x.x
Sx.x.x:Satz x.x.x (xxxx): Seite xxxx

$^\wedge$ logische UND Verküpfung
$^\vee$ logische ODER Verküpfung (evt enthält der Text noch unkorrigierte Verwechslungen von $^\wedge$ und $^\wedge$, sollte aus dem Kontext ersichtlich sein)
$\sum_{k=1}^{n} k=1+2+...+n$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k=a_0+a_1+\ldots$..
#....#:eigene Überlegungen

//kursiv// : kursiver Inhalt zum Ersparen des Zurückblätterns! Falls doch: Seitennr in Klammern.

Fast alle Lemmas oder Hilfssätze habe ich als Sätze bezeichnet. Das wird evt nochmals überarbeitet und rückgängig gemacht.
Manche Aufgaben habe ich ohne Lösungen aufgenommen.
Mengen in Großbuchstaben K,R,M…
b_x bedeutet meist, dass b von x abhängt
----- Hinweise auf Strukturen in den Gedankengängen
<: 5 ist kleiner als 10 >: 10 ist größer als 5
Bsp $x\leq 5$: x ist kleiner als 5 oder x ist gleich 5
Bsp $x\geq 6$: x ist größer als 5 oder x ist gleich 5
24|6: 6 ist Teiler von 24, d.h. 24 geteilt durch 6 ist 4 <u>Rest 0</u>

Beweismethoden
1.Aufgabe:
Gegeben seien 2 Aussagen A und B Es soll die Implikation A $\Rightarrow$ B, d.h. ein Satz mit Vor. A und Beh. B bewiesen werden.
Sprechweise: Aus A folgt B, oder A impliziert B, oder
A ist hinreichend für B, oder B ist notwendig für A
(denn, wenn B nicht gilt, dann kann A auch nicht gelten)
Schema: Satz Vor. A, Beh. B, Beweis.

a) Direkter Beweis
Man leitet aus A, mittels früher bewiesener wahrer Aussagen, B direkt aus A her.

Definitionen und Sätze für Schritte zu folgenden Bsp werden erst später behandelt. Die Schritte sind aber trotzdem aus „Schulwissen“ einleuchtend. Es kommt hier nur auf das Verstehen der Beweismethoden an.

Bsp: A:Sei $p \geq 5$ eine Primzahl (d.h. natürliche Zahl, die durch keine natürliche Zahl q mit $2 \leq q \leq p-1$ teilbar ist)
B: $(24 \mid (p^2-1))$

Bew: (.) $p \geq 5 \Rightarrow$ p ungerade $\Rightarrow 2 \mid p-1$ und $2 \mid p+1 \Rightarrow p-1=2q,\ p+1=2q+2=2(q+1)$.
Wenn q gerade oder ungerade $\Rightarrow$ p-1 oder p+1 durch 4 teilbar
$\Rightarrow 8 \mid (p-1)(p+1)=p^2-1$
(..) $p \geq 5 \Rightarrow$ 3 teilt nicht $p \Rightarrow 3 \mid p-1$ oder $3 \mid p+1$ (denn 3 teilt eine der Zahlen $n-1, n, n+1$, n natürlich) $\Rightarrow 3 \mid (p^2-1)$.
Division mit Rest (Euklidischer Divisionalalgorithmus) $\Rightarrow$
$p^2-1=8*3q+r$ mit $0 \leq r < 3*8=24 \Rightarrow$
$r=0,8,16$ oder $r=3,6,9,12,15,18,21$ und r muss durch
(.)8 und (.)3 teilbar sein $\Rightarrow r=0 \Rightarrow 3*8=24 \mid p^2-1$

b) Indirekter Beweis
Man leitet aus der Negation von B die Negation von A her:
$\neg B \Rightarrow \neg A$ ist logisch äquivalent mit $A \Rightarrow B$.

Bsp: A:Seien a,b ganze Zahlen mit $3 \mid (a^2+b^2)$.
B: $3 \mid a$ oder $3 \mid b$

Bew: $\neg B$:3 nicht|a und 3 nicht|b,
da 3 eine der Zahlen a-1,a,a+1 bzw. b-1,b,b+1 teilt $\Rightarrow$
$3 \mid (a-1)(a+1)$ und $3 \mid (b-1)(b+1) \Rightarrow 3 \mid (a^2-1)+(b^2-1) \Rightarrow$
$3 \mid a^2+b^2-2 \Rightarrow \exists$ ganzes q mit $a^2+b^2-2=3q \Rightarrow a^2+b^2=3q+2$
$\Rightarrow$ 3 nicht$\mid a^2+b^2$ da sonst $3 \mid 2$ gelten müßte, d.h. $\Rightarrow \neg A$

c) Widerspruchsbeweis
Ausgehend von den Aussagen A und $\neg B$ leitet man einen Widerspruch zu bereits bewiesenen (wahren!) Aussagen her.
Also kann $\neg B$ nicht wahr sein, d.h. B ist wahr (tertium non datur)
Bsp:
A: $\sqrt{2}$ sei die positive Lösung von $x^2=2$,
B: $\sqrt{2}$ ist nicht rational, d.h. $\sqrt{2} \neq p/q$ mit natürlichen Zahlen p,q, $q \neq 0$.
Bew: $\neg B$: $(\sqrt{2})^2=2$ und $x=\sqrt{2}=p/q$ mit teilerfremden p,q

A und $\neg B \Rightarrow x^2=\frac{p^2}{q^2}=2 \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow$ p gerade

(Falls p ungerade $p=2\ \ +1 \Rightarrow p^2=4\ \ ^2+4\ \ +1=2(2\ \ ^2+2\ \ )+1$:ungerade)
$\Rightarrow p=2m \Rightarrow p^2=4m^2=2q^2 \Rightarrow 2m^2=q^2 \Rightarrow$ q gerade $\Rightarrow 2 \mid p$ und $2 \mid q$.
Widerspruch zur Annahme teilerfremd (oder durch Wiederholung $\Rightarrow$ p und q sind durch 2 mit beliebig großem teilbar).

Aufgabe:
Gegeben seien 2 Aussagen A,B. Es soll die Äquivalenz: $A \Leftrightarrow B$ bewiesen werden. A ist äquivalent zu B, A gilt genau dann, wenn B gilt , A ist notwendig und hinreichend für B.

d) $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$ (wie bei 1.)Aufgabe)

e) Man zeige über Zwischenaussagen $A_1, \ldots A_n$ (die wahr sind!)
$A \Leftrightarrow A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \ldots A_n \Leftrightarrow B$
Bsp:siehe Bew. zu $f^{-1}(\ _{M \in S} M) = \ _{M \in S} f^{-1}(M)$ Seite 20
\# Bem: $(A \Rightarrow B \ \ \neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B)$
f) Beweis durch Induktion siehe P1.5

0.1 Mengen (3)

D0.1.1(3)

Zusammenfassung M, von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, welche die Elemente von M genannt werden, zu einem Ganzen.

Bem: bestimmt $\rightarrow$ für jedes Objekt muß entscheidbar sein, ob es zur Menge gehört oder nicht

wohlunterschieden $\rightarrow$ jedes Objekt kommt höchstens 1x in M vor

Obige Definition ist unbefriedigend, wird aber im folgenden benutzt, da eine genauere axiomatische Begründung der Mengenlehre den Rahmen sprengen würde.

Bez: $x \in M \Leftrightarrow$ Objekt x ist Element von M

$x \notin M \Leftrightarrow$ Objekt x ist kein (nicht) Element von M.

Niemals gilt $M \in M$

D0.1.2(3)

M_1 und M_2 heißen gleich, $M_1 = M_2 :\Leftrightarrow$

Beide Mengen bestehen aus den gleichen Objekten, oder $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$

($\Leftrightarrow$ genau dann, wenn)

Bem: Eine Menge kann definiert sein durch

1.) eine Aufzählung ihrer Elemente, z.B. $M = \{a, b, c, ..., z\}$ oder

2.) durch Charakterisierung, bzw Beschreibung ihrer Elemente x durch eine Eigenschaft E(x):

$M = \{x | E(x)\} = \{x | x \text{ hat die Eigenschaft } E(x)\}$

Bsp.: 1.) $M = \{5, 6, 7, 8\} = \{x | x \text{ ist natürliche Zahl mit Bedingung } 4 < x < 9\}$

2.) $M = \{2, 3, 5\} = \{x | x \text{ ist Primzahl und Teiler von } 120\} =$ Menge der Primteiler von 120

3.) $\{5, 6, 6, 7, 8\}$ ist keine Menge

Im folgenden betrachten wir nur Mengen, deren Elemente mathematische Objekte sind, die jeweils zu einer festen Grundmenge gehören.

D0.1.3(3)

1.) Die Menge, die keine Elemente enthält, heißt leere Menge $\emptyset$

2.) Eine Menge M_1 ist Teilmenge einer Menge $M_2 :\Leftrightarrow$

$\forall\, x \in M_1$ gilt $x \in M_2$ oder $\forall\, x \in M_1 : x \in M_2$ oder $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$

Bez: $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \supset M_1$

3.) M_1 heißt echte Teilmenge von $M_2 :\Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ und $M_1 \neq M_2$

Bez: $M \subsetneq M_2$.

Bem: 1.) Für 2 Mengen M_1, M_2 gilt $M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ <u>und</u> $M_2 \subset M_1$

2.) Für 2 beliebige Mengen M_1 und M_2 braucht <u>nicht</u> $M_1 \subset M_2$ oder $M_2 \subset M_1$ zu gelten.

Folgerungen: Für Mengen M_1, M_2, M_3 gilt

1.) $M_1 \subset M_2$ und $M_2 \subset M_3$ kurz $M_1 \subset M_2 \subset M_3$ Transitivität $\Rightarrow M_1 \subset M_3$

2.) $M_1 \subset M_1 \Rightarrow$ Reflexivität

3.) $\varnothing \subset M_1$

(4)D0.1.4 (4)

Seien M_1, M_2 Mengen, dann heißt

1.) $M_1 \cup M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die Vereinigung von M_1 und M_2

Allgemeiner: Sind A_j, für $j \in J$, beliebig viele Mengen, so ist deren Vereinigung $\cup_{j \in J} A_j = \{x : \exists\ j \in J, \text{ mit } x \in A_j\}$

(J Indexmenge entsprechend der Zahl der Mengen)

2.) $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der Durchschnitt von M_1 und M_2

Allgemeiner: Sind A_j, für $j \in J$, beliebig viele Mengen, so ist deren Durchschnitt $\cap_{j \in J} A_j = \{x : x \in A_j\ \ \forall j \in J\}$

3.) $M_1 \backslash M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ die Differenz von M_1 und M_2 oder das Komplement von M_2 relativ zu M_1

4.) M_1 und M_2 disjunkt: $\Leftrightarrow M_1 \cap M_2 = \varnothing$

A0.1.1

a) Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C \subset A \Leftrightarrow A \cup C = A$

#Vorbemerkung: Es wird wiederholt D0.1.3,Bem1 benutzt:

$M_1 = M_2 \Leftrightarrow M_1 \subset M_2$ <u>und</u> $M_2 \subset M_1$

Bew: Z.z. (.) $C \subset A \Rightarrow A \cup C = A$ (..) $A \cup C = A \Rightarrow C \subset A$

(.) $A \cup C \supset A$: $x \in A \Rightarrow x \in A$ oder $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C$ und

$A \cup C \subset A$: $x \in A \cup C \Rightarrow x \in A$ oder $\underbrace{x \in C}_{x \in A \text{ da } C \subset A\ !} \Leftrightarrow x \in A$

kürzer: $x \in A \cup C \underset{D0.1.4\ 1}{\Leftrightarrow} x \in A$ oder $x \in C \underset{C \subset A}{\Leftrightarrow} x \in A$

(..) Sei $x \in C \Rightarrow x \in A$ oder $x \in C \underset{D0.1.4\ 1.)}{\Leftrightarrow} x \in \underbrace{A \cup C}_{=A} \Rightarrow x \in A$.

Also $C \subset A$

b) Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Bew: Z.Z: (.) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ (..) $B \cap A = A \Rightarrow A \subset B$

(.) Unabhängig von $A \subset B$ gilt wegen $x \in B \cap A \Rightarrow x \in B$ und $x \in A \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \cap A \subset A$

$B \cap A \supset A$: $x \in A \underset{A \subset B}{\Rightarrow} x \in B$ und $x \in A \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Leftrightarrow} x \in B \cap A$

kürzer: $x \in B \cap A \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Leftrightarrow} x \in A$ und $x \in B \underset{A \subset B}{\Leftrightarrow} x \in A$

(..) $x \in A \Rightarrow x \in B \cap A \underset{D0.1.4\ 2.)}{\Leftrightarrow} x \in B$ und $x \in A \Rightarrow x \in B$. Also $A \subset B$

andere Formulierung

(.) Es gilt für beliebige Mengen A,B: $A \cap B \subset A$

(denn $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ und $x \in B \Rightarrow x \in A$)

Es sei $A \subset B$. Z.z. vgl oben : $A \subset A \cap B$

Sei $x \in A \subset B \Rightarrow x \in A$ und $x \in B$ $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \cap B$

(..) Es gelte $A \cap B = A$. Z.z.: $A \subset B$

Sei $x \in A$ und $x \in B \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ und $x \in B \Rightarrow x \in B$

(.) und (..) $\Rightarrow$ Beh

D0.1.5 (5)

Ist $M_1 \subset M_2$, so heißt $M_1^C := M_2 \setminus M_1$ das Komplement von M_1 in M_2 oder von M_1 bzgl M_2 (Ober-, Grundmenge M_2 muß bekannt sein)

D0.1.6(5)
Ist M eine Menge, so heißt $P(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$ die Potenzmenge von M
(= eine Menge von Mengen oder Menge aller Teilmengen von M, d.h. Elemente von $P(M)$ sind Teilmengen von M)
Bsp:1.) $M=\{5,6,7\}$
$P_{(M)}=\{\emptyset,\{5\},\{6\},\{7\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\},\{5,6,7\}\}$ Anzahl $8=2^3$
2.) $A=\{1,2,3\}$, $P_{(A)}=\{A_j : 1 \le j \le 8\}$ mit $A_1=\emptyset, A_2=\{1\}$, $A_3=\{2\}$, $A_4=\{3\}$, $A_5=\{1,2\}$, $A_6=\{1,3\}$, $A_7=\{2,3\}$, $A_8=\{1,2,3\}$
3.) $M=\emptyset$, $P(\emptyset)=\{\emptyset\}$, $P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \underbrace{\{\Phi\}}_{P(\emptyset)}\}$

$$P(P(P(\emptyset))) = \{\emptyset, \underbrace{\{\Phi\}}_{P(P(\emptyset))}, \underbrace{\{\{\Phi\}\}}_{P(P(\emptyset))}, \underbrace{\{\Phi,\{\Phi\}\}}_{P(P(\emptyset))}\}$$

D0.1.7(5)
Sind M_1 und M_2 Mengen, so heißt die Menge $M_1 * M_2 := \{(x,y) \mid x \in M_1 \text{ und } y \in M_2\}$ das kartesische Produkt von M_1 mit M_2 (=Menge aller geordneten Paare (x,y) aus $x \in M_1$, $y \in M_2$)
Beachte:Bei den Paaren kommt es auf die Reihenfolge an. $(a,b) \neq (b,a)$, außer $a=b$

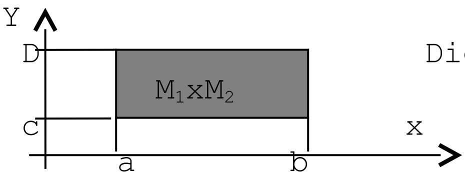
Allgemein: $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 * A_2 * \ldots * A_n := \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_i \in A_i, i=1,2,\ldots,n\}$

Falls ein $A_i=\emptyset \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} A_i = \emptyset$

Sind alle A_i gleich, ist das n-fache kartesische Produkt $A^n := \prod_{i=1}^{n} A$

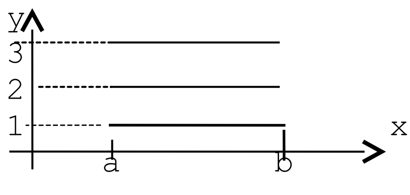
Bem:1.) $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in M_1 x M_2$. Dann gilt $(x_1,y_1)=(x_2,y_2) :\Leftrightarrow x_1=x_2$ und $y_1=y_2$
2.) $(x,y) \neq (y,x)$ für $x,y \in M_1 x M_2$, $x \neq y$

Bsp:1.) $M_1=[a,b]$, $M_2=[c,d]$ Bem*: $[a,b]=\{x \mid a \le x \le b\}$



Die Randlinien gehören dazu

2.) $M_1=\{1,2,3\}$, $M_2=[a,b]$



A0.1.2
Finde diejenige Menge A, deren Potenzmenge so wenig Elemente enthält wie nur möglich
Lös:Die Potenzmenge einer Menge ist niemals leer, denn sie enthält

immer die Teilmengen $\emptyset$ und A; diese sind genau dann gleich, wenn A die leere Menge ist. Also gilt: Ist $A\neq\emptyset$, so hat $\mathsf{P}_{(A)}$ Mindestens 2 Elemente. Daher ist die gesuchte Menge $A=\emptyset$

A0.1.3

Charakterisiere alle Mengen A,deren Potenzmenge genau 2 Elemente hat

A0.1.4

Charakterisiere alle Mengen A, deren Potenzmenge nur endlich viele Elemente hat

A0.1.5

Seien $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b_1,b_2\}$ und $M=AxB=\{(a_i,b_j),\ i,j=1,2\}$.
Bestimme die Potenzmenge von M.

A0.1.6

Seien A_j Mengen mit n_j Elementen für $1\leq j\leq n$. Bestimme die Anzahl der Elemente von $A_1*...*A_n$.

A0.1.7

In der linearen Algebra wird R^n meist als Menge der Spaltenvektoren der Länge n definiert. Wieso ist die streng genommen nicht gleich dem kartesischen Produkt $\mathsf{R}* \dots \mathsf{R}$ (mit n Faktoren)?

A0.1.8

Zeige:Die Menge aller reellen Matrizen mit n Zeilen und m Spalten kann man als kartesisches Produkt von R^n mit sich selber (m mal) auffassen.

A0.1.9

Es seien A,B Mengen. Zeige:

a) $\mathsf{P}(A)\cap \mathsf{P}(B)=\mathsf{P}(A\cap B)$

//D0.1.6 (5) $\mathsf{P}(M):=\{A|\ A\subseteq M\}$*//*

Bew: $M\in\mathsf{P}(A)\cap\mathsf{P}(B) \Leftrightarrow M\in\mathsf{P}(A)$ und $M\in\mathsf{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M\subset A$ und $M\subset B \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Beweis siehe unten*}}$

$M\subset A\cap B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M\in\mathsf{P}(A\cap B)$

* $M\subset A$ und $M\subset B \Leftrightarrow M\subset A\cap B$

„$\Rightarrow$" Sei $x\in M \underset{M\subset B,\, M\subset A}{\Rightarrow} x\in A$ und $x\in B \Rightarrow x\in A\cap B$

„$\Leftarrow$" Sei $x\in M \underset{M\subset A\cap B}{\Rightarrow} x\in A\cap B \Rightarrow x\in A$ und $x\in B$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A\cup B)$

//D0.1.4 (4) 1.) $M_1 \cup M_2 := \{x \mid x\in M_1$ *oder* $x\in M_2\}$*//*

//D0.1.6 (5) $\mathcal{P}(M) := \{A \mid A\subseteq M\}$*//*

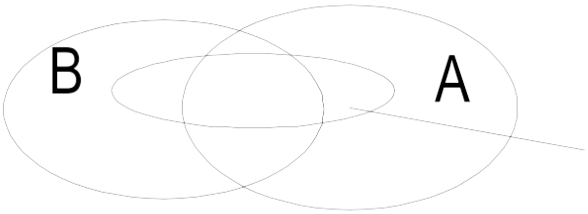
Bew: $M\in\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 1.)} M\in\mathcal{P}(A)$ oder $M\in\mathcal{P}(B) \underset{D0.1.6}{\Leftrightarrow} M\subset A$ oder $M\subset B \underset{*}{\Rightarrow}$

(Umkehrung stimmt nicht,siehe c)

$M\subset A\cup B \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.6} M\subset\mathcal{P}(A\cup B)$

$*x\in M \Rightarrow x\in A$ oder $x\in B \Rightarrow x\in A\cup B$

Anschauungsbeispiel



$M \not\subset A$ oder B

c) $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A\cup B)$ gilt im allgemeinen nicht(anhand eines Gegenbeispiels)

Lös: $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $a\neq b$, $A\cup B=\{a,b\}$

$\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)=\{\emptyset,\{A\}\}\cup\{\emptyset,\{B\}\}=\{\emptyset,A,B\}=\{\emptyset,\{a\}\{b\}\}\neq\{\emptyset,\{a\}\{b\}\{a,b\}\}=$

$\mathcal{P}(A\cup B)$. Also $\mathcal{P}(A)\cup\mathcal{P}(B)\neq\mathcal{P}(A\cup B)$

Bem: Wenn man den Bew b genau anschaut, so sieht man, dass nur an einer Stelle keine Äquivalenzumformung gemacht wurde. $M\subset A$ oder $M\subset B \Rightarrow M\subset A\cup B$. Hier gilt die Umkehrung nicht (z.B. $A=\{a\}$, $B=\{b\}$, $a\neq b$ und wähle $M=A\cup B$) Deshalb konnte in b) kein „=„ stehen.

A0.1.10 Seien A_1, A_2, B_1, B_2 Mengen. Zeige:

a) $(A_1 x A_2)\cap(B_1 x B_2) = (A_1\cap B_1) x (A_2\cap B_2)$

//D0.1.4 (4) 2.) $M_1\cap M_2 := \{x \mid x\in M_1$ *und* $x\in M_2$*//*

//D0.1.7 (5) $M_1 * M_2 := \{(x,y) \mid x\in M_1$ *und* $y\in M_2\}$*//*

Bew: $(x_1,x_2)\in(A_1*A_2)\cap(B_1*B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)} (x_1,x_2)\in A_1*A_2$ und $(x_1,x_2)\in B_1*B_2$ ¿ $\underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.7)}$

$(x_1\in A_1$ und $x_2\in A_2)$ und $(x_1\in B_1$ und $x_2\in B_2)\Leftrightarrow$

$(x_1\in A_1$ und $x_1\in B_1)$ und $(x_2\in A_2$ und $x_2\in B_2) \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.4\ 2.)}$

$x_1\in A_1\cap B_1$ und $x_2\in A_2\cap B_2 \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.7)} (x_1,x_2)\in(A_1\cap B_1) x (A_2\cap B_2)$

b) $(A_1 x A_2)=\emptyset \Leftrightarrow A_1=\emptyset$ oder $A_2=\emptyset$

*//D0.1.7 (5) M1*M2 :=* $\{(x,y) \mid x\in M_1$ *und* $y\in M_2\}$*//*

Bew: dazu äquivalente Aussage $(A_1*A_2)\neq\emptyset \Leftrightarrow A_1\neq\emptyset$ und $A_2\neq\emptyset$

$(A_1*A_2)\neq\emptyset \Leftrightarrow \exists\ (a_1,a_2)\in A_1*A_2 \underset{D0.1.7}{\Leftrightarrow} \underbrace{\Leftrightarrow}_{D0.1.7} \exists\ a_1\in A_1$ und $\exists\ a_2\in A_2 \Leftrightarrow$

$A_1\neq\emptyset$ und $A_2\neq\emptyset$

Andere Formulierung:

„⇒" Sei $(A_1*A_2)=\emptyset$. Annahme: $A_1\neq\emptyset$ und $A_2\neq\emptyset \Rightarrow \exists\ a_1\in A_1$ und $\exists\ a_2\in A_2 \Rightarrow$ $(a_1,a_2)\in A_1*A_2$ Widerspruch da $(A_1*A_2)=\emptyset$. Also Annahme falsch, d.h. $A_1=\emptyset$ oder $A_2=\emptyset$

„⇐" Sei $A_1=\emptyset$ oder $A_2=\emptyset$. Annahme: $(A_1*A_2)\neq\emptyset \Rightarrow (a_1,a_2)\in A_1*A_2 \Rightarrow$ $\exists\ a_1\in A_1$ und $\exists\ a_2\in A_2 \Rightarrow A_1\neq\emptyset$ und $A_2\neq\emptyset$.
Widerspruch, also Annahme falsch, d.h. $(A_1*A_2)=\emptyset$.

c) (.) Wenn $A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$, so $A_1*A_2\subset B_1*B_2$;
(..) im Falle $A_1*A_2\neq\emptyset$ gilt auch die Umkehrung
(d.h., wenn $A_1*A_2\subset B_1*B_2$, so $A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$.

Bew: (.) Z.z. $A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2 \Rightarrow A_1*A_2\subset B_1*B_2$.

Sei $(x_1,x_2)\in A_1*A_2 \Rightarrow x_1\in A_1$ und $x_2\in A_2 \underset{A_1\subset B_1,\,A_2\subset=B_2}{\Rightarrow} x_1\in B_1$ und $x_2\in B_2 \Rightarrow$

$(x_1,x_2)\in B_1*B_2$ d.h. $A_1*A_2\subset B_1*B_2$
(d.h. wenn $A_1*A_2\subset B_1*B_2$, so $A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$)

(..) Zusätzlich sei $A_1*A_2\neq\emptyset$

Z.z. $A_1*A_2\subset B_1*B_2 \Rightarrow A_1\subset B_1$ und $A_2\subset B_2$:

Bew von $A_1\subset B_1$: Sei $\underline{x_1\in A_1} \Rightarrow$ Nach b) folgt aus $A_1*A_2\neq\emptyset$, daß $A_2\neq\emptyset$ $\Rightarrow \exists\ x_2\in A_2 \Rightarrow (x_1,x_2)\in A_1*A_2 \underset{A_1*A_2\subset B_1*B_2}{\Rightarrow} (x_1,x_2)\in B_1*B_2 \Rightarrow x_1\in B_1$ und $x_2\in B_2$

$\Rightarrow \underline{x_1\in B_1} \Rightarrow A_1\subset B_1$

Bew von $A_2\subset B_2$ analog

Rechenregeln, Folgerungen zu Mengen (8)

1.) Für jeweils beliebige Mengen M_1, M_2, M3 gelten die

a) Kommutativgesetze

$M_1\cup M_2 = M_2\cup M_1$ $\qquad$ $M_1\cap M_2 = M_2\cap M_1$

b) Assoziativgesetze

$(M_1\cup M_2)\cup M_3 = M_1\cup(M_2\cup M_3)$, $\quad (M_1\cap M_2)\cap M_3 = M_1\cap(M_2\cap M_3)$

c) Distributivgesetze

$M_1\cap(M_2\cup M_3)=(M_1\cap M_2)\cup(M_1\cap M_3)$, $\quad M_1\cup(M_2\cap M_3)=(M_1\cup M_2)\cap(M_1\cup M_3)$

Bew: $x\in M_1\cap(M_2\cup M_3) \Leftrightarrow x\in M_1$ und $(x\in M_2$ oder $x\in M_3) \Leftrightarrow$ $(x\in M_1$ und $x\in M_2)$ oder $(x\in M_1$ und $x\in M_3) \Leftrightarrow x\in(M_1\cap M_2)\cup(M_1\cap M_3)$.

2.) Für beliebige Mengen M_1, M_2 gilt

a) $M_1\cup M_2 = M_2 \Rightarrow M_1\subset M_2$

Bew: A0.1.1

b) $M_1\cup\emptyset = M_1$, $\quad M_1\cap\emptyset = \emptyset$

c) $M_1\subset M_2 \Rightarrow (M_1{}^C)^C = M_1$

d) $(M_1\cup M_2)^C = M_1{}^C\cap M_2{}^C$ $\quad (M_1\cap M_2)^C = M_1{}^C\cup M_2{}^C$ Morgansche Regeln

Bew: $x\in(M_1\cup M_2)^C \Leftrightarrow x\notin(M_1\cup M_2) \Leftrightarrow x\notin M_1$ und $x\notin M_2 \Leftrightarrow x\in M_1{}^C\cup M_2{}^C$.

Allgemeiner:
Sind A_j, für $j\in J$, eine beliebige Anzahl von Teilmengen einer festen Grundmenge X, so gelten:

$X/(\cup_{j\in J} A_j) = \cap_{j\in J}(X\backslash A_j)$, $X\backslash(\cap_{j\in J} A_j) = \cup_{j\in J} A_j (X\backslash A_j)$

Das Komplement einer Vereinigung ist der Durchschnitt der Komplemente....

Bew: Sei $x\notin X/(\cup_{j\in J} A_j)$, d.h., $x\in A_j$ für mindestens ein $j\in J$.
Das ist gleichbedeutend mit $x\notin X/A_j$ für dieses j, also $x\notin \cap_{j\in J}(X\backslash A_j)$, und somit ist $X/(\cup_{j\in J} A_j) = \cap_{j\in J}(X\backslash A_j)$.
Zweiter Teil analog

e) $M_1\subset M_2(\subset M_3) \Leftrightarrow M_2^C \subset M_1^C$.

Bem: Dualitätsprinzip. Bei Komplementbildung finden folgende Vertauschungen statt:
$\cup\to\cap$, $\cap\to\cup$, $\subset\to\supset$, $\supset\to\subset$, $M\to M^C$, $M^C\to M^{C\,C}=M$.

A0.1.11 Setze $B_j=X\backslash A_j$ $\forall$ $j\in J$ und führe die zweite de Morgansche Regel auf die erste zurück: $M_1\subset M_2(\subset M_3) \Leftrightarrow M_2{}^C \subset M_1{}^C$

A0.1.12 Es seien A,B,C Mengen. Zeige: $C\subset A \Leftrightarrow (A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$

//Distributivgesetze (8): $M_1 \cup (M_2\cap M_3) = (M_1\cup M_2) \cap (M_1\cup M_3)$//
//D0.1.4 (4) 2.) $M_1\cap M_2 := \{x \mid x\in M_1$ und $x\in M_2$//

Bew: „⇒“ Sei $C\subset A$. Z.z $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$:

$$(A\cap B)\cup C \underset{\text{Distributivgesetz}}{=} \underbrace{(A\cup C)}_{=A,\ da\ C\subset A} \cap (B\cup C) = A\cap(B\cup C)$$

„⇐“ Sei $(A\cap B) \cup C = A \cap (B\cup C)$ Z.z $C\subset A$

Sei $x\in C \Rightarrow x\in A\cap B$ oder $x\in C \Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup C$

$\underbrace{\Rightarrow}_{D\,0.1.4.2\ 2.)}$ $x\in A$ und $x\in(B\cup C) \Rightarrow x\in A$ d.h. $C\subset A$

Widerspruchsbeweis:
Sei $x\in C$. Annahme $x\notin A$ ($\Rightarrow x\notin A$ oder $x\notin B\cup C$)
$x\notin A\cap(B\cup C) \Rightarrow x\notin (A\cap B)\cup C$
(d.h. nicht ($x\in A\cap B$ oder $x\in C$)) $\Rightarrow x\notin A\cap B$ und $x\notin C \Rightarrow$
$x\notin C$ Widerspruch, also ist die Annahme falsch, d.h. $x\in A$
(Wir haben gezeigt: $x\in C \Rightarrow x\in A$)

A0.1.13 (Siehe auch Distributivgesetze)
Seien A,B und C Mengen. Zeige:
a) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
Lös: $x\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow x\in A$ oder $x\in B\cap C \Leftrightarrow x\in A$ oder ($x\in B$ und $x\in C$)
$\Leftrightarrow$ ($x\in A$ oder $x\in B$) und ($x\in A$ oder $x\in C$) $\Leftrightarrow x\in(A\cup B)$ und $x\in(A\cup C) \Leftrightarrow$
$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$

b) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

A0.1.14
Es seien A,B und C Teilmengen einer Menge $X\neq\emptyset$.Zeige:
a)$A\subset B \Leftrightarrow B^c\subset A^c$.
Lös:(.)$A\subset B \Rightarrow B^c\subset A^c$: Sei $x\in B^c$, d.h. $x\notin B \Rightarrow x\notin A$ (sonst $x\in A \Rightarrow x\in B$ Widerspruch) $\Rightarrow x\in A^c \Rightarrow B^c\subset A^c$
(..)Sei $B^c\subset A^c$,es folgt nach (.)$(A^c)^c\subset(B^c)^c\Rightarrow A\subset B$
b)$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
Lös:Sei $x\in(A\cap B)^c$ baf $\Leftrightarrow x\notin(A\cap B) \Leftrightarrow x\notin A$ oder $x\notin B \Leftrightarrow$ $x\in A^c$ oder $x\in B^c \Leftrightarrow x\in A^c\cup B^c$

D0.1.8(10) Sei $S\neq\emptyset$ ein System von Mengen (= Menge von Mengen), dann heißt
1.)die Menge $_{M\in S}M := \{x\,|\; \exists\; M\in S: x\in M\}$
die Vereinigung aller Mengen aus S
2.)die Menge $_{M\in S}M := \{x\,|\; \forall\; M\in S: x\in M\}$
der Durchschnitt aller Mengen aus S
3.)das System S (paarweise) disjunkt:$\Leftrightarrow$
$\forall\; M_1,M_2\in S,\; M_1\neq M_2 : M_1\cap M_2 = \emptyset$

Bem:Die Morgan'schen Regeln gelten für beliebige $\cup\;\cap$, d.h., falls für ein System von Mengen $S\neq\emptyset$ und eine Menge $\overline{M}$ gilt: $M\subset\overline{M}$:
$\forall\; M\in S$ (.) $(_{M\in S}M)^C = {}_{M\in S}M^C$, (..) $(_{M\in S}M)^C = {}_{M\in S}M^C$

RR 2c) $M_1\subset M_2 \Rightarrow (M_1{}^C)^C = M_1$
Bew:(.)$x\in(_{M\in S}M)^C \Leftrightarrow x\in\overline{M}$ und $x\notin {}_{M\in S}M \Leftrightarrow x\in\overline{M}$ und $x\notin M\;\forall\; M\in S \Leftrightarrow$
$x\in M^c\;\forall\; M\in S \Leftrightarrow x\in {}_{M\in S}M^C$
(..)$(_{M\in S}M)^C \underset{\text{RR 2c}}{=} (_{M\in S}(M^C)^C)^C = ((_{M\in S}M^C)^C)^C \underset{(.)}{=} {}_{M\in S}M^C$

Bem: $S=\emptyset$: $_{M\in S}M := \emptyset$

A0.1.15 Beweise: $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$
#Lös: $\forall\; x\in(A\setminus(B\setminus C)$ gilt: $\{x\in A \wedge x\notin(B\setminus C)\} \Leftrightarrow \{x\in A \wedge(x\notin B \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow$
$\{x\in A \wedge(x\notin B) \wedge (x\in A \wedge x\in C)\} \Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$

A0.1.16 Mengen in einfacher Form angeben
a) $X= \bigcup_{q\in Q} \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]$
Lös: Sei $q\in\mathbb{Q}$ baf $\Rightarrow q \underset{q-\varepsilon\leq q\leq q+\varepsilon}{\in} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]\supset \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

- $x>q \Rightarrow \exists\; \varepsilon_t>0$: $x>q+\varepsilon_t+$ (Bsp $\varepsilon_t=\frac{1}{2}(x-q)$) $\Rightarrow x\notin[q-\varepsilon_t,q+\varepsilon_t]$
- •• $x>q$ analog $x\notin[q-\varepsilon_t,q+\varepsilon_t]$
- • & •• $x\notin {}_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \Rightarrow \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\{q\} \Rightarrow$

$X= \bigcup_{q\in Q}\bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]= {}_{q\in Q}\{q\} =\mathbb{Q}$.
b) $Y= \bigcap_{q\in Q}\bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]$
Lös : Sei $q\in\mathbb{Q}$ baf, x beliebig, $\varepsilon>|x-q|$ beliebig $\Rightarrow x\in[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \underset{\text{unabhängig von`q}}{\Rightarrow}$
$x\in \bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon] \Rightarrow \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\mathbb{R} \Rightarrow$
$Y= \bigcap_{q\in Q}\bigcup_{\epsilon>0,\epsilon\in R}[q-\varepsilon,q+\varepsilon]= \bigcap_{q\in Q} \underset{?}{=} \mathbb{R}$.

c) $Z=\bigcup_{q\ni Q}\ \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [q-\varepsilon,q+\varepsilon]$

Lös: $\varepsilon>0$ baf, wähle $n\in\mathbb{N}$: $n \underbrace{\leq}_{N\ unbeschränkt} 2\varepsilon \underbrace{\Rightarrow}_{0\in Q,n\in Q} =[0-\varepsilon,0+\varepsilon]\in \bigcap_{q\in Q}$ & $[n-\varepsilon,n+\varepsilon]\in \underbrace{\Rightarrow}_{n<2\varepsilon} \bigcap_{q\in Q}$

$[0-\varepsilon,0+\varepsilon]\cap[n-\varepsilon,n+\varepsilon]=\varnothing \Rightarrow \bigcap_{q\in Q}([0-\varepsilon,0+\varepsilon]\cap[n-\varepsilon,n+\varepsilon])=\varnothing \underbrace{\Rightarrow}_{\varepsilon\ beliebig}$

$Z=\bigcup_{q\ni Q}\ \bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R} [[q-\varepsilon,q+\varepsilon]=\bigcap_{\epsilon>0,\epsilon\in R}\varnothing=\varnothing$

A0.1.17

Def: $\Delta(Z):=\{(x,y)\in Z|x=y\}\subset Z^2$, Zeige: $X\subset Y \Leftrightarrow \Delta(X)\subset\Delta(Y)$

Bew: „$\Rightarrow$“ Sei $X\subset Y$ & $(a,b)\in\Delta(X)\Rightarrow (a,b)\in X^2=X\times X$, $a=\cancel{b \Rightarrow}$ $(a,b)\in\Delta(Y)$

„$\Leftarrow$“ Sei $\Delta(X)\subset\Delta(Y)$ & $x\in X \Rightarrow (x,x)\in X^2 \Rightarrow (x,x)\in\Delta(X) \Rightarrow (x,x)\in\Delta(Y)\Rightarrow$

$(x,x)\in Y^2 \Rightarrow x\in Y$

A0.1.18 $X,Y\neq\varnothing$, $f:X\to Y$, $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\ \forall\ A,B\in X$

Zu zeigen: f injektiv $\Leftrightarrow f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)\ \forall\ A,B\in X$

Bew: «$\Rightarrow$» f injektiv $\Leftrightarrow y\in f(A)\cap f(B)$ (Z.z $y\in f(A\cap B)$) $\underset{y\in f(A),y\in f(B)}{\Rightarrow}$

$\exists\ x\in A:y=f(x),\exists\ \tilde{x}\in B:y=f(\tilde{x}) \underset{f\ injektiv,x,\tilde{x}\in X}{\Rightarrow} x=\tilde{x} \Rightarrow x=\tilde{x}\in A\cap B \Rightarrow \tilde{x}$

$y=f(x)=f(\tilde{x})\in f(A\cap B)$

»$\Leftarrow$" $x,\tilde{x}\in X$, $y:=f(x)=f(\tilde{x}) \Rightarrow y\in \underbrace{f(\{x\})}_{=\{f(x)\}}\cap\underbrace{f(\{\tilde{x}\})}_{=\{f(\tilde{x})\}}=f(\{x\}\cap\{\tilde{x}\}) \underset{\{x\}\cap\{\tilde{x}\}\neq\varnothing}{\Rightarrow} x=\tilde{x}\Rightarrow$

f injektiv da $y\in f(\{x\}\cap f(\{\tilde{x}\})$