0.2 (100) **Relationen, Funktionen** $\bigcap\limits_{M\in S} M$

D0.2.1 (100) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Jede Teilmenge $R\subset X\times Y$ heißt eine Relation der Menge X zur Menge Y

Bez: $x \overset{R}{\sim} y$ oder $xRy :\Leftrightarrow (x,y)\in R$ x steht in Relation zu y bzw

$x\not R y :\Leftrightarrow (x,y)\notin R$ (manchmal nur $x\sim y$)

Falls X=Y heißt $R\subset X\times X = X^2$ Relation in oder auf X

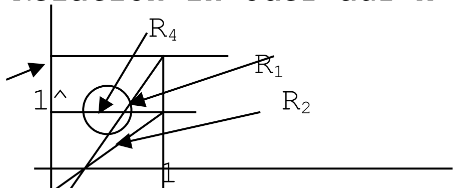
Bsp: $X=[0,1]$, $Y=[0,2]$

$x \overset{R_1}{\sim} y \Leftrightarrow y=2x\ (0\le x\le 1)$

$x \overset{R_2}{\sim} y \Leftrightarrow y=x$

$x \overset{R_3}{\sim} y \Leftrightarrow x\in[0,1],\ y\in[0,2]$

$R_3 = X\times Y$ (Rechteck)



$x \overset{R_4}{\sim} y \Leftrightarrow (x-0{,}5)^2+(y-1)^2=(1/4)^2,\ x\in[1/4,3/4],\ y\in[3/4,5/4]$

siehe auch A1.1.9. Verständlich, wenn „Schulrechenregeln" vorerst schon jetzt als bewiesen genommen werden. Die Beweise erfolgen allerdings erst nach 0.2, aber vor A1.1.9

#Folgendes habe ich erst besser verstanden, nachdem ich die Bsp gelesen
#habe. Insbesondere bei der Eigenschaft reflexiv. In Bsp
#wird die Verbindung zwischen den Elementen eines Paares wie (x,y), hier
#also x und y, oft verbal hergestellt:
#(Bsp 4 weiter unten.... Gerade a parallel zu Gerade b).
#Mein Verständnis wurde aber erst bei Verbindungen über eine
#"Rechenvorschrift" erhöht.

D0.2.2 (100)

Schreibweise: $(x,y)\in R \Leftrightarrow x\sim y$, auch wenn $R\subset X\times X$

1.) Eine Relation R auf X (d.h. $R\subset X\times X$) heißt,

reflexiv: $\Leftrightarrow \forall\, x\in X$ gilt xRx (d.h. $(x,x)\in R$) *D0.2.3 (105)*

symmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\, x,y\in X$ mit $xRy \Rightarrow yRx$
(d.h. $(x,y)\in R \Rightarrow (y,x)\in R$)

antisymmetrisch: $\Leftrightarrow \forall\, x,y\in X$ mit xRy und $yRx \Rightarrow x=y$
(d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,x)\in R) \Rightarrow x=y$)

transitiv: $\Leftrightarrow \forall\, x,y,z\in X$ mit xRy und $yRz \Rightarrow xRz$
(d.h. $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$)

2.) Eine Relation R auf X heißt Äquivalenzrelation (ÄR): $\Leftrightarrow$
R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv

Bsp:
- "=" ist ÄR
- $R_{\le}=\{(x,x'):x\le x'\}$ ist keine ÄR… keine Symmetrie!
- $X=\mathbb{Z}$, $x\sim x' \Leftrightarrow x-x'$ ist gerade

Bew: $x\sim x \Leftrightarrow x-x=0\ \forall\, x\in\mathbb{Z}$, 0 ist gerade... reflexiv

$x-x'$ gerade $\Rightarrow$ (x & x' gerade) oder (x & x' ungerade) $\Rightarrow$
$x'-x$ gerade …..symmetrisch

$x-x'$ & $x'-x''$ gerade $\Rightarrow (x-x')+(x'-x'')=x-x''$ gerade $\Rightarrow$ transitiv
$\Rightarrow$ ÄR

3.) Ist R eine ÄR auf X, so heißt für jedes $x\in X$ die Menge
$x|_R := \{x'\in X \mid x\sim x'\} = \{x\in X \mid (x,x')\in\sim\}$ eine Äquivalenzklase (ÄK) von x bzgl R. Jedes $x'\in x|_R$ heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

Bsp:

1.) $X=[0,1]$, $R_k\subset[0,1]\times[0,1]=[0,1]^2$ für R_1 bis R_4 !!!!!!!!!!!!!!

$R_1:=\{(x,x^2):0\le x\le 1\}$ ist keine ÄR, denn $1/2 \overset{R_1}{\sim} 1/2$ gilt nicht

$R_2:=\{(x,x):0\leq x\leq 1\}$ ist ÄR, $x_{|R}=\{x\}\ \forall\ x\in[0,1]$

$R_3:=\{(x,y):0\leq x,\ y\leq 1\}$ ist ÄR, $x_{|R}=\{[0,1]\}\ \ \forall\ x\in[0,1]$

Beachten: $R_3\subset X\times X=[0,1]\times[0,1]$

$R_4:=\{(x,y):y=x$ oder $y=1-x\}$ ist ÄR, $x_{|R}=\{x,1-x\}\cup\{x,x\}\ \forall\ x\in[0,1]$?

2.) $X=\mathbb{Z}$, $x\overset{R}{\sim}y:\exists\ t\in\mathbb{Z}$ und $x=3t+y$

(.) $x\overset{R}{\sim}x$: $x=3t+x(=y)\Leftrightarrow t=0$ Reflexiv ok

(..) $x\overset{R}{\sim}y \overset{?}{\Rightarrow} y\overset{R}{\sim}x$…. Antwort nächste Zeile

$x\overset{R}{\sim}y\Leftrightarrow x=3\tilde{t}+y\ \Leftrightarrow\ y=-3\tilde{t}+x=\underbrace{3(-\tilde{t})}+x$ symmetrisch ok

(...) $x\overset{R}{\sim}y\Leftrightarrow x=3t_1+y$, $y\overset{R}{\sim}z\Leftrightarrow y=3t_2+z$. Wir wollen $x=3t_3+z$.

$$x=3t_1+y=3t_1+3t_2+z=\underbrace{(3(t_1+t_2)}_{=t_3}+z \text{ transitiv ok}$$

ÄK: $0_{|R}=\{y\in X\,|\,y\overset{R}{\sim}0$, d.h. $y=3t, t\in\mathbb{Z}\}=\{0,3,-3,6,-6,\ldots\}$

$1_{|R}=\{y\in X\,|\,y=1-3t, t\in\mathbb{Z}\}=\{1,-2,-5,-8\ldots.4,7,10\ldots\ldots\}$

$2_{|R}=\{y\in X\,|\,y=2-3k, k\in\mathbb{Z}\}=\{1,-1,5,-4,8,\ldots\}$

$3_{|R}=0_{|R}$ usw

Partition: $\{0_{|R},1_{|R},2_{|R}\}$

3.) X={Geraden einer Ebene}, $a\overset{R}{\sim}b\Leftrightarrow a$ parallel zu b

(.) reflexiv a parallel zu a

(..) $a\overset{R}{\sim}b\Rightarrow b\overset{R}{\sim}a$ symmetrisch

(...) $a\overset{R}{\sim}b\Rightarrow b\overset{R}{\sim}c\ \ \tilde{\mathrm{P}}\ \ a\overset{R}{\sim}c$ transitiv

ÄK: unendlich viele ÄK, alle parallen Geraden

4.) $X=\{1,2\}$, $R=\{(1,1),(2,2),(1,2)\}$ d.h. $x\overset{R}{\sim}y\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\text{ oder}\\ x=1,\ y=2\end{cases}$

$(x,x)\in R\ \forall\ x\in X$ ... reflexiv

$(1,2)\in R$, $(2,1)\notin R$....nicht symmetrisch, keine ÄR

5.) Bsp für transitiv: $<$...$x<y$, $y<z\Rightarrow x<z$

6.) Auf $\mathbb{N}$ gilt $x\sim y\Leftrightarrow x-y$ gerade, $x\sim y\Leftrightarrow x+y$ gerade sind Äquivalenzrelationen, jedoch

- $x\sim y\Leftrightarrow x,(y$ gerade) (z.B. $1,1\notin R$ da zu x=1 nur 2,4,6,… gehört, d.h. keine Refelexivität) und
- $x\sim y\Leftrightarrow x-y$ ungerade, $x\sim y\Leftrightarrow x+y$ ungerade sind keine Äquivalenzrelationen.
- $X=\mathbb{Z}$, $k,n\in\mathbb{Z}$, $k\sim n\Leftrightarrow k-n$ gerade (unter anderem k-0=k gerade, 2k+1-1 gerade)

$0_{|R}=\{k\in\mathbb{Z}\,|\,k\sim 0\}\underbrace{=}_{k-n\,gerade}\{\text{gerade Zahlen}\}=2*\mathbb{Z}=\{2k:k\in\mathbb{Z}\}$

$1_{|R}=\{k\in\mathbb{Z}\,|\,k\sim 1\}\underbrace{=}_{(2Z+1)-1\,gerade}\{\text{ungerade Zahlen}\}=2*\mathbb{Z}+1$

$\mathbb{Z}=0_{|R}\cup 1_{|R}$ mit $0_{|R}\cap 1_{|R}=\emptyset$

7.) $X=\mathbb{Q}$; $r,s\in\mathbb{Q}$, $r\sim s \Leftrightarrow r-s$ gerade ganze Zahl

//3.) Ist R eine ÄR auf X, so heißt für jedes $x\in X$ die Menge

// $x_{|R} := \{x'\in X \mid x\sim x'\}=\{x\in X \mid (x,x')\in\sim\}$ eine Äquivalenzklase (ÄK) von x

// bzgl R. Jedes $x'\in x_{|R}$ heißt ein Repräsentant dieser ÄK.

$r\in\mathbb{Q}$, $\{r\in\mathbb{Q} \mid r-s\in\{2Z\}\}$

Bsp: $s=15{,}67$, $r=1{,}67$; $r-s=-14$

$s=-15{,}67$, $r=0{,}33$; $r-s=16$

$\Rightarrow r_{|R}=0\leq r<2$.... unendlich viele ÄK

A0.2.1 Sei ~ eine Äquivalenzrelation auf X

a) Zeige: $\forall\ x\in X$ ist die Menge $B(x):=\{y\in X \mid$ es gilt nicht $y\sim x\}$ keine Äquivalenzklasse von ~

b) Zeige: Wenn ~ nur 2 Äquivalenzklassen hat so ist B(x) eine Äquivalenzklasse

c) Zeige: Wenn es ein $x\in X$ gibt, sodaß B(x) eine Äquivalenzklasse ist, so hat ~nur 2 Äquivalenzklssen.

d) Zeige: Die Aussage, $\forall\ x_1,x_2,x_3\in X$ gilt: Wenn weder $x_1\sim x_2$ noch $x_2\sim x_3$ gilt, so gilt auch nicht $x_1\sim x_3$ ist falsch

e) Zeige: Die Aussage, $\forall\ x_1,x_2,x_3\in X$ gilt: Wenn weder $x_1\sim x_2$ noch $x_2\sim x_3$ gilt, so gilt jedenfalls $x_1\sim x_3$ ist ebenfalls falsch.

A0.2.2 Definiere auf $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ eine Relation R durch $(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2) \Leftrightarrow x_1y_2=x_2y_1$. Entscheide, ob es sich hierbei um eine ÄR handelt und bestimme ggf die ÄK.

Lös: $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$, $y_1,y_2\in\mathbb{N}$, z.z.: $\overset{R}{\sim}$ definiert eine ÄR

#Die „Rechenvorschrift ist eine Beziehung zwischen Paaren (u,v))#

Reflexivität : Es sei $(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \Rightarrow xy=xy$, $(x,y) \overset{R}{\sim} (x,y)$

$\#(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_1y_1=x_1y_1$

Symmetrie : Es gelte $(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2)$, d.h. $x_1y_2=x_2y_1 \Rightarrow$

$(x_2,y_2) \overset{R}{\sim} (x_1,y_1)\ \# \Leftrightarrow x_2y_1=x_1y_2=x_2y_1 \Rightarrow$

Transitivität: Seien $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ mit

$(x_1,y_1) \overset{R}{\sim} (x_2,y_2)$ und $(x_2,y_2) \overset{R}{\sim} (x_3,\ x_1y_2=x_2y_1 \Rightarrow y_3) \Rightarrow$

$x_1y_2=x_2y_1$ und $x_2y_3=x_3y_2$.

Z.z : $x_1y_3=x_3y_1$. Es gilt $x_1y_3=\dfrac{x_2y_1}{y_2}y_3=x_2\dfrac{y_1y_3}{y_2}=\dfrac{x_3y_2}{y_3}\dfrac{y_1y_3}{y_2}=x_3y_1$

ÄK: $(x_0,y_0)|_R=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \mid x_0y=xy_0\}=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N} \mid x/y=x_0/y_0\}$

S0.2.1 (103)

Vor: Sei X beliebige Menge $\neq\emptyset$, dann gilt

1.) Ist R eine ÄR in/auf X, so ist die Menge aller ÄK von R eine Partition von X (d.h. X ist die Vereinigung von paarweise disjunkten ÄK$\neq\emptyset$, oder X ist in disjunkte ÄK $\neq\emptyset$ zerlegt: $X=\bigcup_{x\in X}(x|_R)$).

Bew: Seien $x,y\in X$. Es gebe ein $z\in x|_R \cap y|_R$. Zu zeigen $x|_R = y|_R$ durch den Schluss.. liegt ein Element in $y|_R$, dann auch in $x|_R$ und umgekehrt.
Sei $w\in y|_R$ d.h. $y\sim w$ & $(y\sim z \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR kommutativ}} z\sim y) \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR transitiv}} z\sim w \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR kommutativ}} w\sim z$.
$x\sim z \underbrace{\Rightarrow}_{\text{ÄR transitiv}} w\sim x \Rightarrow w\in x|_R$. Andere Richtung $w\in x|_R .. \Rightarrow .. w\in y|_R$ analog mit vertauschten Buchstaben x und y

Andere Formulierung:
Ist R eine ÄR auf X, dann bildet die Menge aller ÄK eine Partition auf X, d.h. X ist in paarweise disjunkte ÄK $\neq\emptyset$ zerlegt, sodass 2 Elemente aus X genau dann äquivalent sind, wenn sie in derselben Teilmenge liegen.
Andere Formulierung:
Vor: ~ eine ÄR auf X, $x,y\in X$
Ausage : $x_{|R} = y_{|R}$ oder $x_{|R}\cap y_{|R}=\emptyset \Leftrightarrow$
X ist die disjunkte Vereinigung aller Äquivalenzklasse

2.) Ist $\bigcup_{M\in S} M$ eine Partition von X mit $M\neq\emptyset$ und definiert man eine Relation (zunächst keine ÄR) auf X folgendermaßen:
$xRy \Leftrightarrow \exists\, M\in S$ mit $x,y\in M$, so ist R eine ÄR auf X und $S\subset(\mathcal{P}(X))$ ist genau die Menge aller ÄK bzgl R
Bew: $x,y\in X$, $xRy \Leftrightarrow \exists\, M\in S$: $x,y\in M$
a) $x\in X \Rightarrow \exists\, M\in S$: $x\in M \Rightarrow$ (refl) xRx
b) $xRy \Rightarrow \exists\, M\in S$: $x,y\in M \Rightarrow yRx$ (symm)
c) xRy und $yRz \Rightarrow \exists\, M_1,M_2\in S$: $x,y\in M_1$ $y,z\in M_2 \Rightarrow$
$y\in M_1\cap M_2 \neq \emptyset$ (da y drinliegt) $\underbrace{\Rightarrow}_{M_1\cap M_2=\phi} M_1=M_2 \Rightarrow x,z\in M_1 = M_2$
$\Rightarrow$ xRz (transitiv)

Andere Formulierung:
Umkehrung von 1.): Durch jede Partition von X wird eine ÄK definiert, wobei $x \overset{R}{\sim} y$, wenn x und y in derselben Teilmenge der Partition liegen.
Bew: Umgekehrt zu 1.) sei S eine Menge von Teilmengen von X mit $\bigcup_{A\in S} A=X$ und $A\cap A'=\emptyset$ für verschiedene Mengen $A,A'\in S$.
Wir definieren eine Relation auf X durch $x\overset{R}{\sim} y$, wenn x und y in einer Menge $A\in S$ liegen. Dann gilt
α) Es sei $x\in X \Rightarrow \exists\, A\in S$ mit $x\in A \Rightarrow x\overset{R}{\sim} x$
β) Es sei $x\overset{R}{\sim} y \Rightarrow \exists\, A\in S$ mit $x,y\in A \Rightarrow y\overset{R}{\sim} x$
γ) Es sei $x\overset{R}{\sim} y$, $y\overset{R}{\sim} z \Rightarrow \exists\, A_1\in S$ mit $x,y\in A_1$ und $A_2\in S$ mit $y,z\in A_2$,
dann ist insbesondere $y\in A_1\cap A_2 \underbrace{\Rightarrow}_{A\cap A'=\Phi} A_1=A_2 \Rightarrow x,z\in A_1 \Rightarrow x\overset{R}{\sim} z$

Weitere Erklärung zu 1.) und 2.):

Annahme:Auf $M\neq\emptyset$ ist für gewisse, nicht notwendig alle, Paare von Elementen x,y auf eine nicht weiter interessierende Weise eine ÄR erklärt. Für ein festes $x\in M$ betrachten wir die Menge $T_x:=\{u\in M: u\sim x\}$.

Trivial: $T_x\subset M$ und wegen Reflexivität gehört $x\in T_x$.

Angenommen die Mengen T_x und T_y seien nicht disjunkt sondern $\exists$ mindestens ein $z\in T_x\cap T_y \Rightarrow z\sim x$ und $z\sim y$.

$u\in T_x$ beliebig $\Rightarrow u\sim z$.

$z\sim x \underset{\text{Symmetrie}}{\Rightarrow} x\sim z \Rightarrow u\sim x$ und $x\sim z \underset{\text{Transitivität}}{\Rightarrow} u\sim z \underset{z\sim y,\text{Transitivität}}{\Rightarrow} u\sim y \Rightarrow u\in T_y$

$\Rightarrow T_x\subset T_y$.

Anolog nach Rollentausch von x und y $T_y\subset T_x$. T_y,T_x sind also entweder identisch oder disjunkt.Sei P Gesamtheit aller T_x, dann ist P eine Partition von M. P erzeugt in der oben geschilderten Weise eine ÄR $\underset{P}{\sim}$ auf M. Aus der Def dieser Relation einerseits und der Def der Mengen von P andererseits ergibt sich die Aussage $x\sim y \Leftrightarrow x \underset{P}{\sim} y$. Die von P erzeugte ÄR stimmt also mit der ursprünglichen vorhandenen überein.

A0.2.3

a) Es sei M eine beliebige Menge$\neq\emptyset$. Die Relation $\sim$ auf MxM sei wie folgt definiert: $(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2) :\Leftrightarrow x_2=y_2$

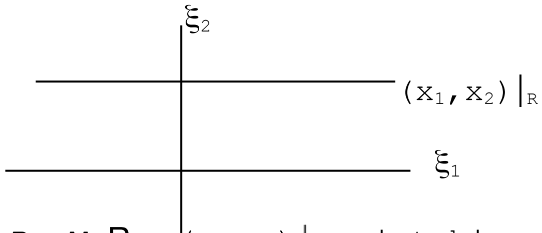
Zeige, dass $\sim$ eine ÄR (auf M) ist und bestimme alle ÄK

Bew:$\sim$ ist reflexiv: $x_2=x_2 \Rightarrow (x_1,x_2)\sim(x_1,x_2)\ \forall\ x_1,x_2\in M\times M$

$\sim$ ist symmetrisch :Sei $(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2) \Rightarrow x_2=y_2 \Rightarrow y_2=x_2 \Rightarrow$
$(y_1,y_2)\sim(x_1,x_2) \Rightarrow \forall\ (x_1,x_2),(y_1,y_2)\in M\times M$

$\sim$ ist transitiv: Seien $(x_1,x_2)\sim(y_1,y_2)\sim(z_1,z_2)$
$x_2=y_2\ \ y_2=z_2 \Rightarrow x_2=z_2 \Rightarrow$
$(x_1,x_2)\sim(z_1,z_2)\ \forall\ (x_1,x_2),(y_1,y_2)(z_1,z_2)\in M\times M$

ÄK: $(x_1,x_2)|_\sim =\{(y_1,y_2)\in M\times M \mid (y_1,y_2)\sim(x_1,x_2)\}=\{(y_1,y_2)\in M\times M \mid y_2=x_2\}=$
$\{(y_1,x_2) \mid y_1\in M\}$



z.B. $M=\mathbb{R}$ $(x_1,x_2)|_\sim$ ist hier Gerade durch $0,x_2$ parallel zur x_1 Achse.

Bem: $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\bigcup_{x_2\in\mathbb{R}} (x_1,x_2)|_\sim$ disjunkte Vereinigung

(Partition von $\mathbb{R}^2$, vgl S0.2.1) $x_2=y_2$ und $y_2=z_2 \Rightarrow x_2=z_2 \Rightarrow$

b) ● Auf $\mathbb{R}$ gilt

$x\sim y$ genau dann, wenn $xy\geq 0$,
Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?
Lös:
$x\sim y$ symmetrisch, da $xy=yx$; reflexiv, da $x*x\geq 0$,
nicht transitiv, da $1\sim 0$ wegen $1*0=0$, $0\sim -1$ wegen $0*(-1)=0$ aber
$1\not\sim -1$ wegen $1*(-1)<0$
Keine Äquivalenzrelation

●● Auf $\mathbb{R}$ gilt

$x\sim y$ genau dann, wenn $x-y$ $x\in\mathbb{Z}$.
Äquivalenzrelation? Ggf zu $x=2$? Äquivalenzklassen?

Lös: $x\sim y$ reflexiv da $\forall$ $x\in\mathbb{R}$: $x \overset{\sim}{=} x$ wegen $x-x=0\in\mathbb{Z}$;

$x\sim y$ symmetrisch, da $z=x-y \underset{x\overset{\sim}{=}y}{\in} \mathbb{Z} \Rightarrow -z=y-x \underset{x\overset{\sim}{=}y}{\in} \mathbb{Z}$;

$x\sim y$ transtiv, da $x\sim y$ & $y\sim z$ $\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-y\in\mathbb{Z}$ & $y-z\in\mathbb{Z} \Rightarrow$
$x-z=(x-y)+(y-z)\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\sim z$

$x \overset{\sim}{=} y$ ist Äquivalenzrelation

\# $2_{|\mathbb{R}} := \{y\in\mathbb{R} \mid y\sim 2\} = \{y\in\mathbb{R} \mid (2,y)\in R\} = \{y\in\mathbb{R} \mid (2-y)\in\mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$

\# $\mathbb{Z}_{|\mathbb{R}} := \mathbb{Z}$, Partition $P=\bigcup_{x\in R}\{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\} = \bigcup_{x\in[0,1]}\{x\pm n \mid n\in\mathbb{N}_0\}$

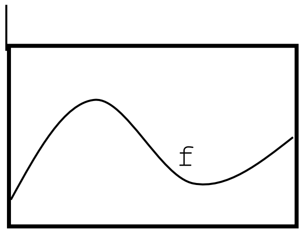
D0.2.3(106)

1.) Seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$. Eine (eindeutige) Abbildung oder Funktion f von X in Y oder von X nach Y ist eine Relation von X zu Y ($f\subset X\times Y$) mit der Eigenschaft:
$\forall\ x\in X:\ \exists$ genau ein ($\exists_1$) $y\in Y$ mit $(x,y)\in f$

Bez: $f:X\to Y$, $y=f(x)$, $x\mapsto y=f(x)$=das Bild von x unter der Abb f:
$X^Y:=\{f\,|\,f:X\to Y\}$=Menge aller Abb. $f: X\to Y$
Wir schreiben für das y mit $x\overset{R}{\sim}y$: $y=f(x)$ und $f:X\to Y$ mit $x\mapsto y=f(x)$ für die Abbildung, kurz f oder $f()$.
Bsp: $x\overset{R_1}{\sim}y$, $x\overset{R_2}{\sim}y$ (siehe oben) sind Abbildungen
$x\overset{R_3}{\sim}y$ $x\overset{R_4}{\sim}y$ keine Abb, d.h. nicht jedem x ein y zugeordnet bzw nicht nur ein y

Abb f

$X\times Y$



2.) Zwei Funktionen $f_i: X_i\to Y_i$ $i=1,2$ heißen gleich:$\Leftrightarrow$
$X_1=X_2$ und $Y_1=Y_2$ und $f_1(x)=f_2(x)$ $\forall$ $x\in X_1$
Bez: $f_1=f_2$ oder $f_1=f_2$ auf $X_1(=X_2)$
Bem: Gilt $f_1=f_2$ so ist $G(f_1)=G(f_2)$ (G...Graph).

3.) Bei geg Funktion $f: X\to Y$ heißt

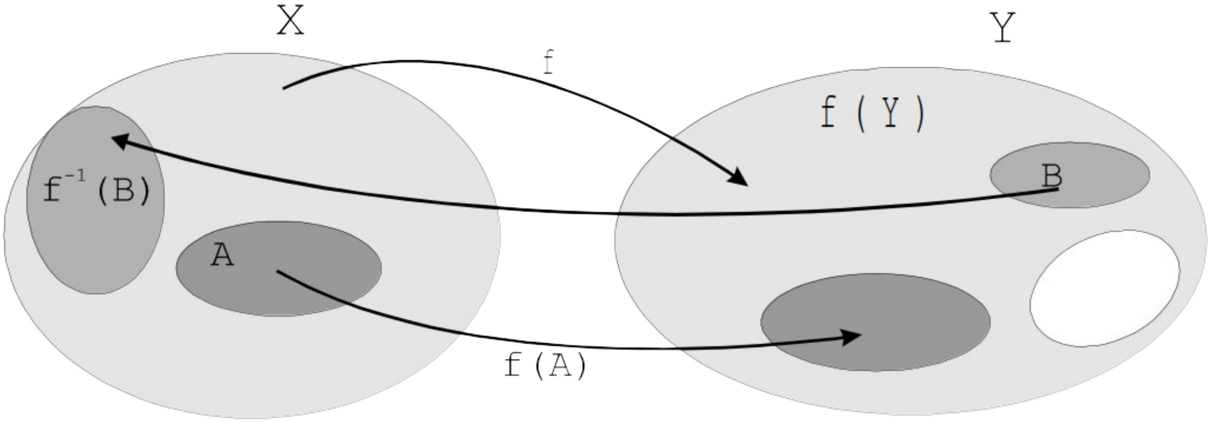
a) X der Definitionsbereich von f

b) Y der Wertebereich oder Wertevorrat oder Bildbereich von f

c) $G(f):=\{x,f(x)\,|\,x\in X\}= f\subset X\times Y$ der Graph von f oder
$R=\text{graph } f=\{x,f(x)\,|\,x\in X\}\subset X\times Y$

d) $f(A):=\{f(x)\,|\ x\in A\}$ das Bild der Teilmenge $A\subset X$ unter f.
$(=\{y\in Y\,|\ \exists\ x\in A:\ y=f(x)\})$, $(x,y)\in f$.
$f(X)$: Wertemenge von $f=\mathrm{Im}(f)$, $f\subset Y$

e) $f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$, d.h. das Urbild der Teilmenge $B \subset Y$

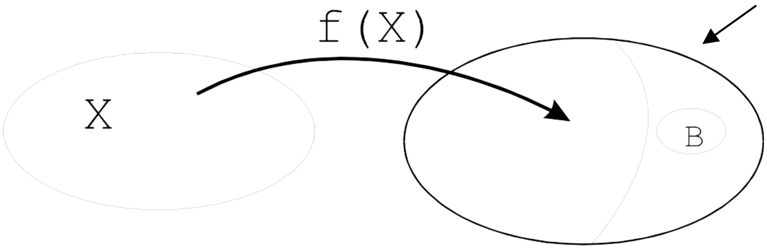


Für $A \subset X$ bzw. $B \subset Y$ bilden wir die Menge aller Urbilder bzw. Bilder von Elementen aus A bzw. B, d.h. $f(A)=\{f(x) \in Y : x \in A\}$, $f^{-1}(B)=\{x \in X \mid f(x) \in B\}$
Falls B nur ein Element hat, etwa b, schreiben wir auch $f^{-1}(b)$ anstatt $f^{-1}(B)$. Beachte aber, daß $f^{-1}(b)$ mehrere, evtl sogar unendlich viele Elemente haben kann (* weil für mehrere $x \in X$ $f(x)=y \in B$ sein kann)

Bem: Für $f: X \to Y$ gilt

1.) $f(A)=\emptyset \Leftrightarrow A=\emptyset$

2.) $f^{-1}(B)=\emptyset \Leftrightarrow B \subset Y \setminus f(X)$ Y…(das ganze «Ei»)



3.) $x_1=x_2 \in X \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

$f(x_1)$
x das ist keine Funktion, da nicht $\exists_1$ $y \in Y$...gilt
$f(x_2)$
#
x_1
$f(x_1)=f(x_2)$ das ist eine Funktion
x_2

A0.2.4 Vor: $A \neq \emptyset$, $A_1, A_2 \subset X$, Beweise: $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

Bew: Bsp

A_1: a → 1, b → 2, c → 2, 3
A_2: d

$f(A_1)=\{2\}$
$f(A_2)=\{1,2\}$

$\forall\ x \in A_1$ gilt $x \in A_2$
z.z: $\forall\ y \in f(A_1)$ gilt $y \in f(A_2)$
Sei $y \in f(A_1)$, y baf $\Rightarrow$
$\exists\ x \in A_1 : f(x)=y \underset{Vor}{\Rightarrow}$
$\exists\ x \in A_2 : f(x)=y \Rightarrow y \in f(A_2)$

A0.2.5 Es sei eine Funktion $f: A \to B$ gegeben. Die Mengen A_1, A_2 seien Teilmengen von A während B_1, B_2 Teilmengen von B seien.

Beweise: $B_1 \supset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

Bew: "$\subset$" von $\Leftrightarrow$ gilt zunächst nur $\Rightarrow$. Sei $x \in f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$ baf $\Leftrightarrow$

$f(x) \in B_1 \setminus B_2 \underset{*B_2 \subset B_1}{\Leftrightarrow} f(x) \in B_1$ und $f(x) \notin B_2 \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1)$ und $x \notin f^{-1}(B_2)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$

" $\supset$" siehe oben Teil $\Leftarrow$ von $\Leftrightarrow$

A0.2.6 Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f: X\rightarrow Y$ eine Abbildung.
Zeige für $A\subset X$, $B\subset Y$: $f(A)=\{f(x)|x\in A\}$ $f^{-1}(B)=\{x\in X|f(x)\in B\}$

a) $f^{-1}(Y\setminus B) = X\setminus f^{-1}(B)$
Bew: $x\in f^{-1}(Y\setminus B) \underset{\text{Def Urbild}}{\Leftrightarrow} f(x)\in Y\setminus B$ und $x\in X \Leftrightarrow f(x)\notin B$ und $x\in X$ und $f(x)\in Y$
$\Leftrightarrow x\notin f^{-1}(B)$ und $x\in X \Leftrightarrow x\in X\setminus f^{-1}(B)$

b) $f^{-1}(f(A))\supset A$
//D0.2.3 3.)(105) $f: X\rightarrow Y$:d) $f(A):=\{f(x)|\ x\in A\}$ Bild der Teilmenge $A\subset X$//
//unter f. $(=\{y\in Y|\ \exists\ x\in A:\ y=f(x)\})$, $(x,y)\in f$.//
//e) $f^{-1}(B):=\{x\in X|\ f(x)\in B\}$//
Bew: Sei $x\in A$ beliebig $\underset{\text{D0.2.3 3.)}}{\Rightarrow} f(x)\in \underbrace{f(A)}_{\tilde{B}} \Leftrightarrow x\in f^{-1}(\tilde{B}) = f^{-1}(f(A))$
c) $f(f^{-1}(B))\subset B$
Bew: Sei $y\in f(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\tilde{A}}) \underset{\text{D0.2.3 3.)}}{\Rightarrow} \exists\ \underbrace{x\in\tilde{A}=f^{-1}(B)}_{\text{d.h. } y=f(x)\in B}$ mit $f(x)=y \Leftrightarrow y=f(x)\in B$

A0.2.7 Sei $f:X\rightarrow Y$ eine Funktion und $A,B\subset X$ und $C,D\subset Y$. Zeige:
a) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$
b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ und finde ein Beispiel mit $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$
c) $f^{-1}(C\cup D)=f^{-1}(C)\cup f^{-1}(D)$
d) $f^{-1}(C\setminus D)=f^{-1}(C)\setminus f^{-1}(D)$

Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f(108)

a)(.) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)\ \forall\ A,B\subset X$ (..) $f(\bigcup_{M\in S} M)=\bigcup_{M\in S} f(M)\ \forall\ M\subset X$
Bew:(.) "$\subset$" Sei $y=f(A\cup B)$, y baf $\Rightarrow \exists\ x\in A\cup B: f(x)=y \Rightarrow$
$\exists\ x\in A$ oder $\exists\ x\in B: f(x)=y \Rightarrow \exists\ y\in f(A)$ oder $\exists\ y\in f(B) \Rightarrow$
$y\in f(A)\cup f(B): f(x)=y$
"$\subset$" Sei $y\in f(A)\cup f(B) \Rightarrow y\in f(A)$ oder $y\in f(B) \Rightarrow$
$x_1\in A: f(x_1)=y$ oder $x_2\in B: f(x_2)=y \Rightarrow \exists\ x\in A\cup B: f(x)=y$
(x_1 oder x_2 oder beide, eines erfüllt Bedingung auf jeden Fall)
$\Rightarrow y\in f(A\cup B) \Rightarrow$ "$\subset$" und "$\supset$", d.h. „="

(..) $y\in f(\bigcup_{M\in S} M) \Leftrightarrow \exists\ x\in \bigcup_{M\in S} M:\ y=f(x) \Leftrightarrow \exists\ M\in S$ und $\exists\ x\in M:\ y=f(x)$
$\Leftrightarrow \exists\ M\in S:\ y=f(M) \Leftrightarrow y\in \bigcup_{M\in S} f(M)$

b) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)\ \forall\ A,B\subset X$,
$f(\bigcap_{M\in S} M)\subset \bigcap f(M)$, $M\subset X$
sonstiges: $A,B\subset X, A\cap B=\emptyset$ und $f=\text{const}, X\neq\emptyset \Rightarrow f(A\cap B)=\emptyset$, $f(A)\cap f(B)\neq\emptyset$

Bsp: $a \to 1$ $A=\{a,b\}$, $B=\{a,c\}$
$b \to 2$ $f(A\cap B)=f(\{a\})=\{1\}\neq f(A)\cap f(B)=f(\{a,b\})\cap f(\{a,c\})=$
$c \to 2$, 3 $\{1,2\}\cap\{1,2\}=\{1,2\}\Rightarrow$
$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$

Bew: $y\in f(\bigcap_{M\in S} M) \Leftrightarrow \exists\ x\in \bigcap_{M\in S} M: y=f(x) \Rightarrow$
$\forall\ M\in S\ \exists\ x_M\in M$ (dasselbe x $\forall$ M) und $y=f(x) \Leftrightarrow \forall\ M\in S$: $y\in f(M)$
$\Leftrightarrow y\in \bigcap_{M\in S} f(M)$ $\forall\ M\in S: y\in f(M) \Leftrightarrow y\in \bigcap_{M\in S} f(M$

Andere Formulierung:
Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. Die Mengen A_1,A_2 seien Teilmengen von A, während B_1,B_2 Teilmengen von B seien.

Beweise: $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$
Lös: Sei $y\in f(A_1\cap A_2) \Rightarrow \exists\ x\in A_1\cap A_2: f(x)=y \Rightarrow$
$y\in f(A_1)$ (da $x\in A_1$) und $y\in f(A_2)$ (da $x\in A_2$) $\Rightarrow y\in f(A_1)\cap f(A_2)$
$\subset$, nicht $=$, da $x'\notin A_1\cap A_2$ aber $f(x')\in f(A_1)\cap f(A_2)$ sein kann,
(siehe auch Bsp oben)

c) $f^{-1}(A\ \cup\cap\ B)= f^{-1}(A)\ \cup\cap\ f^{-1}(B)$ $\forall A,B \subset Y$,
(.) $f^{-1}(\bigcup_{M\in S} M)= \bigcup_{M\in S} f^{-1}(M)$, (..) $f^{-1}(\bigcap_{M\in S} M)=\bigcap_{M\in S} f^{-1}(M)$, $M\subset Y$
Bew: (.) $x\in f^{-1}(\bigcup_{M\in S} M) \Leftrightarrow \exists\ y\in \bigcup_{M\in S} M: y=f(x) \Leftrightarrow$
$\exists\ M\in S$ und $\exists\ y\in M$: $y= f(x) \Leftrightarrow \exists\ M\in S$: $x\in f^{-1}(M) \Leftrightarrow$
$x\in \bigcup_{M\in S} f^{-1}(M)$

Andere Formulierung :

Es sei eine Funktion $f:A\rightarrow B$ gegeben. Die Mengen A_1,A_2 seien Teilmengen

$f^{-1}(B_1\cup B_2)= f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

Bew:(.)Sei $x\in f^{-1}(B_1\cup B_2):y=f(x)\in(B_1\cup B_2)$ $\underset{!}{\Leftrightarrow}$ $\exists$ $f(x)=y\in B_1$ oder $\exists$ $f(x)=y\in B_2$

$\underset{!}{\Leftrightarrow}$ $x\in f^{-1}(B_1)$ oder $x\in f^{-1}(B_2)$ $\underset{!}{\Leftrightarrow}$ $x\in f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$ $\underset{!}{\Leftrightarrow}$

$f^{-1}(B_1\cup B_2)$ $\underset{!}{=}$ $f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

$f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$ ...oder durch und ersetzen, bzw siehe(..)

(..) $f^{-1}(\bigcap_{M\in S})= f^{-1}(M)$ $\bigcap_{M\in S}$

//D0.1.4 2.) (4)$M_1\cap M_2:=\{x|x\in M_1$ und $x\in M_2\}$//

//(D0.2.3 3.)(105)e)$f^{-1}(B):=\{x\in X|\ f(x)\in B\}$, Urbild $B\subset Y$//

Bew:$x\in f^{-1}(\bigcap_{M\in S})$ $\Leftrightarrow$ $\exists$ $y\in\bigcap_{M\in S}:y=f(x)$ $\underset{D0.1.4\ 2.)}{\Rightarrow}$!

$\forall$ $M\in S$ $\exists$ $y\in M$: $y= f(x)$ $\underset{D0.2.3\ 3.e)}{\Rightarrow}$ $\forall$ $M\in S$: $x\in f^{-1}(M)$ $\Leftrightarrow$ $x\in f^{-1}(M)$

* $f^{-1}(\bigcap_{M\in S})\subset f^{-1}(M)$

Zu!,umgekehrt gilt:

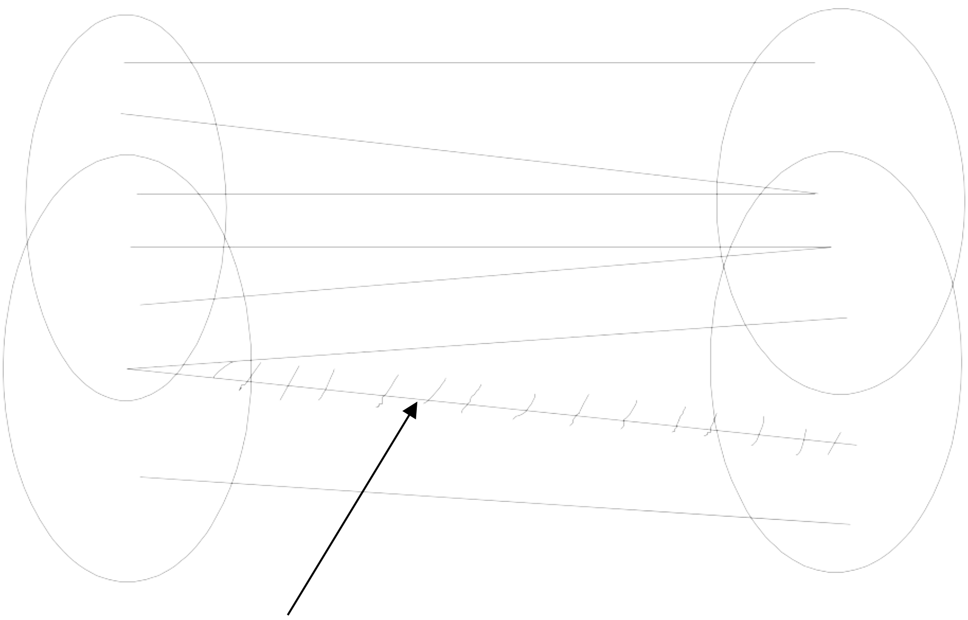
$\forall$ $M\in S:x\in f^{-1}(M)$ $\Rightarrow$ $\forall$ $M\in S$ $\exists$ $y=y_M\in M$: $y_{M\ldots\text{abhängig von }M}= f(x)$.

Da f Funktion(s Bem3), ist y_M dasselbe y $\forall$ $M\in S$ $\Rightarrow$

$\exists$ $y\in\bigcap_{M\in S}$: $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ $x\in f^{-1}(\bigcap_{M\in S})$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(\bigcap_{M\in S})\supset f^{-1}(M)$

$f^{-1}(\bigcap_{M\in S})= f^{-1}(M)$

#



\# nicht möglich ! da f Funktion ist, d.h.

\# $f(x_1)\neq f(x_2)$ $\Rightarrow$ $x_1\neq x_2$.

\# Jedem x ist nur 1 y zugeordnet, da f Funktion ist.

\# Siehe oben y_M=y!

A0.2.8 $X\neq\emptyset$, $A,B\subset X$, $f(X)\to Y$ Abbildung

a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$

Bew: $y\in f(A)\setminus f(B)\Leftrightarrow y\in f(A)\ \&\ y\notin f(B)$

$\Leftrightarrow\ \exists\ x\in A:\ y=f(x)\ \&\ f(\tilde{x})\neq y\ \forall\ \tilde{x}\in B\ \Rightarrow \exists\ x\in A\setminus B:\ y=f(x))$

$\Leftrightarrow\ y=f(A\setminus B)\ \Leftrightarrow\ f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$

b) Bedingung für $f(A)\setminus f(B)= f(A\setminus B)$?

Lös: nach a) $f(A)\setminus f(B)\subset f(A\setminus B)$, gesucht Bedingung für $f(A)\setminus f(B)\supset f(A\setminus B)$

$x\in A\setminus B\ \Rightarrow\ x\in A,\ y=f(A\setminus B)=f(x),\ \tilde{x}\in B,\ x\neq\tilde{x}$

Fall $y=f(x)\ \underset{f\ surjektiv}{=}\ f(\tilde{x})\in f(B)\ \Rightarrow\ y\notin f(A)\setminus f(B)\ \Rightarrow\ \cancel{f}(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$

Fall $y=f(x)\ \underset{f\ injektiv}{\neq}\ f(\tilde{x})\in f(B)\ \Rightarrow\ y\in f(A)\setminus f(B)\ \Rightarrow\ f(A\setminus B)\subset f(A)\setminus f(B)$

$\Rightarrow$ f injektiv $\Rightarrow\ f(A)\setminus f(B)= f(A\setminus B)$