

## 1.2 (400) Die Anordnungsaxiome

Axiomatische Beschreibung einer linearen Anordnung aller Elemente eines Körpers

**D1.2.1** (400) Ein Körper  $(K, +, *)$  heißt angeordnet:  $\Leftrightarrow$  Auf  $K$  existiert eine Anordnungsrelation  $R := <$  („kleiner“), die folgende Eigenschaften (Anordnungsaxiome) erfüllt:

(01)  $\forall a, b \in K$  gilt genau eine der folgenden Eigenschaften:

$a < b$  oder  $b < a$  oder  $a = b$  (Trichotomie)

$\forall a, b \in K ((a, b)) \in < \text{ oder } (b, a) \in < \text{ oder } a = b$

(02) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$  (Transitivität)  $\forall a, b, c \in K$

$(a, b) \in < \text{ und } (b, c) \in < \Rightarrow (a, c) \in <$

(03)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K$

$a < b \text{ und } 0 < c \Rightarrow a * c < b * c$  (Monotonie)

$(a, b) \in <, (a + c, b + c) \in < \quad \forall c \in K$

$(a, b) \in < \text{ und } (0, c) \in < \Rightarrow (a * c, b * c) \in < \subset K \times K = K^2$

Bezeichnungen, Sprechweisen  $a, b \in K$

$K$  angeordneter Körper:  $(K, +, *, <)$ ,  $< \subset K \times K = K^2$

$a$  kleiner  $b: \Leftrightarrow a < b$ ,

$a$  größer  $b: \Leftrightarrow b < a$  bzw  $a > b$

$a$  ist positiv(negativ):  $\Leftrightarrow 0 < a$  bzw  $a > 0$  ( $a < 0$  bzw  $0 > a$ )

$a$  ist kleiner oder gleich  $b: \Leftrightarrow a < b$  oder  $a = b$ , ( $a \leq b, b \geq a$ )

$a$  ist größer oder gleich  $b: \Leftrightarrow a > b$  oder  $a = b$ , ( $a \geq b$ )

$a$  ist nicht negativ:  $\Leftrightarrow a \geq 0 \quad 0 \leq a$

Andere Formulierung (siehe auch A1.2.5. b). Besser erst nach A1.2.5 genauer lesen.  $K_+$  ist für Lösung A1.2.5 wichtig):

Ein Körper  $K$  heißt geordnet/wenn es eine Teilmenge  $K_+$  gibt, welche folgende Eigenschaften besitzt:

(01\*)  $\forall a \in K$  gilt genau eine der folgenden Aussagen:

$a \in K_+$  oder  $-a \in K_+$  oder  $a = 0$

(02\*)  $\forall a \in K_+: a+b \in K_+$

(03\*)  $\forall a, b \in K_+: ab \in K_+$

Die Menge  $K_+$  heißt auch positiver Kegel von  $K$  und jedes  $a \in K_+$  heißt positiv. Ist  $-a \in K_+$ , so heißt  $a$  negativ. Wir können also die Axiome (01) - (03) wie folgt in Worte fassen: Ein beliebiges  $a \in K$  ist entweder positiv oder negativ oder  $= 0$ , und Summe und Produkt von positiven Zahlen sind wieder positiv. Weiter setzen wir noch:

$a < b \Leftrightarrow b-a \in K_+ \quad / \quad a \leq b \Leftrightarrow b \geq a \Leftrightarrow a=b \text{ oder } a < b$

Mit diesen Bezeichnungen folgt direkt aus (01\*), angewandt auf  $b-a$ :

$\forall a, b \in K$  gilt genau eine der drei Aussagen  $a < b$  oder  $a > b$  oder  $a = b$

(400) Abgeleitete Rechenregeln in einem angeordneten Körper (RR<)

1.)  $a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \Leftrightarrow b-a > 0$

Bew: Sei  $a < b \xrightarrow{(03)} a+(-b) < b+(-b) \Rightarrow a-b < 0$

$(a-b)+b < 0+b \Leftrightarrow a+((-b)+b) < b \Rightarrow a+0 < b \Rightarrow a < b \dots \dots$

analog  $0 < b-a$

2.)  $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ , speziell  $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } a > b &\Leftrightarrow b < a \xrightarrow{(O3)} b + (-b) < a + (-b) \Leftrightarrow 0 < a + (-b) \xrightarrow{(O3)} \\ &-a + 0 < ((-a) + a) + (-b) \Leftrightarrow -a < 0 + (-b) \Leftrightarrow -a < -b \Rightarrow b < a \end{aligned}$$

3.) (.)  $a, b > 0$  d.h.  $a > 0$  und  $b > 0 \Rightarrow ab > 0$

$$\begin{aligned} (\dots) a > 0, b < 0 &\Rightarrow ab < 0, \\ (\dots) a < 0 \text{ und } b < 0 &\Rightarrow ab > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Bew: } (\dots) a > 0, b > 0 \Rightarrow 0 < a, 0 < b \xrightarrow{(O3)} 0 \cdot a < ab \Rightarrow 0 < ab$$

$$(\dots) a > 0, b < 0 \Rightarrow 0 < a, b < 0 \xrightarrow{(O3)} ab < a \cdot 0 \Rightarrow ab < 0$$

$$\begin{aligned} (\dots) a < 0, b < 0 &\xrightarrow[2.]{} -b > 0 = 0 \xrightarrow{(O3)} a(-b) < 0 \quad (-b) = 0 \Rightarrow a(-b) < 0 \Rightarrow a((-1)b) < 0 \\ &\Rightarrow (-1)(ab) < 0 \Rightarrow -(ab) < 0 \xrightarrow[2.]{} ab > 0 \end{aligned}$$

4.)  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := a \cdot a > 0$ , speziell  $1 > 0, -1 < 0$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } a \neq 0 &\stackrel{=} \quad a > 0 \text{ oder } a < 0 \xrightarrow[3.]{} a^2 = a \cdot a > 0 \\ 1 = 1 \cdot 1 &> 0 \xrightarrow[2.]{} -1 < 0 \end{aligned}$$

5.)  $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } a > 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}, \text{ Annahme } a^{-1} < 0 \xrightarrow{(O3)} 1 = a \cdot a^{-1} < 0 \\ 1 < 0 \text{ Widerspruch} \Rightarrow a^{-1} > 0 \\ \text{Analog } a < 0, a^{-1} < 0 \end{aligned}$$

6.)  $a < b$  und  $c < 0 \Rightarrow ac > bc$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } \xrightarrow{(O3)} a(-c) < b(-c) \Rightarrow a((-1)c) < b((-1)c) \Rightarrow (-1)(ac) < (-1)bc \Rightarrow \\ -(ac) < -(bc) \xrightarrow[2.]{} ac > bc \end{aligned}$$

7.)  $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

$$\begin{aligned} \text{Bew: } 0 < a < b, a^{-1} > 0, b^{-1} > 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow ab^{-1} < bb^{-1} \Rightarrow ab^{-1} < 1 \Rightarrow a^{-1}(a(b^{-1})) < a^{-1} \\ \Rightarrow 1 * b^{-1} < a^{-1} \Rightarrow b^{-1} < a^{-1} \end{aligned}$$

8.)  $a = b$  genau dann, wenn  $a \leq b$  und  $b \leq a$

Bew: Sei  $a \leq b$  und  $b \leq a$  und  $a \neq b \Rightarrow a < b$  und  $b = a$  Widerspruch zu (O1)

Andere Formulierung:

$a \leq b$  und  $b \leq a \Rightarrow a = b$  oder  $(a < b \text{ und } a > b)$  nicht möglich wegen (O1)

9.)  $a < b \Rightarrow \exists c \in (K, <) \text{ (z.B. } c = (a+b)/2, 2 := 1+1\text{)} \text{ mit } a < c < b \Rightarrow$

$\forall \lambda \in K \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \text{ gilt } a < a\lambda + (1-\lambda)b < b$

$$\text{Bew: } a - (a\lambda + (1-\lambda)b) = a(1-\lambda) - (1-\lambda)b = \underbrace{(1-\lambda)}_{>0} \underbrace{(a-b)}_{<0} \xrightarrow[3.]{} 0$$

Andere Formulierung:

$$\text{Aus } 0 < \lambda < 1 \text{ folgt } \xrightarrow[\text{RR Körper}]{(O3)} 0 > -\lambda > -1 \xrightarrow{(O3)} 1 > 1-\lambda > 0 \Rightarrow$$

$$a = \lambda a + (1-\lambda)a \xrightarrow{(O3)} \leq \lambda a + (1-\lambda)b \xrightarrow{(O3)} \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

**A1.2.1** Zeige: Aus  $a < b$  folgt  $a < (a+b)/2 < b$

**A1.2.2** Zeige: Ist  $a \geq 0$ , und gilt  $\forall \varepsilon > 0 : a \leq \varepsilon$ , so folgt  $a = 0$

**A1.2.3**  $a, b, c, d \in (K, >)$ ,  $b, d > 0$ ,  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  so gilt  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Lös:  $b+d > 0$  und  $1/b, 1/d, \frac{1}{b+d} > 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} &\Leftrightarrow a(b+d) < (a+c)b \Leftrightarrow ab+ad < ab+cb \Leftrightarrow ad < cb \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ und} \\ \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} &\Leftrightarrow (a+c)d < (b+d)c \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.\end{aligned}$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , was nach Vor  
richtig ist. Also folgt die Beh.

//**A1.1.3** (303)  $(K, +, *)$ .  $a \oplus b = a+b+2$ ,  $a \otimes b := 2a+2b+a*b+2$ , //

//  $K^* : \emptyset$  und  $\otimes \dots 0 = -2$ ,  $-a = -a-4$ ,  $1 = -1$ ,  $a^{-1} = \frac{-3-2a}{a+2}$  //

**A1.2.4** Kann der Körper  $(K, \oplus, \otimes)$  aus A1.1.3 angeordnet werden?

//**D1.2.1** (400)  $(K, +, *)$  angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $K$   $R := <$ , Anordnungsaxiome://

// (O3)  $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K$ ,  $a < b$  und  $0 < c \Rightarrow a*c < b*c$  //

Lös: Wir verwenden die gleichen Ordnungsrelationen wie beim  
ursprünglichen Körper. (O1) und (O2) gelten unverändert weiter,  
unabhängig von den Verknüpfungen

Zu (O3): Es seien  $a, b, c \in K$  mit  $a < b$

a)  $a \oplus c < b \oplus c$ :

$$a < b \Rightarrow a+c+2 < b+c+2 \Rightarrow a \oplus c < b \oplus c$$

b) Wenn  $c > 0 = -2$  dann folgt  $a \otimes c < b \otimes c$ :

$$a < b \Rightarrow a(\underbrace{c+2}_{>0}) < b(c+2)$$

$$\Rightarrow ac+2a < bc+2b \Rightarrow ac+2a+2c+2 < bc+2b+2c+2 \Rightarrow$$

$$ac+2a+2c+2 < bc+2b+2c+2 \Rightarrow a \otimes c < b \otimes c$$

### A1.2.5

a) Kann ein Körper mit 3 Elementen angeordnet werden?

// (RR<) (400) 4.)  $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := a \cdot a > 0$ , speziell  $1 > 0, -1 < 0 //$

// D1.2.1 (02) (400) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c //$

Lös: Nein, denn: Sei  $K$  ein dreielementiger Körper  $\Rightarrow$

$K$  hat die Gestalt  $\{0, 1, -1\}$ , (0 und 1 liegen in jedem Körper, dazu  $-0=0$  und  $-1 \neq 1$ , wobei  $-1 \neq 1$ , da sonst 2 elementiger Körper) ( $1 \neq 0, 1 \neq -1$ ).

Es gilt hier  $2 := 1+1=-1$ , denn  $1+0=1, 1+(-1)=0$ .

Wäre  $1+1=1$ , so  $1=0$  weil auch  $1+0=1$  Widerspruch bzw  
 $1+1=0$ , so  $1=-1$  da auch  $1+(-1)=0$  Widerspruch  $\Rightarrow$

Annahme:  $K$  kann angeordnet werden?  $\Rightarrow$

$$0 \stackrel{4.)}{\leq} 1 = 1+0 \stackrel{(02)}{\leq} 1+1=2 \in K = \{0, 1, -1\} \Rightarrow 0 < 1 < 1+1=2$$

Falls  $2=0 \Rightarrow 0 \stackrel{(02)}{\leq} 2=0$  Widerspruch,

Falls  $2=1 \Rightarrow 1 < 2=1$  Widerspruch,

Falls  $2=-1 \Rightarrow 0 < 2=-1$  Widerspruch zu Regel (4)  $\Rightarrow$

Annahme falsch, also kann  $K$  nicht angeordnet werden

oder:  $0 < 1 = 1+0 < 1+1=-1 \Rightarrow 0 < -1$  Widerspruch zu (01),

denn  $0 > -1$  (ausführlich steht hier  $0 < 1$  und  $1 < -1$ )

Bem: Kein endlicher Körper kann angeordnet werden

(Beweisidee:  $0 < 1 < 2 < 3 \dots < -1$  Widerspruch)

b) Beweise: Ein Körper  $K$  ist genau dann ein angeordneter Körper, wenn eine Teilmenge  $P \subset K$  existiert, so dass gilt:

- (P1) Für jedes  $x \in K$  gilt genau eine der Alternativen  $x=0$ ,  $x \in P$  oder  $-x \in P$ .
- (P2) Aus  $x, y \in P$  folgt  $x+y \in P$
- (P3) Aus  $x, y \in P$  folgt  $xy \in P$

//D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R := <$ , Anordnungsaxiome://  
 // (O1)  $\forall a, b \in K$  gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://  
 //  $a < b$  oder  $b < a$  oder  $a = b$  (Trichotonie) //  
 // (RR<) (400) 2.)  $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ , speziell  $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$  //  
 // siehe auch D1.2.1 andere Formulierung//

Bew: „ $\Rightarrow$ “  $K$  angeordnet  $\Rightarrow$  (P1) ... (P3) gilt

Def  $P := \{x \in K : x > 0\} \Rightarrow P \subset K$  (Menge der postiven Elemente von  $K$ )  $\Rightarrow$   
 ... Rechne P(1) ... P(3) nach.

• Zu P(1): Sei  $x \in K$  beliebig. Setze  $a = x$  und  $b = 0 \stackrel{\Leftrightarrow}{(O1)}$

Es gilt genau eine der drei Aussagen:

- $x < 0$  oder      •  $0 < x$  oder      •  $x = 0$ , d.h.
- $-x > -0 = 0$  oder      •  $x > 0$  oder      •  $x = 0$ , d.h.
- $x = 0$  oder      •  $x < 0 \stackrel{\Leftrightarrow}{(RR\ 2.)} -x > 0$  oder      •  $x > 0$  d.h.
- $x = 0$  oder      •  $-x > 0 \in P$  oder      •  $x \in P$

// (O3)  $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K$        $a < b$  und  $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$  //  
 // (O2) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$  (Transitivität)  $\forall a, b, c \in K$  //

• Zu P(2): Seien  $x, y \in P$ , d.h.  $x > 0, y > 0 \Rightarrow x = x+0 \stackrel{<}{(O3), \text{mit } 0 < y} y+x = x+y \stackrel{\Leftrightarrow}{(O2)} 0 < x+y$ , d.h.  $x+y \in P$

// (RR<) (400) (.)  $a, b > 0$  d.h.  $a > 0$  und  $b > 0 \Rightarrow ab > 0$  //  
 // (..)  $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$ , //  
 // (...)  $a < 0$  und  $b < 0 \Rightarrow ab > 0$  //

• Zu (P3): Es seien  $x, y \in P \Rightarrow 0 < x$  und  $0 < y \Rightarrow 0 \cdot y < x \cdot y \Rightarrow x \cdot y \in P$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $P \subset K$  mit (P1)-(P3) erfüllt.

Definition Relation  $<$  auf  $K$ : durch  $a < b: \Leftrightarrow b-a \in P$ .

Rechne jetzt (O1)-(O3) nach:

(O1) (400)  $a < b$  oder  $b < a$  oder  $a = b$  (Trichotonie)

• Zu (O1): Seien  $a, b \in K$  beliebig. Mit  $x := b-a$  folgt aus  
 (P1): Es gilt genau eine der 3 folgenden Aussagen

- $x = 0$  oder      •  $x \in P$  oder      •  $\frac{x}{b-a} \in P$ , d.h.
- $b-a=0$  ( $a=b$ ) oder      •  $a < b$  oder      •  $a-b \in P$ , d.h.
- $\underbrace{a=b}_{b-a=0(\text{Bew Körpertax})}$  oder      •  $a < b$  oder      •  $b < a$

Nebenrechnung:  $-(b-a) = a-b$ , denn  
 $-x = -(b+(-a)) = -b - (-a) = -b + (-(-a)) = -b + a = a - b$

(O2) (400) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c$

(A1) (300)  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in K$ ,

(A2)  $a \oplus 0 = a \quad \forall a \in K$

(A3)  $a \oplus (-a) = 0$

(A4)  $a \oplus b = b \oplus a \quad \forall a, b \in K$

• Zu (O2): Seien  $a < b$  und  $b < c$  d.h.

$b - a \in P$  und  $c - b \in P$  (nach Def von  $<$ )  $\Rightarrow c - a =$

$$\underbrace{(c - b)}_{=x \in P} + \underbrace{(b - a)}_{=y \in P} \in P \text{ nach (P2)} \xrightarrow{\text{Def } <} a < c$$

ausführlicher: Klammern werden weggelassen

$$\text{wegen (A1), } c - a \stackrel{(A2)}{=} c + 0 - a \stackrel{(A3) \cdot (A4)}{=} \underbrace{c + (-b)}_{=c - b} + b - a$$

// (O3) (400)  $(.) a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K, \quad (..) a < b \text{ und } 0 < c \Rightarrow a * c < b * c //$

// (403) (P3) Aus  $x, y \in P$  folgt  $xy \in P //$

• Zu (O3):  $(.)$  Sei  $a < b$  und  $c \in K$  beliebig, d.h.  $b - a \in P \Rightarrow$

$$(b + c) - (a + c) \stackrel{A2, A3}{=} b - a \in P \xrightarrow{\text{Def } <} a + c < b + c$$

$(..)$  Sei  $a < b$  und  $c > 0$  d.h.  $b - a \in P$  und  $c - 0 \in P \Rightarrow$

$$bc - ac \stackrel{\text{Körperax., (D) und Rechenr.}}{=} \underbrace{(b - a)}_{\in P} c \in P \text{ (nach (P3))} \Rightarrow$$

$ac < bc$

$$\text{ausführlich: } bc - ac = bc + (-ac) = bc + (-a)c = \\ (b + (-a))c = (b - a)c$$

c) Zeige, dass ein angeordneter Körper unendlich viele Elemente haben muss.

**A1.2.6** Beweise  $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$  für  $0 \leq a \leq b, a, b \in R$ .

// (O3) (400)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in K, a < b \text{ und } 0 < c \Rightarrow a * c < b * c //$

Lös: Für  $a=0$  oder  $a=b$  ist die Beh. erfüllt

$$\begin{aligned} \text{Es sei } 0 < a < b &\xrightarrow{(O3)} a + ab \stackrel{(O3)}{<} b + ab \Rightarrow a(1+b) < b(1+a) \xrightarrow{1+b>0, 1+a>0} \\ \frac{1}{1+a} * \frac{1}{1+b} > 0 &\xrightarrow{(O3)} a(1+b) \frac{1}{1+a} * \frac{1}{1+b} < b(1+a) \frac{1}{1+a} * \frac{1}{1+b} \Rightarrow \\ \frac{a}{1+a} &< \frac{b}{1+b} \end{aligned}$$

**A1.2.7** Seien  $a, b, c, d$  Elemente eines angeordneten Körpers. Bestimme alle  $x \in K$ , für die gilt:

$$a) *: \frac{d}{b+c} < \frac{d}{x+c} \leq \frac{d}{a+c} \quad (0 < a < b, \quad 0 < c, \quad d \text{ beliebig})$$

Lös: 1. Fall  $d > 0 \Rightarrow d^{-1} > 0$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{1}{b+c} < \frac{1}{x+c} \leq \frac{1}{a+c} \quad \begin{matrix} \Leftrightarrow \\ b+c > 0 \Rightarrow b+c > 0 \Rightarrow \frac{1}{b+c} > 0 \end{matrix} \quad a+c \leq x+c < b+c \Leftrightarrow$$

$$a \leq x < b \quad (\text{notwendig})$$

$$a \leq x < b \Rightarrow (*) \text{ hinreichend}$$

2. Fall  $d = 0 \quad (*) \quad 0 < 0 \leq 0 \text{ nie erfüllt für } x \in K.$

3. Fall  $d < 0$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{x+c} < \frac{1}{b+c} \Rightarrow b < x \leq a \text{ notwendig, nicht} \\ \text{hinreichend, da } a < b \text{ nie erfüllt.}$$

▼

$$b) \text{ Ist } b, d > 0 \text{ und } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ so gilt } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Bew: Es ist  $b+d > 0$  und  $\frac{1}{b}, \frac{1}{d}, \frac{1}{b+d} > 0 \Rightarrow$

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \Leftrightarrow a(b+d) < (a+c)b \Leftrightarrow ab+ad < ab+cb \Leftrightarrow ad < cb \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ und}$$

$$\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow (a+c)d < (b+d)c \Leftrightarrow ad < bc \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}.$$

Beide Ungleichungen sind äquivalent zu  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ , was nach Vorig richtig ist. Also folgt die Beh.

$$c) *: x^2 + (a-b)x - ab \geq 0 \quad (a, b \geq 0)$$

Lös:  $* \Leftrightarrow (x+a)(x-b) \geq 0 \Leftrightarrow$

- $[(x+a) \geq 0 \text{ und } (x-b) \geq 0] \text{ oder } \bullet [(x+a) \leq 0 \text{ und } (x-b) \leq 0]$   $\Leftrightarrow_{0 < a, b, -a < 0 < b}$
- $(x \geq -a \text{ und } x \geq b) \text{ oder } \bullet (x \leq -a \text{ und } x \leq b)$   $\Leftrightarrow_{0 < a, b, -a < 0 < b} x \geq b \text{ oder } x \leq -a$

**D1.2.2 (405)** Sei  $K = (K, +, *, <)$  ein angeordneter Körper und  $T \subset K$ ,  $T \neq \emptyset$ .

Ein Element  $\bar{m} \in T$  heißt das Maximum von  $T$  ( $\bar{m} = \max T$ ): $\Leftrightarrow \forall t \in T \text{ gilt } t \leq \bar{m}$

Ein Element  $m \in T$  heißt das Minimum von  $T$  ( $m = \min T$ ): $\Leftrightarrow \forall t \in T \text{ gilt } m \leq t$

Bem: 1.) Zu  $T \subset K$ ,  $T \neq \emptyset$  muß kein  $\max T$  bzw  $\min T$  existieren

2.) Sei  $T_1 \subset T_2 \subset K$  und  $\exists \bar{m}_i = \max T_i$ ,  $i=1, 2 \Rightarrow \bar{m}_1 \leq \bar{m}_2$

Bew:  $\forall t \in T_2: t \leq \bar{m}_2$ ,  $\bar{m}_1 \in T_1 \subset T_2 \Rightarrow \bar{m}_1 \leq \bar{m}_2$

$T_1 \subset T_2 \subset K \exists \bar{m}_1 = \max T_1, \bar{m}_2 = \max T_2 \Rightarrow t \leq \bar{m}_2 \quad \forall t \in T_2$

Da  $\bar{m}_1 \in T_1 \subset T_2 \Rightarrow \bar{m}_1 \leq \bar{m}_2$

Analog gilt  $\exists m_i = \min T_i$ ,  $i=1, 2 \Rightarrow m_1 \geq m_2$

3.) Wenn für  $T \subset K$ ,  $T \neq \emptyset$   $\max T$  oder  $\min T$  existiert, so ist dieses eindeutig.

// (RR<) (400) 8.)  $a=b$  genau dann, wenn  $a \leq b$  und  $b \leq a$  //

Bew: Annahme  $\bar{m}_1, \bar{m}_2$  seien ein  $\max T$ , d.h.  $\bar{m}_1 \geq t, \bar{m}_2 \geq t \Rightarrow \bar{m}_1, \bar{m}_2 \in T$  und  $\forall t \in T: t \leq \bar{m}_1$  und  $t \leq \bar{m}_2$  mit  $t = \bar{m}_2$  bzw  $t = \bar{m}_1 \Rightarrow \bar{m}_2 \leq \bar{m}_1$  und  $\bar{m}_1 \leq \bar{m}_2 \stackrel{\text{8.) RR} <}{\Rightarrow} \bar{m}_1 = \bar{m}_2$

oder siehe weiter unten D1.3.1 zusätzliche Ausführungen

Bsp: Sei  $K$  angeordneter Körper und  $T := (0, 1] := \{x \in K \mid 0 < x \leq 1\} \Rightarrow$

1.)  $\max T = 1$  da  $1 \in T$  und es gilt  $x \leq 1 \quad \forall x \in T$

2.)  $T$  hat kein Minimum

// (RR<) (400) 9.)  $a < b \Rightarrow \exists c \in (K, <) \text{ mit } a < c < b \Rightarrow //$

//  $\forall \lambda \in K$  mit  $0 < \lambda < 1$  gilt  $a < a\lambda + (1-\lambda)b < b$  //

// D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R := <$ , Anordnungsaxiome: //

// (O2) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in K$  //

Bew: 1.) Def  $T \Rightarrow x \leq 1 \quad \forall x \in T$  und  $1 \in T \Rightarrow 1 = \max T$

2.) Annahme:  $\exists \min T = \underline{x} \in T \Rightarrow 0 < \underline{x} \leq 1$  und  $x \geq \underline{x} \quad \forall x \in T \stackrel{\text{RR} < 9.)}{\Rightarrow}$

$\exists x_0 \in K: 0 < x_0 < \underline{x} \stackrel{\text{(O2)}}{\Rightarrow} 0 < x_0 < 1 \Rightarrow x_0 \in T \text{ und } x_0 < \underline{x} \Rightarrow$

Widerspruch zur Def  $\underline{x} = \min T$

Andere Formulierung:

Annahme:  $x_0 = \min T \Rightarrow x_0 > 0$  (wegen  $x_0 \in T \stackrel{\text{RR} <}{\Rightarrow} 0 < \frac{x_0 + 0}{2} < x_0 \leq 1$ ,

$\frac{x_0}{2} \in T$  und  $\frac{x_0}{2} < \min T$  Widerspruch, also existiert  $\min T$  nicht.

D1.2.3 (407) Sei  $K$  angeordneter Körper und  $a \in K$  dann heißt

$|a| := \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$  der Absolutbetrag von  $a$

Bem: 1.) Offensichtlich existiert das max wie angegeben

2.) Für  $a, b \in K$  heißt  $d = |a - b|$  der Abstand von  $a$  und  $b$

S1.2.1 (407) Vor:  $K$  sei angeordneter Körper und  $a, b \in K$

• Beh: 1.)  $|a| = |-a|$

Bew:  $|a| := \max\{a, -a\} = \max\{-a, -(-a)\} =: |-a|$

• 2.)  $|a| \geq 0$  und  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

// D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R := <$ , Anordnungsaxiome: //

// (O1)  $\forall a, b \in K$  gilt genau eine der folgenden Eigenschaften: //

//  $a < b$  oder  $b < a$  oder  $a = b$  //

Bew:  $|a| \geq 0 \Leftrightarrow a \neq 0 \stackrel{\text{(O1)}}{\Leftrightarrow} a > 0 \text{ oder } a < 0$

• 3.)  $|ab| = |a| \cdot |b|$

Bew:  $ab=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ oder } b=0, \quad |ab|=0, |a|=0 \text{ oder } |b|=0$

$$a>0 \text{ und } b>0 \Rightarrow ab>0 \Rightarrow |ab|=ab=|a|\cdot|b|$$

$$a>0 \text{ und } b<0 \Rightarrow -b>0 \Rightarrow a(-b)>0 \Rightarrow |a\cdot b| = -(ab) =$$

$$a(-b) = |a|\cdot|b|$$

$$a<0 \text{ und } b<0 \Rightarrow a\cdot b=(-a)(-b)>0 \Rightarrow |ab|=ab=$$

$$(-a)(-b)=|a|\cdot|b|$$

• 4.)  $(..) b \neq 0 \Rightarrow \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} = |a| \cdot |b|^{-1}, \text{ speziell } (..) |b^{-1}| = |b|^{-1}$

$$\text{Bew: } (..) \left| \frac{a}{b} \cdot b \right| = |a| \stackrel{3.}{=} \left| \frac{a}{b} \right| \cdot |b| \Rightarrow \frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$$

$$(..) 1 = |1| = |bb^{-1}| = |b| \cdot |b^{-1}| \Rightarrow |b^{-1}| = \frac{1}{|b|}$$

• 5.)  $a=0 \Leftrightarrow |a| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{K} \text{ mit } \varepsilon > 0$

// (RR<) (400) 9.)  $a < b \Rightarrow \exists c \in (K, <) \text{ mit } a < c < b \Rightarrow //$

//  $\forall \lambda \in K \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \text{ gilt } a < a\lambda + (1-\lambda)b < b //$

Bew: „ $\Rightarrow$ “  $a=0 \Rightarrow |a|=0 \Rightarrow 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \in \mathbb{K}$

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $|a| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{K}, \quad \varepsilon > 0$ . Annahme  $a \neq 0 \Rightarrow$

$$|a| > 0 \quad (0 < \frac{0+|a|}{2} < |a|) \Rightarrow \text{Widerspruch, da mit } \varepsilon_0 = |a| > 0 \stackrel{9.}{\Rightarrow} \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |a|$$

• 6.)  $|a+b| \leq |a| + |b| \quad (\text{Dreiecksungleichung})$

// D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R := <$ , Anordnungsaxiome: //

// (O3)  $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K, \quad a < b \text{ und } 0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c //$

$$\text{Bew: Aus Def } |a|, |b| \Rightarrow \pm a \leq |a|, \pm b \leq |b| \stackrel{(O3)}{\Rightarrow} (\pm a) + (\pm b) \leq |a| + |b| \Rightarrow \pm(a+b) \leq |a| + |b| \Rightarrow \max(|a+b|, -|a+b|) = |a+b| \leq |a| + |b|$$

• 7.)  $|a+b| \geq ||a|-|b|| \geq |a|-|b|$

$$\text{Bew: } |a| = |a+b-b| \stackrel{6.}{\leq} |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$$

$$|b| = |a+b-a| \leq |a+b| + |a| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a+b|, \quad |b|-|a| \leq |a+b| \Rightarrow \pm(|a|-|b|) \leq |a+b| \Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a+b|$$

• 8.)  $||a|-|b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Linke Ungleichung heißt Dreiecksungleichung nach unten.

Bew:  $\pm a \leq |a|, \pm b \leq |b| \Rightarrow \pm(a \pm b) \leq |a| + |b| \Rightarrow |a \pm b| \leq |a| + |b|$ .

Weiter ist  $|a| = |a \pm b - b| \leq |a \pm b| + |b|$  und genauso ist  $|b| \leq |a \pm b| + |a| \Rightarrow \pm(|a|-|b|) \leq |a \pm b| \Rightarrow ||a|-|b|| \leq |a \pm b|$

**A1.2.8** Zeige: Für  $a < b < 0$  ist  $|a| > |b| > 0$

**A1.2.9** Es seien  $a, b, c$  Elemente eines angeordneten Körpers  $K$ . Zeige:  
a) aus  $a < b$  und  $b \leq c$  folgt  $a < c$

//**D1.2.1** (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R := <$ , Anordnungsaxiome://  
//(O2) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in K$  //

Bew: 1. Fall  $b = c$ ,  $a < b = c$  d.h.  $a < c$

2. Fall  $b \neq c \Rightarrow b < c \xrightarrow{a < b \text{ (O2)}} a < c$

b)  $|a+b| = |a| + |b|$  gilt genau dann, wenn  $a, b \geq 0$  oder  $a, b \leq 0$ .

Bew: "⇒, „Sei  $|a+b| = |a| + |b|$  ..

Annahme ( $a < 0$  oder  $b < 0$ ) und ( $a > 0$  oder  $b > 0$ )  $\Rightarrow$   
( $a < 0$  und  $b > 0$ ) oder ( $a > 0$  und  $b < 0$ ).

O.B.d.A.:  $a < 0$  und  $b > 0$  (sonst vertausche  $a$  und  $b$ )

$$-a+b \stackrel{\text{Def Betrag}}{=} |a| + |b| = |a+b| \xrightarrow{\begin{cases} a+b > 0 \\ -a+b, \text{ falls } a+b < 0 \end{cases}} \Rightarrow$$

$$-a=a \text{ oder } b=-b \Rightarrow 2a=0 \text{ oder } 2b=0 \xrightarrow{2 \neq 0}$$

$\underbrace{a=0 \text{ oder } b=0}_{\text{angeordneter Körper}}$  Widerspruch, also Annahme falsch,

d.h.  $a, b \geq 0$  oder  $a, b \leq 0$

"⇐, „Sei  $a, b \geq 0$  oder  $a, b \leq 0$ .

$$1. \text{ Fall: } a, b \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 0 \Rightarrow |a+b| \stackrel{\text{Def}}{=} a+b = |a| + |b|$$

$$2. \text{ Fall: } a, b \leq 0 \Rightarrow a+b \leq 0$$

$$\text{Bew: } -a \geq 0, -b \geq 0 \xrightarrow{\text{s. l. Fall}} \underbrace{(-a) + (-b)}_{-(a+b)} \geq 0 \Rightarrow a+b \leq 0$$

$$|a+b| \stackrel{\text{Def}}{=} -(a+b) = -a-b = (-a) + (-b) = |a| + |b|$$

Andere Formulierung:

Bew: "⇐, „Sei  $a \geq 0$  und  $b \geq 0$  dann gilt  $|a| + |b| = \underbrace{a+b}_{\geq 0} = |a+b|$ .

Wenn  $a \leq 0$  und  $b \leq 0$  dann  $|a| + |b| = \underbrace{-a-b}_{\geq 0} = |-a-b| = |a+b|$ .

"⇒,  $|x|^2 = x^2$  da  $x^2 = (-x)^2$  (siehe auch c)

Sei  $|a+b| = |a| + |b| \Rightarrow |a+b|^2 = (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + 2 \underbrace{|ab|}_{\text{RR}} + |b|^2 \Rightarrow$

$2ab = 2|ab| \Rightarrow ab \geq 0$  d.h. ( $a \geq 0$  und  $b \geq 0$ ) oder wenn ( $a \leq 0$  und  $b \leq 0$ )

Hierbei wurde benutzt:  $x^2 = \begin{cases} x \cdot x \\ (-x) \cdot (-x) \end{cases} = |x| \cdot |x| = |x|^2$

c)  $a^2 < b^2$  gilt genau dann, wenn  $|a| < |b|$

//D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R:=<$ , Anordnungsaxiome://  
 // (O2) Aus  $a < b$  und  $b < c \Rightarrow a < c \quad \forall a, b, c \in K$ //  
 // (O3)  $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K, a < b$  und  $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ //

Bew: "⇒ „Sei  $a^2 < b^2$ .

1. Möglichkeit:

$$\text{Annahme } |a| \geq |b| \Rightarrow \frac{|a|^2}{a^2} = a^2 = |a| \cdot |a| \stackrel{\text{mit (O3)}}{\geq} |a| \cdot |b| \geq \frac{|b|^2}{|b|^2} = b^2 \stackrel{(O2)}{\Rightarrow} a^2 \geq b^2 \text{ Widerspruch, also Annahme falsch d.h. } |a| < |b|$$

// (RR<) (400) 2.)  $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ , speziell  $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$ //

// 3.) (.)  $a, b > 0$  d.h.  $a > 0$  und  $b > 0 \Rightarrow ab > 0$  //

// (..)  $a > 0, b < 0 \Rightarrow ab < 0$ , //

// (...)  $a < 0$  und  $b < 0 \Rightarrow ab > 0$ //

//D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $R:=<$ , Anordnungsaxiome://

// (O3)  $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K, a < b$  und  $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$  //

2. Möglichkeit:

$$(b-a)(b+a)=b^2-a^2>0 \stackrel{\text{RK 3.)}}{\Rightarrow} b-a>0 \text{ und } b+a>0 \text{ oder } b-a<0 \text{ und } b+a<0 \Rightarrow$$

$$(b>a \text{ und } b>-a) \text{ oder } \underbrace{(b < a \text{ und } b < -a)}_{-b > -a \text{ und } -b > a} \Rightarrow$$

$b > |a|$ , insbesondere  $b > 0$ , oder

$-b > |a|$ , insbesondere  $-b > 0$ ,  $\Rightarrow |b| > |a|$

$$\text{„} \Leftarrow \text{Sei } |a| < |b| \Rightarrow a^2 = |a|^2 = |a| \cdot |a| \stackrel{\text{(O3) da } |a| < |b|}{\leq} |a| \cdot |b| \stackrel{\text{(O3) da } |b| > 0, |a| < |b|}{\leq}$$

$$|b| \cdot |b| = |b|^2 = b^2 \text{ d.h. } a^2 \leq |a| \cdot |b| \text{ und } |a| \cdot |b| < b^2 \stackrel{\text{vgl Teil a}}{\Rightarrow} a^2 < b^2$$

Hierbei wurde benutzt:

$$x^2 = \begin{cases} x \cdot x \\ (-x) \cdot (-x) \end{cases} = |x| \cdot |x| = |x|^2 \text{ sowie}$$

$$x < y, 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz \quad (\text{Bew: 1. Fall: } z=0 \Rightarrow xz=0 \leq 0=yz)$$

$$2. \text{ Fall: } z \neq 0, \text{ d.h. } z > 0 \stackrel{\text{(O3)}}{=} xz < yz \Rightarrow xz \leq yz)$$

$$d) 2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2 \geq 4ab$$

//D1.1.1 (300/301)//

// Menge min 2 Elemente:  $K$  //

// ( $K, \oplus, \otimes$ ):  $\Leftrightarrow \exists$  2 Abbildungen  $\oplus: K \times K \rightarrow K$  und  $\otimes: K \times K \rightarrow K$  //

// (A1)  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad \forall a, b, c \in K$ //

//D1.2.1 (400) ( $K, +, \cdot$ ) angeordnet:  $\Leftrightarrow \exists$  auf  $K$   $R:=<$ , Anordnungsaxiome://

// (O3)  $a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in K, a < b$  und  $0 < c \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$  //

$$\text{Bew: } (a+b)^2 - 4ab = (a^2 + 2ab + b^2) - 4ab \stackrel{\text{Rechenr in K}}{=} a^2 - 2ab + b^2 = (a^2 + 2a(-b) + (-b)^2) =$$

$$(a-b)^2 \geq 0 \quad (\text{wg } x^2 \geq 0 \quad \forall x \in K \setminus \{0\}) \stackrel{\text{A1... mit (O3)}}{\Rightarrow} (a+b)^2 \geq 4ab$$

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\ \text{weil } a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 0 \leq (a-b)^2$$

Andere Formulierung für  $(a+b)^2 \geq 4ab$ :

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ . Die Aussage  $(a-b)^2 \geq 0$  ist aber richtig (RR im Körper) und daher auch die äquivalente Aussage  $(a+b)^2 \geq 4ab$

**A1.2.10** Beweise:  $\frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$  für  $x, y \in \mathbb{R}$ .

//**A1.2.6** (404)  $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b}$  für  $0 \leq a \leq b$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . //

$$\text{Bew: } \frac{x+y}{1+|x+y|} \leq \frac{\overbrace{|x+y|}^a}{1+\underbrace{|x+y|}_a} \stackrel{A1.2.6}{\leq} \frac{\overbrace{|x|+|y|}^b}{1+\underbrace{|x|+|y|}_b} = \\ \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

**A1.2.11**  $(a_n) \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \in \mathbb{R}$ ,  $a_n \leq c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

a) Zeige  $a \leq c$

Bew: Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $N \in \mathbb{N}$ :  $|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n \geq N \Rightarrow a_n - \varepsilon < a < a_n + \varepsilon < c + \varepsilon$

Annahme  $a > c \Rightarrow a > c$ ,  $a < c + \varepsilon \Rightarrow 0 < a - c < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\varepsilon := \frac{a-c}{2} > 0 \Rightarrow 0 < a - c < \frac{a-c}{2} \dots \dots \text{Widerspruch!}$$

b)  $a_n := 1 - \frac{1}{n} < 1 = c \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

Lös:  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} :a \Rightarrow a=c$

**D1.2.4** (412) Für  $a \in \mathbb{R}$  heißt

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1 & \text{für } a > 0 \\ 0 & \text{für } a = 0 \\ -1 & \text{für } a < 0 \end{cases} \quad \text{das Vorzeichen oder das Signum von } a \text{ und}$$
$$|a| = a \text{ für } a \geq 0 \quad |a| = -a \text{ für } a < 0 \quad \text{der Betrag von } a$$

**S1.2.2** (412)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  gilt

- 1.)  $a=b \Leftrightarrow |a|=|b|$  und  $\operatorname{sgn} a=\operatorname{sgn} b$
- 2.)  $\operatorname{sgn}(ab)=(\operatorname{sgn} a)(\operatorname{sgn} b)$ ,  $|ab|=|a||b|$
- 3.)  $b \neq 0 \Rightarrow (\operatorname{sgn} a)/(\operatorname{sgn} b)=\operatorname{sgn}(a/b)$ ,  $|a/b|=|a|/|b|$