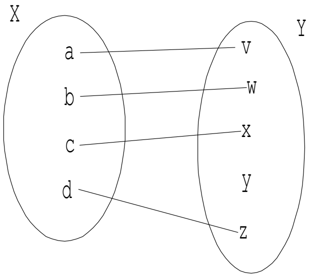
D0.2.4(200) Eine Abbildung(Funktion) $f: X \to Y$ heißt

1.) injektiv(eindeutig) oder Injektion: $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, d.h jedes $y \in Y$ hat max 1 Urbild $x \in X$ mit $y=f(x)$, d.h. aus $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$

#Bsp

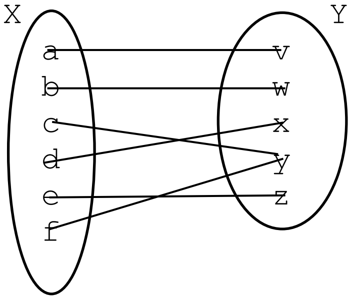


Wertebereich Y kann auch "zu groß" gewählt sein

f, d.h. für alle x Element von X existiert genau ein y.....

2.) surjektiv (Surjektion) (Abb von X auf Y): $\Leftrightarrow Y=f(X)$, (d.h. für $\forall\, y \in Y\ \exists$ mindestens ein $x \in X$: $y=f(x)$), d.h. Wertebereich nicht zu groß gewählt

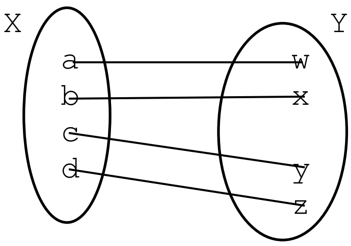
#Bsp



auch hier :f, d.h. $\forall\, x \in X\ \exists_1\, y$.....

3.) bijektiv oder Bijektion: $\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv
Zu jedem $y \in Y$ gibt es genau ein $x \in X$ mit $f(x)=y$.
In diesem Fall heißt die Funktion/Abb. $f^{-1}: Y \to X$ definiert durch $f^{-1}(y) := x$ für $y=f(x)$ die Umkehrabbildung oder Umkehrfunktion oder inverse Funktion zu f, $y \mapsto x$, wobei x dasjenige Element aus X sei, für das $y=f(x)$ gilt.
Eine Bijektion $f: X \to X$ heißt Permutation von X

#Bsp

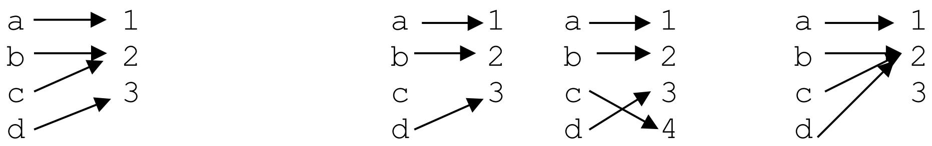


f,d.h.jedem $x \in X$ ist genau ein $y \in Y$ zu geordnet, $\forall\, y \in Y$ auf Grund der Eigenschaft surjektiv.

Bem:1.) Falls f nicht bijektiv, so existiert keine Umkehrfunktion auf Y
2.) Achtung: $f^{-1}(B)$ Urbild ist verschieden von $f^{-1}(x)$ der Umkehrfunktion

Bsp:1.) $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$ mit $f(z)=z^2$ ist weder injektiv (denn $f(-z)=(-z)^2=f(z)\ \forall\, z \in \mathbf{Z}$) noch surjektiv (denn z.B. hat 3 kein Urbild, $\#z^2=3$: $z \notin \mathbf{Z}$)
2.) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+ (:=\{r \in \mathbf{R} \mid r \geq 0\})$, die jeder Zahl ihren absoluten Betrag zuordnet, ist nicht injektiv, aber surjektiv.
3.) Abb der Menge $\{1,2,3\}$ in sich mit $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=2$ ist sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv.

4.) $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3\}$ bzw $B=\{1,2,3,4\}$



surjektiv $f(\{a\})=\{1\}$ $f(\{a,b\})=\{1,2\}$ $f^{-1}(\{1,2\})=\{a,b,c\}$ $f^{-1}(B\})=A$	keine Funktion kein Bild von c	bijektiv	$f(A)=\{1,2\}\neq B$

L0.2.1(201) Vor: X endliche Menge. f: $X\rightarrow X$ eien Abbildung
Aussage: a) f injektiv b) f surjektiv c) f bijektiv sind äquivalent.
Bew: $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, $n\in\mathbb{N}$.

a)⇒ b): f injektiv ⇒ $\{f(x_1),f(x_2)\ldots,f(x_n)\}\subset X$ hat n Elemente ⇒ $\{f(x_1),f(x_2)\ldots,f(x_n)\}=X$ ⇒ f surjektiv

b)⇒ c): f surjektiv ⇒ $\{f(x_1),f(x_2)\ldots,f(x_n)\}$ hat n Elemente $\underbrace{\Rightarrow}_{a)b)}$ die n Elemente müssen verschieden sein ⇒ f injektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{a)}$ f bijektiv

c)⇒ a): c): f bij. ⇒ f inj

S0.2.2(201)
Es sei eine bijektive Abbildung $f:X\rightarrow Y$ mit Umkehrfunktion $f^{-1}:Y\rightarrow X$ gegeben, dann gilt:

$f^{-1}(f(x))=x\ \forall\ x\in X$ und $f(f^{-1}(y))=y\ \forall\ y\in Y$

Bew: Sei $x\in X$ baf. Setze $y=f(x)$, d.h. nach Def ist $x=f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x))$

Sei $y\in Y$ baf. $\underbrace{\Rightarrow}_{f\text{ bij}}$ $\exists\ x\in X$ mit $f(x)=y$, d.h. $x=f^{-1}(y)$, $y=f(x)=f(f^{-1}(y))$

A0.2.9 Gegeben sei die Funktion $f:\{1,2,3,4,5\}\rightarrow\{1,3,5,7\}$ mit $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=7$, $f(4)=7$, $f(5)=5$.
Bestimme $f(\{1,2,3\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5\})$, $f^{-1}(\{5,7\})$
Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?
Ist $f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv, surjektiv, bijektiv?

Lös: $f(\{1,2,3\})=\{f(1),f(2),f(3)\}=\{1,3,7\}$,
$f^{-1}(\{3\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\,|\,f(x)=3\}=\{2\}$,
$f^{-1}(\{5\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\,|\,f(x)=5\}=\{5\}$
$f^{-1}(\{5,7\})=\{x\in\{1,2,3,4,5\}\,|\,f(x)=\{5,7\}\}=\{5,3,4\}$
f injektiv? $\exists\ x_1,x_2\in\{1,2,3,4,5\}$ mit $x_1\neq x_2: 3\neq 4$ mit $f(x_1)=f(x_2)$:
$f(3)=7$, $f(4)=7$, $f(3)=f(4)=7$ ⇒ f nicht injektiv
f surjekiv? Sei $X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{1,3,5,7\}$
$\forall\ y\in Y=\{1,3,5,7\}$ $\exists$ mindestens ein $x\in X$ mit $f(x)=y$:
$f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=7$, $f(4)=7$, $f(5)=5$
f ist surjektiv (für $y=7$ existieren sogar 2 Elemente aus X mit $f(x)=y$)
f bijektiv? Nein, da f nicht injektiv ($f(3)=f(4)$).
$f_{|\{1,2,3\}}$ injektiv? $X'=\{1,2,3\}$, $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=7$,
$Y=\{1,3,5,7\}$ $\forall\ x_1,x_2\in X'$ und $x_1\neq x_2: f(x_1)\neq f(x_2)$ Ja!
$f_{|\{1,2,3\}}$ surjektiv? $Y=f(X')$, $f(x)\neq 5$ für $x\in\{1,2,3\}$ Nein !
$f_{|\{1,2,3\}}$ bijektiv? $f_{|\{1,2,3\}}$ ist injektiv und nicht surjektiv ⇒ Nein!

A0.2.10 Gebe an/zeige: Eine Abbildung f von X nach Y ist genau dann injektiv/nicht injektiv, wenn gilt:
a) $x,x'\in X$ und $x\neq x'$ folgt $f(x)\neq f(x')$

Lös:injektiv

b) Gibt es zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ mit $f(x)=y$ so ist f injektiv

c) Gibt es zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $f(x)=y$, so ist f trotzdem nicht injektiv.

d) Wenn für $x, x' \in X$ mit $f(x)=f(x')$, $x=x'$ ist, so ist f injektiv

e) Gibt es eine surjektive $f:[0,1]\to[0,1]$?

Lös: $f(x)=\begin{cases} x, \text{falls } x \in [0,1) \\ 0, \text{falls} x = 1 \end{cases} \Rightarrow$ ja

A0.2.11 Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}$ in sich sind injektiv, welche sind surjektiv?
$f(x)=x^3$, $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$, $f(x)=|x|$, $f(x)=e^x$.

A0.2.12 Gegeben sei eine Menge $M\neq\emptyset$ und deren Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

a) Bestimme eine injektive Abbildung $f:M\to\mathcal{P}(M)$.

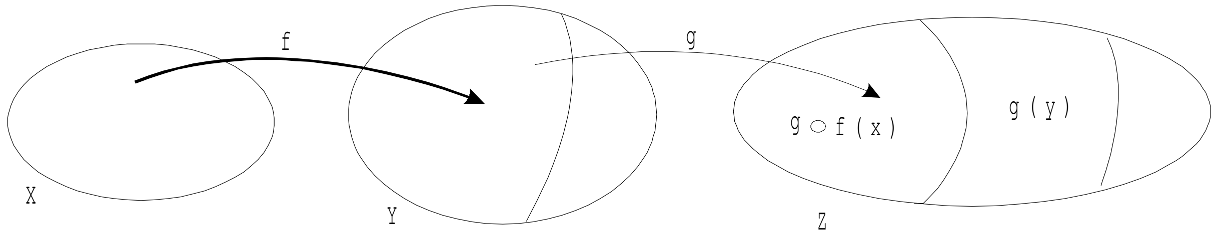
Lös: Bsp $f:M\to\mathcal{P}(M)$. $f(x)=\{x\}$. Dann ist f injektiv, denn aus $f(x_1)=f(x_2)$ folgt $\{x_1\}=\{x_2\} \Rightarrow x_1=x_2$

b) Beweise, dass es keine surjektive Abbildung $g:M\to\mathcal{P}(M)$ geben kann.
Hinweis: Betrachte die Menge $A=\{x\in M \mid x\neq g(x)\}$

Bew: Annahme: Es existiert eine solche Abb $g:M\to\mathcal{P}(M)$ surjektiv.
Sei $A=\{x\in M \mid x\neq g(x)\}$. Da g surjektiv $\exists$ $x_0\in M$ mit $g(x_0)\in A$, #d.h. $x_0\neq g(x_0)\}$# da $\mathcal{P}(M)$ außer allen $x\in M$ noch weitere Elemente enthält und diese wegen Surjektivität einen Partner in M haben müssen. Dann ist $x_0\in A$ oder $x_0\notin A$.
Wenn $x_0\in A$, dann heißt das $x_0\neq g(x_0)\in A$.
Wenn $x_0\notin A$, dann heißt das $x_0=g(x_0)\in A \Rightarrow$ Widerspruch
Annahme einer surjektiven Funktion $g:M\to\mathcal{P}(M)$ muss also falsch gewesen sein.(...auch für ∞ große $\mathcal{P}(M)$ richtig)

D0.2.5(202) Seien $f: X\to Y$ und $g:Y\to Z$ vorgegeben, dann heißt die Abb. $g\circ f: X\to Z$ definiert durch $x\mapsto g(f(x))$ $\forall$ $x\in X$ die zusammengesetzte oder verkettete Funktion aus f und g (Komposition von f mit g)

Bsp:



Bem:1.) Die Komposition ist assoziativ, aber nicht kommutativ:

$(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ $f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$

$g\circ f \neq f\circ g$ (siehe auch A0.2.15 S 205)

Bew: Sei $h:X\to Y$, $g: Y\to Z$, $f: Z\to W$, $x\in X$.

$$f\circ(g\circ h)(x) \underbrace{=}_{D0.2.5} f(g\circ h(x)) \underbrace{=}_{D0.2.5} f(g(h(x))) \underbrace{=}_{D0.2.5} f\circ g(h(x)) \underbrace{=}_{D0.2.5} (f\circ g)\circ h(x)$$

2.) Sind $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ bijektive Abb, dann ist auch $g\circ f:X\to Z$ bijektiv und die Umkehrfunktion $(g\circ f)^{-1}:Z\to X$ ist gegeben durch $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$

A0.2.13 Es seien $f:X\to Y$ und $g:Y\to Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv, $g\circ f$ injektiv $\Rightarrow$ g injektiv

b) g injektiv, $g\circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ surjektiv

c) Aus $g\circ f$ injektiv $\Rightarrow$ f injektiv

d) Aus $g\circ f$ surjektiv $\Rightarrow$ g surjektiv

e) Sind f und g injektiv $\Rightarrow g\circ f$ injektiv

Bew: $g: X\to Y$, $f: Y\to Z$, $x,x'\in X$, $f\circ g(x)=f\circ g(x')$; Zu zeigen $x=x'$

$$f(\underbrace{g(x)}_{y})=fog(x) \underbrace{=}_{g\ injektiv} fog(x')=f(\underbrace{g(x')}_{y'})\Rightarrow f(y)=f(y') \underbrace{\Rightarrow}_{f\ injektiv} y=y'\Rightarrow$$

$$g(x)=g(x') \underbrace{=}_{g\ injektiv} x=x'$$

f) Sind f und g surjektiv $\Rightarrow g\circ f$ surjektiv

Bew: $z\in Z$. $\exists\ y\in Y$: $f(y)=z$. Da g surjektiv $\exists\ x\in X$: $g(x) \underbrace{=}_{g\ surjektiv} y \underbrace{\Rightarrow}_{f\ surjektiv}$

$fog(x)=f(g(x))=f(y)=z \Rightarrow$ fog surjektiv

g) Folgere aus c) und d): f,g bijektiv $\Rightarrow g\circ f$ bijektiv und zeige, dass dann $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

D0.2.6 (203) Seien X,Y beliebige Mengen $\neq\emptyset$ und $A\subset X$ und Funktionen gegeben $f: X\to Y$ $g: A\to Y$, dann heißt

1.) $id_x: X\to X$ mit $x\mapsto x\ \forall\ x\in X$ die Identität auf X oder identische Abb. auf X

2.) g die Restriktion (oder Einschränkung) von f auf A: $\Leftrightarrow$ $g(x)= f(x)\ \forall\ x\in A$. Bez: $g=f|_A$

3.) f eine Fortsetzung von g von A auf X: $\Leftrightarrow$ $g= f|_A$ von A auf X

4.) Wenn eine Funktion $f:X\to Y$ bijektiv, dann gilt $f^{-1}\circ f=id_x$ und $f\circ f^{-1}=id_Y$

Bem: 1.) id_x ist bijektiv und $id_x^{-1} = id_x$

2.) $f: X \to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ $\forall A, B \subset X$

//(107) ***Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f //***

//b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ $\forall$ $A, B \subset X$ //

Bew: "$\Rightarrow$" Stets gilt $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Sei $X \to Y$ injektiv und $y \in f(A) \cap f(B)$ $\Rightarrow$

$y = f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$ $\Rightarrow$

$x_1 \in A \cap B$ $\Rightarrow$ $y \in f(A \cap B)$ $\Rightarrow$ $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ $\Rightarrow$

$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

"$\Leftarrow$" Annahme: Sei $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ $\forall$ $A, B \subset X$ und

$f(x_1) = f(x_2) = y$, $A = \{x_1\}$, $B = \{x_2\}$

$x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ $\Rightarrow$ $A \cap B = \varnothing$, $f(A \cap B) = \varnothing$.

Andererseits ist $f(A) = f(B) = \{y\}$ und damit $f(A) \cap f(B) = \{y\} \neq \varnothing$ $\Rightarrow$

Widerspruch $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$

$x_1 \neq x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\Rightarrow$ $f: X \to Y$ ist injektiv

3.) $f: X \to Y$ bijektiv $g: Y \to Z$ bijektiv $\Rightarrow$

$g \circ f: X \to Z$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Bew: $f(X) = Y$, $g(Y) = Z$ $\Rightarrow$ $(g \circ f)(X) = Z$ surjektiv

Wähle $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ $\Rightarrow$ $g(\underbrace{f(x_1)}_{y_1}) = g(\underbrace{f(x_2)}_{y_2})$ $\Rightarrow$

$f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$ $\Rightarrow$ $g \circ f$ bijektiv

$y = f(x)$, $z = g(y) = (g \circ f)(x)$ $\Rightarrow$

$x = f^{-1}(y)$, $y = g^{-1}(z)$ $\Rightarrow$ $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)$ $\forall$ $z \in Z$

$\Rightarrow$ $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Andere Formulierung:

//D0.2.6 (203) $X, Y \neq \varnothing$ & $A \subset X$ & $f: X \to Y$ $g: A \to Y$ //

1.) $id_x: X \to X$ mit $x \mapsto x$ $\forall$ $x \in X$

Bew: Z.z.: $g \circ f$ ist bijektiv mit Umkehrfunktion $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Definiere $F = (g \circ f)$ und $G = f^{-1} \circ g^{-1}$ dann ist z.z., dass F bijektiv mit Umkehrabb G. $F: X \to Z$, $G: Z \to X$.

$F(X) = g \circ f(X) = g(f(X)) = g(Y) = Z$, d.h. F ist surjektiv

Andererseits gilt für $x \in X$

$G(F(x)) = G(g \circ f(x)) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(g(f(x)))}_{=f(x)}) = f^{-1}(f(x)) = x$, d.h.

$G \circ F = id_X$ $\underset{1)}{\Rightarrow}$ F ist injektiv #müsste das nicht bewiesen werden?

Also ist F bijektiv mit Umkehrabb $F^{-1}: Z \to X$, wobei $F(x) = z$ $\Leftrightarrow$ $x = F^{-1}(z)$. Beachte, dass gilt $G(z) = G(F(x)) = x = F^{-1}(z)$

A0.2.14 Es seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Funktionen. Zeige:

a) f surjektiv $\Leftrightarrow$ $\exists$ $g: Y \to X$ mit $f \circ g = id_Y$

Lös: "$\Leftarrow$" $y = id_Y(y) = (f \circ g)(y) = f(\underbrace{g(y)}_{x}) = f(x)$ $\Rightarrow$ d.h. alle Elemente von Y werden von y erreicht, f ist surjektiv

"$\Rightarrow$" definiere $g: Y \to X$, $g(y) = x$ (wobei $f(x) = y$) d.h. zu jedem y finde ich mindestens ein x da surjektiv.

$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = id_y$

A0.2.15 Geg sei eine nichtleere Menge X und 2 Funktionen $f, g: X \to X$. Beweise oder widerlege: Es gilt stets $f \circ g = g \circ f$

Lös: #Wertebereich muss nicht gleich X sein

$f \circ g \neq g \circ f$: Setze z.B.: $X = \{0,1\}$ und definiere

$f:X\to X$ durch $f(0)=f(1)=0$ und $g:X\to X$ durch $g(0)=g(1)=1 \Rightarrow$
$f(g(0))=f(g(1))=f(1)=0$ und $g(f(0))=g(f(1))=g(0)=1 \Rightarrow f\circ g\neq g\circ f$

A0.2.16

a) Es sei eine Funktion $f:A\to B$ gegeben. $A_1\subset A$, $B_1\subset B$.
Beweise: $f^{-1}(f(A_1))\supset A_1$
Lös: Sei $x\in A_1$. Def $y=f(x)$ und $B_1=f(A_1) \Rightarrow y\in B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_1)=\{z\in A|f(z)\in B_1\}$
$\Rightarrow$ x erfüllt die Bedingung $f(z)\in B_1$, denn $f(x)=y\in B_1 \Rightarrow$
$x\in f^{-1}(B_1)=f^{-1}(f(A_1))$
$f^{-1}(f(A))=A$ gilt im Allgemeinen nicht. Gegenbeispiel siehe b)
#Lös: $A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.
Sei $x\in A_1$ baf $\Rightarrow y\in f(A_1)$ mit $f(x)=y \Rightarrow$
$\exists\ x\in A_1:f^{-1}(y)=x$ oder $(\exists\ x'\in A\setminus A_1:f^{-1}(y)=x'$ und $\exists\ x\in A_1:f^{-1}(y)=x)$
$\Rightarrow x\in A_1$ und $x\in f^{-1}(f(A_1)) \Rightarrow A_1\subset f^{-1}(f(A_1))$.

b) Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f: X\to Y$ eine Abbildung.
Zeige für $A\subset X$, $B\subset Y$: $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$, $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$
$f(f^{-1}(B))=B$ gilt im allgemeinen nicht. Gegenbeispiel
Bew: Sei $X=\{x_1,x_2\}$, $Y=\{y_1,y_2\}$, mit $x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$ und $f:X\to Y$ definiert durch $f(x_1)=f(x_2)=y_1$ (d.h. $f(X)=y_1$).
Gegenbeispiel:
Weiter sei $A=\{x_1\}$ und $B=Y=\{y_1,y_2\} \Rightarrow$

$$f^{-1}(f(A))=f^{-1}(\{y_1\})=\{x_1,x_2\}=X\neq A \text{ und } f(f^{-1}(B))=f(\underbrace{\{x_1,x_2\}}_{=X})=\{y_1\}\neq B$$

Bem: (.) $f^{-1}(f(A))=A\ \forall\ A\subset X \Leftrightarrow f$ injektiv
(..) $f(f^{-1}(B))=B\ \forall\ B\subset Y \Leftrightarrow f$ surjektiv

c) f ist injektiv $\Leftrightarrow f(\bigcap_{M\in S} M)=\bigcap_{M\in S} f(M)\ \ \forall\ S\subset P(X), S\neq\emptyset$
//D0.2.6 Bem: 2.)(203) $f: X\to Y$ ist injektiv $\Leftrightarrow f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)\ \forall A,B\subset X$//
//(107)Eigenschaften von Bild und Urbild einer Funktion f//
//b) $f(\bigcap_{M\in S} M)\subset\bigcap_{M\in S} f(M)$, $M\subset X$//
Bew: "$\Leftarrow$" folgt aus D0.2.6 Bem 2 mit $S=\{A,B\}$ für beliebige $A,B\subset X$
$(f(A)\cap f(B)=\bigcap_{M\in S} f(M)=f(\bigcap_{M\in S} M)=f(A\cap B))$
"$\Rightarrow$" Sei f injektiv. Sei $S\subset P(X)$, $S\neq\emptyset$ bel.
$f(\bigcap_{M\in S} M)\subset\bigcap_{M\in S} f(M)$. Noch z.z. $f(\bigcap_{M\in S} M)\supset\bigcap_{M\in S} f(M)$ wie folgt

$y\in\bigcap_{M\in S} f(M) \underset{\text{Def}\cap}{\Leftrightarrow} y\in f(M)\ \forall\ M\in S$ (besser: $\forall\ M\in S: y\in f(M)$) $\underset{\text{DefBild}}{\Leftrightarrow}$

$\forall\ M\in S\ \exists\ x_M\in M$ mit $y=f(x_M) \underset{\text{f injektiv}}{\Leftrightarrow}$

$\forall\ M\in S\ \exists\ x\in M$ mit $y=f(x)$ und zwar dasselbe $x\ \forall\ M\in S$
"$\Leftarrow$" klar
"$\Rightarrow$" $f(x_{M_1})=f(x_{M_2}) \underset{\text{f injektiv}}{\Rightarrow} x_{M_1}=x_{M_2}$

$\Leftrightarrow\ \exists\ x\in\bigcap_{M\in S} M$ mit $y=f(x) \Leftrightarrow y\in f(\bigcap_{M\in S} M)$

Bem: Es wurde sogar $\bigcap_{M\in S} f(M)=f(\bigcap_{M\in S} M)$ bewiesen

A0.2.17 $f:X\to Y$. Zeige daß immer gilt $f\circ id_X=f$ und $id_Y\circ f=f$

A0.2.18 $f:X\to Y$ bij und f^{-1} die Umkehrfkt.
Zeige $f\circ f^{-1}=id_Y$, $f^{-1}\circ f=id_x$

A0.2.19 Sei angenommen, daß eine Funktion $g: Y \mapsto X$ existiert, sodaß $f \circ g = id_Y, g \circ f = id_X$. Zeige, daß dann f bijektiv und $g = f^{-1}$ ist. Was kann man schließen, wenn nur $f \circ g = id_Y$ oder $g \circ f = id_X$ gilt?

S0.2.3(206)

Vor: Sei $f: X \to Y$ eine bijektive Funktion mit Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \to X$

Beh: $f^{-1} \circ f = id_x$ und $f \circ f^{-1} = id_y$ oder

$(f^{-1} \circ f)(x) = x \ \forall\ x \in X$ und $(f \circ f^{-1})(y) = y \ \forall\ y \in Y$

d.h. $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall\ x \in X$ und $f\ (f^{-1}(y)) = y \ \forall\ y \in Y$

Bew: 1.) Sei x beliebig mit $x \in X$ und setze $y := f(x)$ (bij) $\Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\Rightarrow x = f^{-1}(f(x))$, $f^{-1} \circ f = id_x$

Analog sei $y \in Y$, Setze $x = f^{-1}(y) \Rightarrow y = f(x) = f(f^{-1}(y)$

d.h. $f \circ f^{-1} = id_y$

S0.2.4 (206)

a) Sei $f: X \to Y$ umkehrbar (invertierbar), dann ist die inverse Abbildung g eindeutig bestimmt.

Bew: $h, g: X \to Y$ inverse Abbildungen, zu zeigen h=g

$$g = g \circ I_{d_y} = g \circ (f \circ h) \underbrace{=}_{D\,0.2.5\,Bem\,1} (g \circ f) \circ h = I_{d_x} \circ h = h \Rightarrow g = h$$

Nebenrechnung.. $g \circ I_{d_y} = g$...Sei $y \in Y \Rightarrow g \circ I_{d_y}(y) = g(I_{d_y}(y) = g(y)$

Analog.. $I_{d_x} \circ h = h$

b) $f: X \to Y$ ist invers (umkehrbar) $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv

Bew: "$\Rightarrow$" f invertierar, zu zeigen f injektiv + surjektiv

Sei g die inverse Abb auf X.

- Injektiv...Sei $x, x' \in X, f(x) = f(x') \Rightarrow x = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f\ (x') = x'$
- Surjektiv..$y \in Y$, setze $x = g(y) \in X \Rightarrow f(x) = f(g(y)) = f \circ g\ (y) = y \Rightarrow$ f surj.

"$\Leftarrow$" f bijektiv, zu zeigen f invertierbar.

Sei $y \in Y \underbrace{\Rightarrow}_{f\ surjektiv} \exists$ Urbild zu y d.h. $x \in X$ mit $f(x) = y \underbrace{\Rightarrow}_{f\ injektiv}$

$\exists_1$ solches x, benannt g(y). So defieren wir eine Abb $g: Y \to X$, zu zeigen g ist invers zu f:

$f: X \to Y$ ist invertierbar $\Leftrightarrow \exists\ g: Y \to X$, $g \circ f = I_{d_x}$, $f \circ g = I_{d_y}$

Sei $x \in X$, $f(\underbrace{g(f(x))}_{x'}) = f(x') \underbrace{\Rightarrow}_{a)\,f\ injektiv} x = x' \Rightarrow x = g(f(x)) = g \circ f(x) \underbrace{\Rightarrow}_{x\ beliebig}$

$g \circ f = I_{d_x}$

Umgekehrt $f(g(y)) = y$ gilt nach Konstruktion $\forall\ y \in Y$, also

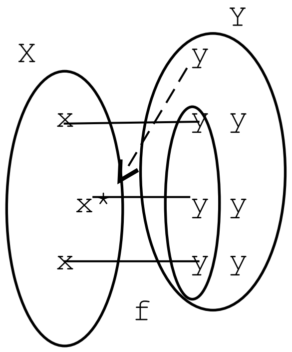
$f \circ g = I_{d_y}$

A0.2.20

Es seien X,Y Mengen $\neq\emptyset$ und $f:X\to Y$ eine Abbildung. Zeige:

a) f ist genau dann injektiv, falls es eine Abbildung $g:Y\to X$ mit $g\circ f=id_x$ gibt

Bew: „⇒„ Sei f <u>injektiv</u> ⇒ $\forall\ y\in f(X)$ <u>∃ genau ein</u> $x_y\in X: f(x_y)=y$



wähle außerdem noch ein $x^*\in X$ fest (möglich, da $X\neq\emptyset$) Def $g:Y\to X$,

$$g(y)=\begin{cases} x_y, falls\ y=f(x) \\ x^*, falls\ y\notin f(X)\ d.h.\ y\in Y\setminus f(X)\end{cases}$$

Sei $x\in X$ beliebig ⇒ $(g\circ f)(x)= g\circ \underbrace{f(x)}_{=:y\in f(X)}=x$, da $f(x)=y$, d.h. $x_y=x$ (beachte: x_y ist eindeutig) $\underset{x\ bel}{\Rightarrow}$ $g(y)=x$ da $f(x)=y\ \forall\ x\in X$ ⇒ $g\circ f=id_x$.. beachte Def und Wertebereich von $g\circ f$ und id_x sind gleich

„⇐„: ∃ g: $Y\to X$ mit $g\circ f= id_x$ d.h. Z.z: f injektiv, d.h. z.z. $\forall\ x_1,x_2$ mit $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$, d.h. $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

Seien $x_1,x_2\in X$ mit $f(x_1)=f(x_2)$ ⇒

$x_1=id_x(x_1)\underset{Vor}{=}(g\circ f)(x_1)= g(f(x_1))= g(f(x_2)= (g\circ f)(x_2)\underset{Vor}{=} id_x(x_2)=x_2$

Sei $x\in X$ bel, ⇒ $g\circ f(x)= g(\underbrace{f(x)}_{=:y\in f(X)})=x$, da $f(x)=y$, d.h. $x_y=x$

(beachte das x_y ist eindeutig) $\underset{x\ bel}{\Rightarrow}$ $g\circ f= id_x$

(Beachte: Definitionsbereich und Wertemenge/Zielmenge der beiden Funktionen sind gleich).

b) f ist genau dann surjektiv, falls es eine Abbildung h: $Y\to X$ mit $f\circ h = id_Y$ gibt.

Beh: f surjektiv ⇔ ∃ $h:Y\to X$ mit $f\circ h = id_Y$ (h heißt Rechtsinverses)

Bew: Skizze siehe bei Def für Surjektion

"⇒„Sei f surjektiv ⇒ $\forall\ y\in Y\ \exists\ x_Y\in X: f(x_Y)=y$. Dies ist möglich, da f surjektiv. Sei ein x_Y fixiert (es gibt viele). Sei h: $Y\to X$, $h(y):=x_Y \Rightarrow (f\circ h)(y)= f(x_Y)=y \Rightarrow f\circ h=id_y$

„⇐„∃ h: $Y\to X$ mit $f\circ h = id_y$

Z.z.: f surjektiv, d.h. $\forall\ y\in Y\ \exists\ x\in X: f(x)=y$.

Definiere $h(y)=x_Y$. Sei $y\in Y$ beliebig,

Setze $x:=h(y) \Rightarrow x\in X \Rightarrow f(x_Y)=f(h(y))=(f\circ h)(y)=id_y(y)=y \Rightarrow f\circ h=id_y$

Beachte: Def und Wertebereich von f,h und id_y sind gleich) d.h. $\forall\ y\in Y\ \exists\ x\in X: f(x)=y$

c) f ist genau dann bijektiv, wenn es eine Abbildung $g:Y\to X$ mit $g\circ f=id_x$ und $f\circ g=id_y$ gibt. Dieses g ist, falls vorhanden, eindeutig bestimmt.

Beh(.) f bijektiv $\Leftrightarrow \exists\ g: Y\to X$ mit $g\circ f=id_x$ $f\circ g=id_y$

(..) dieses g ist eindeutig

($g=f^{-1}$ siehe später, heißt inverse Funktion)

Bew(.): "$\Rightarrow$" 1. Möglichkeit: Wähle $g=f^{-1}:Y\to X \Rightarrow$

$g\circ f = f^{-1}\circ f=id_x$, $f\circ g = f\circ f^{-1}=id_y$

2. Möglichkeit: Da f injektiv und surjektiv ist,

$\exists\ g: Y\to X$ mit $g\circ f = id_x$ (nach a)) und

$\exists\ h: Y\to X$ mit $f\circ h = id_y$ (nach b). Genügt z.z. h=g.

Dies gilt, da $h=id_x\circ h=(g\circ f)\circ h=g\circ(f\circ h)=g\circ id_y=g$

"$\Leftarrow$" klar nach a), b). $\exists\ g: Y\to X$ mit $g\circ f = id_x$ und

$f\circ g=id_y$ ...surjektiv+ injektiv....bijektiv

Bew(..) Eindeutigkeit von g:

Sei $\tilde{g}:Y\to X$ mit $g\circ f=\tilde{g}\circ f=id_x$, $f\circ g=f\circ\tilde{g}=id_y$

Z.z: $\tilde{g}=g$

Bew: $\tilde{g}=id_x\circ\tilde{g}=(g\circ f)\circ\tilde{g}=g\circ(f\circ\tilde{g})=g\circ id_y=g$

A0.2.21 Sei $\mathcal{M}\neq\emptyset$ eine Menge von Mengen. Die Relation $\sim$ auf $\mathcal{M}$ sei wie folgt definiert:

$M_1\sim M_2 :\Leftrightarrow$ es existiert eine bijektive Abbildung $f: M_1\to M_2$

Zeige, daß $\sim$ eine ÄR auf $\mathcal{M}$ ist

//D0.2.6 (203) Bem:3.) f: $X\to Y$ bijektiv g: $Y\to Z$ bijektiv //

// $\Rightarrow$ $g\circ f: X\to Z$ bijektiv und $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$//

Bew: (.) $\sim$ ist reflexiv, d.h. $M\sim M\ \forall\ M\in\mathcal{M}$, denn $id_M: M\to M$ ist bijektiv.

(..) $\sim$ ist symmetrisch, $\forall\ M_1,M_2\in\mathcal{M}$. $M_1\sim M_2 \Rightarrow M_2\sim M_1$

Bew: Sei $M_1\sim M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{Def\ \sim} \exists$ bij $f: M_1\to M_2 \Rightarrow f^{-1}: M_2\to M_1$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{Def\ \sim} M_2\sim M_1$

(...) $\sim$ ist transitiv, d.h. $\forall\ M_1,M_2,M_3\in\mathcal{M}$: $M_1\sim M_2\sim M_3 \Rightarrow M_1\sim M_3$,

Bew: Sei $M_1\sim M_2$ und $M_2\sim M_3 \Rightarrow \exists$ bijektive $f: M_1\to M_2$, $g: M_2\to M_3$

$\underbrace{\Rightarrow}_{Bem3} g\circ f: M_1\to M_3$ bijektiv $\Rightarrow M_1\sim M_3$