1.3(500) **Das Vollständigkeitsaxiom und die Definition der reellen Zahlen**

Alle bisherigen Überlegungen gelten z.B auch für den Körper der rationalen Zahlen.

D1.3.1(500) Sei $(K,<)$ angeordneter Körper $T\subset K$, $T\neq\emptyset$

1.)Ein Element $\overline{s}\in K$ ($\underline{s}\in K$) ($\overline{s}$, $\underline{s}$ müssen nicht zu T gehören) heißt obere (untere) Schranke von T: $\Leftrightarrow$ $\forall$ $t\in T$ gilt $t\leq\overline{s}$ ($t\geq\underline{s}$)

2.)T heißt nach oben (unten) beschränkt$\Leftrightarrow$ $\exists$ eine obere (untere) Schranke von T

3.)T heißt beschränkt:$\Leftrightarrow$ T ist nach oben und unten beschränkt.

4.)Ein $\overleftarrow{s}\in K$ ($\underrightarrow{s}\in K$) heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von T (größte untere Schranke oder Infimum von T): $\Leftrightarrow$

$\alpha)$ $\overleftarrow{s}$ ($\underrightarrow{s}$) ist obere (untere) Schranke von T

$\beta)$ $\overleftarrow{s}\leq\overline{s}$ $\forall$ oberen Schranken $\overline{s}$ von T ($\underrightarrow{s}\geq\underline{s}$ $\forall$ unteren Schranken $\overline{s}$ von T)

Bez: $\overleftarrow{s}$ =supT ($\underrightarrow{s}$ =inf T)

Andere Formulierung:

a=supA: $\begin{cases}\forall x\in A: x\leq a \text{ d.h. } a \text{ ist obere Schranke von } A\\ \forall c\in R: x\leq c \ \forall x\in A\Rightarrow a\leq c, \text{d.h. } a \text{ ist obere Schranke von } A\end{cases}$ $\Leftrightarrow$

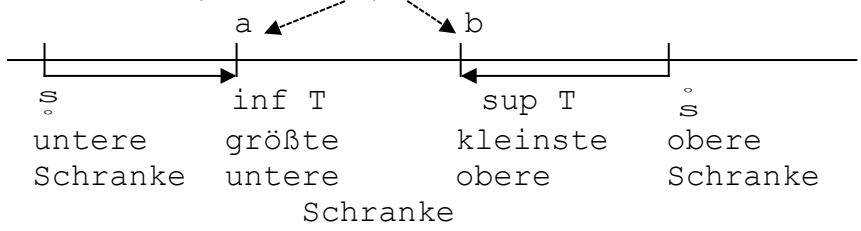
$a\in R$ ist kleinste obere Schranke von A

Bem:$a\in T$, z.B. $T=\{t|t\geq a\}$ $\Rightarrow$ a=inf T=min T

$a\notin T$, z.B. $T=\{t|t>a\}$ $\Rightarrow$ a=inf T$\neq$min T

Bsp/Merkskizze

T={x|a<x<b}, *d.h. a,b$\notin$T



Bez:1.)Ist $T\subset K$ nach oben/unten nicht beschränkt, so schreibt man supT:=∞ (infT:=-∞) (dann existiert supT/infT nicht)

2.)Für $T=\emptyset$ sei sup $\emptyset$:=-∞, inf T:=+∞

Bem:1.)$T\subset K$ ist beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists$ $c\in K$ mit $|t|\leq c$ $\forall$ $t\in T$

2.)Falls existent, sind sup T und inf T eindeutig bestimmt

Bew: $s_1,s_2=\sup T \Rightarrow s_1\leq s_2$ und $s_2\leq s_1 \Rightarrow s_1=s_2$

3.)Sei $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $\exists$ sup T bzw inf T $\Rightarrow$

sup T = $\min\{\overline{s}\,|\,\overline{s}$ ist obere Schranke von T in K$\}$

inf T $\neq$ $\max\{\underline{s}\,|\,\underline{s}$ ist untere Schranke von T in K$\}$

d.h. sup T und inf T müssen nicht, können aber $\in K$ sein.

Wenn sup T bzw inf T $\in K$, siehe S1.3.1 2.

Zusätzliche Ausführungen:

Seien $A\neq\emptyset$, $A,B\subset K$ und sei $\zeta\in K$. Wir schreiben dann

$A\leq\zeta \Leftrightarrow \zeta\geq A \Leftrightarrow \forall\, a\in A: a\leq\zeta$ obere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A\geq\zeta \Leftrightarrow \zeta\leq A \Leftrightarrow \forall\, a\in A: a\geq\zeta$ untere Schranke, muss nicht in A enthalten sein

$A\leq B \Leftrightarrow B\geq A \Leftrightarrow \forall\, b\in B: A\leq b$

Jedes ζ mit $A\leq\zeta$ heißt obere Schranke für A, jedes ζ mit $A\geq\zeta$ heißt untere Schranke für A. Falls A eine obere (untere) Schranke besitzt, dann heißt A nach oben(unten)beschränkt. Falls A nach oben und unten beschränkt ist, nennen wir A kurz beschränkt.

$a\in A$, welches gleichzeitig obere(untere) Schranke von A ist, heißt maximales (minimales)Element oder kürzer Maximum(Minimum) von A und wir schreiben:$a=\max A$ ($a=\min A$).

S1.3.1(501) Vor.:Sei K angeordnet und $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$

Beh:1.) $\overleftarrow{s}=\sup T$: $\Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und

β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T

$\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\leq\overleftarrow{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$

Bew:Negation von β):$\exists\ \varepsilon_0>0$ aus K und $\forall\, t\in T: t\leq\overleftarrow{s}-\varepsilon_0 \Leftrightarrow$

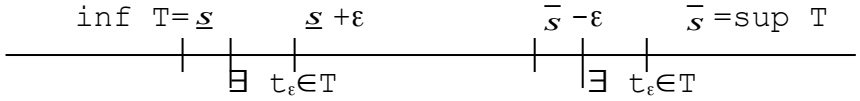
$\exists\ \varepsilon_0>0$ aus K: $\tilde{s}\leq\overleftarrow{s}-\varepsilon_0$ ist obere Schranke von T, die kleiner als $\overleftarrow{s}$ ist

analog

$\underline{s}=\inf T:\Leftrightarrow \alpha)\ \underline{s}$ ist untere Schranke von T und

β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T

$\Leftrightarrow \forall\, t\in T: t\geq\underline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$



2.)$\exists$ max T $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup $T\in K$ und sup $T\in T$: max T=sup T

$\exists$ min T $\Leftrightarrow$ $\exists$ inf $T\in K$ und inf $T\in T$: min T=inf T

*//**D1.2.2** (405) $K=(K,+,\cdot,<)$ & $T\subset K$, $T\neq\emptyset$. $\overline{m}=\max T:\Leftrightarrow \forall\ t\in T: t\leq\overline{m}$ .//*

Bew:„⇒“ $\overline{m}:=\max T \overset{D1.2.2}{\Rightarrow}$ $\forall\ t\in T$ gilt $t\leq\overline{m}$ und $\overline{m}\in T \Rightarrow$

$\overline{m}\leq s$ – $\forall$ oberen Schranken von T, $\overline{m}$ obere Schranke von T $\Rightarrow$

$\forall$ s' die obere Schranke von T gilt $t\leq s'$ $\forall\ t\in T$.

$\overline{m}\in T \Rightarrow \overline{m}\leq s' \Rightarrow \exists\ \overline{m}=\sup T\in T$

„⇐“ $\overline{m}=\sup T$ und $\overline{m}\in T \Rightarrow \forall\ t\in T: t\leq\overline{m}$. Da $\overline{m}\in T \Rightarrow \exists$ max $T=\overline{m}$

Bsp:1.)$T=(0,1] \Rightarrow 1=\max T=\sup T$, $0=\inf T\neq\min T$

2.) $\mathbb{R}\supset M=(0,1)\cup[2,5]$

$\forall\ x>5$: $m\leq 5$ $\forall\ m\in M$, aber x ist nicht kleinste obere Schranke.

Analog für x=0, also sup M= max M=5, inf M=0

3.) $A:=\{x\in\mathbb{R}: 0\le x<5\}$
inf A= min A=0.
Bew: 0 ist untere Schranke da $0\le a\ \forall\ a\in A$. Sei $r>0 \Rightarrow$
r ist keine untere Schranke von A, denn $\tilde{r}:=\frac{r}{2}<r$, aber
$\tilde{r}\in A \Rightarrow$ 0 ist größte untere Schranke. $0\in A$. Analog sup A=1.
$1\notin A \Rightarrow \nexists$ max A

4.) $B:=\{\frac{1}{n}:\in\mathbb{N}\}$. inf $>B=0\notin B \Rightarrow \nexists$ max B

5.) $x\ge 0$, $x^2\ge 2 \Leftrightarrow x>\sqrt{2}$
Bew: "$\Leftarrow$" $x\ge\sqrt{2} \Rightarrow x*x\ge\sqrt{2}*\sqrt{2}=2>0$
„$\Rightarrow$" Annahme $x<\sqrt{2} \Rightarrow x*x<\sqrt{2}*\sqrt{2}=2 \Rightarrow$
Definiere $C:=\{x\in\mathbb{R}: x\ge\sqrt{2}$ und $x<3\}$...Beh min $C=\sqrt{2} \Rightarrow$
$\sqrt{2}\in C$ und $\sqrt{2}\le c\ \forall\ c\in C \underbrace{\Rightarrow}_{\exists \min C}$ min C=inf $C=\sqrt{2} \underbrace{\Rightarrow}_{\exists \max C}$
$\forall\ x\in C: \underbrace{y}_{\in M}=\frac{x+3}{2}>x$. sup C=3: $3\ge c\ \forall\ c\in C$

6.) Sei $(K,<)$ und $T=\{x\in K\,|\,-1<x\le 0\}=(-1,0]$
max T=sup T=0, inf T=-1, min T existiert nicht.
Bew: inf T=-1 $\Rightarrow$ Es gilt $-1\le x\ \forall\ x\in T \Rightarrow$ -1 ist untere Schranke.
Annahme: s>-1 sei ebenfalls untere Schranke von T.
Definiere $\tilde{s}=\frac{-1+s}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{\mathbb{R}\mathbb{R}<} -1<\tilde{s}<s<0 \Rightarrow \tilde{s}\in T$, aber $\tilde{s}<s$
Widerspruch zu s ist untere Schranke von T

7.) $K=\mathbb{R}$, $A,B\subset K$, $A,B\neq\emptyset$ und beschränkt.
Z.z sup(A∪B)=max{sup A, sup B}
Bew: ObdA sei sup A ≥ sup B, z.B. A=[0,5), B=(-2,3) $\Rightarrow$
Sup A=5, supB=3
(.) Z.z. sup A obere Schranke: sup $A\ge t\ \forall\ t\in A \Rightarrow$
sup $A\ge$ sup $B\ge b\ \forall\ b\in B \Rightarrow$ sup $A\ge u\ \forall\ u\in A\cup B$
(..) $\forall\varepsilon>0\ \exists\ u\in A\cup B$: sup $A-\varepsilon<u$, sup A ist Supremum von A d.h.
$\forall\varepsilon>0\ \exists\ u\in A$: sup $A-\varepsilon<u$, $u\in A \Rightarrow u\in A\cup B$, sup $A-\varepsilon<u$, u:=t
(.) und (..) $\Rightarrow$ sup A=sup A∪B

8.) K_+ (d.h. $0\notin K_+$) ist nach unten beschränkt durch ζ=0. Ist $\eta\in K_+$
$\Rightarrow \eta/2\in K_+$ und $\eta/2<\eta$. Also kann kein Element von K_+ gleichzeitig untere Schranke von K_+ sein und deshalb ist 0 die größte untere Schranke von $K_+ \Rightarrow 0=\inf K_+$. $0\notin K_+ \Rightarrow K_+$ besitzt kein Minimum.
K_+ nicht nach oben beschränkt, denn gäbe es eine obere Schranke für K_+, etwa ζ, so wäre sowohl $\zeta\in K_+$ also auch $\zeta+1\in K_+$, und mit $\zeta+1>\zeta$ ergibt sich ein Widerspruch.

9.) Seien $x>0$ und $A_x=\{a>0 : a^2\le x\}$.
Falls $\zeta=\sup A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.

*//**S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*
// 1.) $\overleftarrow{s}=\sup T$: $\Leftrightarrow$ α) $\overleftarrow{s}$ ist obere Schranke von T und //
// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\overleftarrow{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T //
// $\Leftrightarrow$ $\forall\ t\in T: t\le\overleftarrow{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overleftarrow{s}-\varepsilon$ //

Bew: Angenommen, daß

1. Fall: $\zeta^2>x$. Sei $\varepsilon=\underbrace{\underbrace{(\zeta^2-x)/(2\zeta)}_{<\zeta^2}}_{<\zeta/2}$ (d.h. $x=\zeta^2-2\zeta\varepsilon$) $\Rightarrow 0<\varepsilon<\zeta/2$. $\underset{S1.3.1}{\Rightarrow}$

$\exists\ a\in A_x: a>\zeta-\varepsilon \Rightarrow x\ge a^2>(\zeta-\varepsilon)^2>\underbrace{\xi^2-2\xi\varepsilon}_{<\xi^2-2\xi\varepsilon+\varepsilon^2}=x$, was nicht sein kann.

2. Fall: $x>\zeta^2$. (ζ^2 sehr nahe bei x)

Für $\varepsilon=\min\{\underbrace{\underbrace{\zeta,(x/\zeta-\zeta)/3}_{>\zeta}}_{>0}\}$ gilt dann $\varepsilon/\zeta\le 1$, also $(\varepsilon/\zeta)^2\le\varepsilon/\zeta$

$\Rightarrow$ für $a=\zeta+\varepsilon=\zeta*1+\zeta*\varepsilon/\zeta)=\zeta(1+\varepsilon/\zeta)$:

$a^2=\zeta^2(1+\varepsilon/\zeta)^2=\zeta^2(1+2\varepsilon/\zeta+\underbrace{\left(\frac{\varepsilon}{\zeta}\right)^2}_{<\varepsilon/\zeta})\le\zeta^2(1+3\varepsilon/\zeta)=$

$\zeta^2\left(1+\frac{3(x/\zeta-\zeta)}{3\zeta}\right)=\zeta^2+x-\zeta^2\le x$.

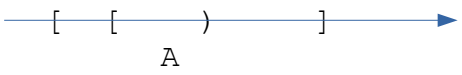
Demzufolge wäre $a=\zeta+\varepsilon\in A_x$, also ζ keine obere Schranke für A_x $\Rightarrow$ Widerspruch zu Def von ζ $\Rightarrow$ $\zeta^2=x$

A1.3.1

a) Zeige (.) $A\subset B$, $\exists$ min A, min B $\Rightarrow$ min $A\ge$ min B

Bew: $\underline{a}$_min A: $a\in A$ & $A\subset B \Rightarrow a\in B \Rightarrow a\ge$ min B

Bspskizze



(..) $A\subset B$, $\exists$ inf A, inf B $\Rightarrow$ inf $A\ge$ inf B

Bew: $a:=\inf A \underset{A\subset M}{\Rightarrow} a\in B \underset{b:=\inf B}{\Rightarrow} a\ge b$?

A:=inf A, b:=inf B $\Rightarrow b\le x\ \forall\ x\in B \underset{A\subset M}{\Rightarrow} b\le x\ \forall\ x\in A \Rightarrow$

b auch untere Schranke von A, d.h. $b\le a$

(...) $\exists$ max A & max B $\Rightarrow$ $\exists$ max $(A\subset B)$ & max $(A\cup B)=\max\{\max A, \max B\}$

Bew: $x\in A\cup B \Rightarrow x\in A \vee x\in B \Rightarrow x\le\max A \wedge x\le\max B \Rightarrow$

$x\le\max\{\max A, \max B\}\ \forall\ x\in A\cup B$

Da $\max\{\max A, \max B\}\in A\cup B$ ist $\max\{\max A, \max B\}=\max A\cup B$

b) $M=\{\underbrace{2-\frac{n-1/2}{n}}_{1+1/2n} \mid n\in\mathbb{N}\}$ n 1 2 3 4

t 3/2 5/4 7/6 9/8

max, sup, min, inf ?

Lös: Z.z Vermutung max M=3/2

(.) $n=1 \Rightarrow 2-\frac{n-1/2}{n}=3/2 \Rightarrow 3/2\in M$

(..) $3/2 \geq t \ \forall\ t\in M,\ 3/2 \geq 1+1/2n \Leftrightarrow 3/2 \geq \frac{2n+1}{2n} \Leftrightarrow 6n \geq 4n+2 \Leftrightarrow 2n \geq 2$

$\Leftrightarrow n \geq 1 \Rightarrow 3/2=\max M=\sup M$

Z.z Vermutung inf M=1

(.) 1 ist untere Schranke $\Rightarrow 1+\frac{1}{2n}>1$

(..) Kleinste untere Schranke: $\forall \varepsilon>0\ \exists\ t\in M: 1+\varepsilon>t$.

Sei $\varepsilon>0$: $1+\varepsilon>1+\frac{1}{2n} \Leftrightarrow 2n+2n\varepsilon>2n+1 \Leftrightarrow n>\frac{1}{2\varepsilon}$.

Wähle $n\in\mathbb{N}: n>\frac{1}{2\varepsilon}$, $t_n:=1+\frac{1}{2n}<1+\frac{1}{2\frac{1}{2\varepsilon}}=1+\varepsilon \Rightarrow \inf M=1$

Min M=1?

Annahme $\exists$ min M. min M$\neq$1 $\Rightarrow$ min M=inf M Widerspruch

A1.3.2 Zeige: Ist $A\subset K$ nach oben (unten) beschränkt, und ist $B\subset A$, $B\neq\emptyset$, so ist B ebenfalls nach oben (unten) beschränkt)

A1.3.3 Sei $A\subset K$, $A\neq\emptyset$, $B=-A=\{-a: a\in A\}$. Zeige:

a) Genau dann ist A nach oben beschränkt, wenn B nach unten beschränkt

b) Genau dann besitzt A ein Supremum, wenn B ein Infimum besitzt und es gilt sup A=-inf B.

A1.3.4 Zeige: K selber ist nach oben und unten nicht beschränkt

A1.3.5 Zeige: Genau dann ist ζ Supremum einer Menge $A\subset K$, wenn folgendes gilt: $\forall\ a\in A: a\leq\zeta$; $\forall \varepsilon>0\ \exists\ a\in A: a>\zeta-\varepsilon$.
Finde selber eine analoge Charakterisierung für das Infimum von A.

A1.3.6 Seien A, B Teilmengen eines geordneten Körpers.
Definiere $A+B=\{a+b: a\in A \wedge b\in B\}$, $A-B=\{a-b: a\in A \wedge b\in B\}$. Nimm an, dass für alle 4 Mengen A, B, A+B, A-B sup und inf existieren. Zeige:

a) sup(A+B)=sup A+sup B

Z.z. supA+sup B ist (..)kleinste (.)obere Schranke von A+B

(.) Z.z. $\forall\ x\in(A+B): x\leq \sup A+\sup B$

Bew: Sei $x\in(A+B)$, $x=a+b$, $a\in A$, $b\in B$. Es gilt
$\forall\ a\in A\ a\leq\sup A$, $\forall\ b\in B\ b\leq\sup B \Rightarrow \forall\ x=a+b\leq\sup A+\sup B \Rightarrow$ obere Schranke

(..) Sei $A+B\leq m$, Z.z. $\sup A+\sup B\leq m$.

$A+B\leq m \Rightarrow a+b\leq m\ \forall\ a\in A,\ b\in B \underset{b\in B \text{ bel fest}}{\Rightarrow} a\leq m-b\ \forall\ a\in A \Rightarrow$
m-b obere Schranke von A $\Rightarrow \sup A\leq m-b\ \forall\ b\in B$ (da b beliebig gewählt) $\Rightarrow b\leq \underbrace{m-\sup A}_{\text{obere Schranke v B}}\ \forall\ b\in B \Rightarrow \sup B\leq m-\sup A \Rightarrow \sup A+\sup B\leq m$

Ähnliche Aufgabe/Formulierung:

A,B$\subset$R seien beschränkte Mengen, d.h. $|a|\le c_1$, $|b|\le c_2$ $\forall$ a$\in$A, b$\in$B $\Rightarrow$
$|a+b|\le c_1+c_2$ $\forall$ a$\in$A,b$\in$B $\Rightarrow$ A+B={a+b|a$\in$A,b$\in$B} ist beschränkt.
Es sei s_1=sup A und s_2=supB. Z.z. s_1+s_2=sup(A+B)
Es gilt:$s_1\ge a$, $s_2\ge b$ $\forall$ a$\in$A, b$\in$B $\Rightarrow$ $s_1+s_2\ge a+b$ $\forall$ a$\in$A, b$\in$B $\Rightarrow$
s_1+s_2 ist obere Schranke.
$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ $a_0\in A$, mit $a_0>s_1-\varepsilon/2$ und $b_0\in B$, mit $b_0>s_2-\varepsilon/2$ $\Rightarrow$
$a_0+b_0\in A+B$ mit $a_0+b_0>s_1+s_2-\varepsilon$ $\Rightarrow$ s_1+s_2=sup(A+B)

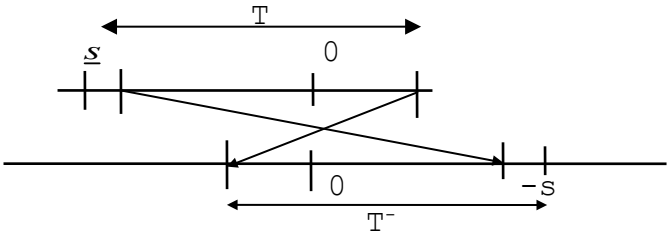
b)sup(A-B)=sup A-inf B
Lös:Z.z (.)A-B$\le$sup A-inf B (..)$\forall$ $\varepsilon>0$ $\exists$ x$\in$A-B, x$\ge$sup A-inf B-ε
Sei $\varepsilon>0$ beliebig. $\exists$ a$\in$A:a$\ge$sup A-$\varepsilon/2$,
$\exists$ b$\in$B:b$\le$inf B+$\varepsilon/2$, -b$\ge$-inf B-$\varepsilon/2$, $\Rightarrow$
x=a-b$\ge$sup A-$\varepsilon/2$-inf B-$\varepsilon/2$=sup A-inf B-ε.

c)inf(A+B)=inf A+inf B

d)inf(A-B)=inf A-supB

D1.3.2(505)
Ein angeordneter Körper (K,+,$\cdot$,<) heißt vollständig (bezüglich <):
$\Leftrightarrow$ $\forall$ T$\subset$K, T$\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ supT$\in$K.
Ein angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt
Körper der rellen Zahlen R
Bem:siehe auch A1.3.13. K=(K,+, $\cdot$,<) ist vollständig: $\Leftrightarrow$ Jede nach unten beschränkte Menge T$\subset$K, T$\neq\emptyset$ besitzt ein Infimum infT in K
Bew:Sei T^-:= {x$\in$K:-x$\in$T}. Dann gilt für $\underline{s}\in K$:
$\underline{s}$ ist untere Schranke von T $\Leftrightarrow$ $\underline{s}\le t$ $\forall$ t$\in$T $\Leftrightarrow$
$x\le -\underline{s}$ $\forall$ t$\in T^-$ $\Leftrightarrow$ $-\underline{s}$ ist obere Schranke von T^- $\Rightarrow$ inf T=-sup T^-.
K vollständig $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup T^- $\Leftrightarrow$ $\exists$ inf T

#Bsp:



Für den positiven Kegel K_+ schreiben wir künftig auch R_+, d.h. x$\in R_+$ ist gleichbedeutend mit x>0.
*//**S1.3.1** Bsp 5.) (501) Seien x>0 und $A_x=\{a>0:a^2\le x\}$. //*
// Falls $\zeta=sup\ A_x$ existiert, dann gilt $\zeta^2=x$.//
*//**D1.3.2** (504) (K,+,$\cdot$,<) heißt vollständig (bezüglich <): $\Leftrightarrow$ //*
// $\forall$ T$\subset$K, T$\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ supT$\in$K. Ein//
// angeordneter, vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt//
// Körper der rellen Zahlen R//
Für folgendes siehe auch S1.3.2
Für x$\in R_+$ haben wir in Bsp 5 bei S1.3.1 gezeigt, daß $A_x=\{a\in R|a^2\le x\}\neq\emptyset$ und nach oben beschränkt ist $\underset{D1.3.2}{\Rightarrow}$ $\exists$ ζ=sup A_x $\underset{Bsp\ 5.)}{\Rightarrow}$ ζ^2=x. Dieses ζ nennen wir die positive Quadratwurzel von x und schreiben $\zeta=\sqrt{x}$.
Wir setzen $\sqrt{0}=0$.
Erweiterte reelle Zahlen $\overline{R}$:
Wir nehmen zu den reellen Zahlen R 2 neue Objekte ∞ und $-\infty$ hinzu,

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ und erweiterte Ordnungsrelation $-\infty<x<\infty$ und definieren die kommutativen Operationen $\infty+x=\infty \ \forall\ x\in\mathbb{R}$, $\infty+\infty=\infty$, $-\infty+(-\infty)=-\infty$, $\infty \ast x = \begin{cases} \infty \text{ falls } x > 0 \\ -\infty \text{ falls } x < 0 \end{cases}$, aber $0\ast\infty$ nicht definiert, $\infty\ast\infty=\infty$,

$(-\infty)\ast\infty=-\infty$, $(-\infty)(-\infty)=\infty$, $\frac{x}{\pm\infty} := 0 \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.

$\overline{\mathbb{R}}$ ist kein Körper (siehe nicht definiertes)

Intervalle $[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<\infty\}$, $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}: -\infty<x<b\}$

D1.3.3(506) Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$, Dann sei

$[a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x\leq b\}$ abgeschlossenes Intervall mit Endpunkten a,b

$(a,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid a<x\leq b\}, a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall

$[a,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid a\leq x<b\}, a<b$ halboffenes/halbabgeschlossenes Intervall

$(a,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}, a<b$ offenes Intervall

$(-\infty,b] := \{x\in\mathbb{R} \mid x\leq b\}, (-\infty,b) := \{x\in\mathbb{R} \mid x<b\}$

$[a,\infty) := \{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}$, $(a,\infty) := \{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}$

$(-\infty,\infty) := \mathbb{R}$ unbeschränkte Intervalle

Aus dem Zusammenhang muß sich ergeben, ob (a,b) offenes Intervall oder Paar von a und b ist.

A1.3.7 (Dedekindsche Schnitte)

Geg: $A,B\subset\mathbb{R}$ mit $A,B\neq\emptyset$, $A\cup B=\mathbb{R}$, $a\leq b \ \forall\ a\in A, b\in B$

Z.z.: $\exists_1\ s\in\mathbb{R}$ mit $a\leq s\leq b \ \forall\ a\in A, b\in B$. (Ersatz für Vollständigkeitsaxiom)

Bew: A ist nach oben beschränkt, denn jedes $b\in B$ ist obere Schranke.

Setze $s=\sup A$. Dann ist offensichtlich $a\leq s \ \forall\ a\in A$, s ist kleinste obere Schranke von A, also $s\leq b\in B$.

Noch z.z. ist Eindeutigkeit.

Sei hierzu $\tilde{s}$ mit $a\leq\tilde{s}\leq b \ \forall\ a\in A, b\in B$.

Annahme $\tilde{s}\neq s$. Da $\tilde{s}$ obere Schranke von A ist, muss $\tilde{s}>s$ sein.

Dann folgt

$A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$. $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widerspruch. Also muss $\tilde{s}=s$ sein.

Andere Formulierung:

Bew: Sei $M\neq\emptyset$, nach oben beschränkt: $\exists$ sup M

Sei $m\in M$ ' $\tilde{M}=\{x\in M: x\geq m\}\subset M \Rightarrow$ M beschränkt ' $\exists$ s:sup $\tilde{M} \Rightarrow$

s ist obere Schranke von M $\Rightarrow \forall\ \varepsilon>0 \ \exists\ m\in\tilde{M}: x>s-\varepsilon \Rightarrow s=\sup M$

A ist nach oben beschränkt, da jedes $b\in B$ obere Schranke.

Setze $s=\sup A \Rightarrow a\leq s \ \forall\ a\in A$. s ist kleinste obere Schranke von A $\Rightarrow$ $s\leq b \ \forall\ b\in B$.

Eindeutigkeit:

Sei $\tilde{s}$: $a\leq\tilde{s}\leq b \ \forall\ a\in A, b\in B$. Annahme $\tilde{s}\neq s$: $\tilde{s}$ obere Schranke von A, muss

$\tilde{s}>s$ sein $\Rightarrow A\cup B\subset(-\infty,s]\cup[\tilde{s},\infty)\neq\mathbb{R}$, da $\frac{s+\tilde{s}}{2}\notin A\cup B$ Widersapruch $\Rightarrow \tilde{s}=s$

A1.3.9 Zeige: Zu einem $y>0$ $\exists_1\ x>0: x^2=y \Rightarrow$ d.h. oben definierte Quadratwurzel von x ist Umkehrabbildung der Funktion $x\mapsto x^2$

A1.3.10 Finde heraus, für welche $x\in\mathbb{R}$ die Gleichung $x=\sqrt{x}$ richtig

bzw falsch ist.

A1.3.11 Zeige, daß das Vollständigkeitsaxiom zu folgenden Aussagen äquivalent ist

a) Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Infimum.

b) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt sowohl ein Infimum als auch ein Supremum

c) Jede nichtleere und beschränkte Teilmenge von K besitzt ein Supremum

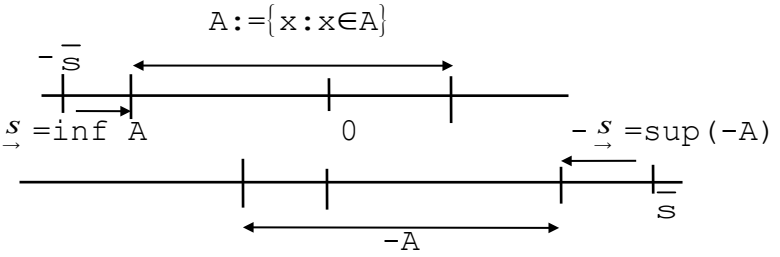
A1.3.12 Zeige:Für alle $a\in R$ gilt $|a|=\sqrt{a^2}$

A1.3.13 Es sei K ein angeordneter Körper

a) Definiere für $A\subset K$ die Menge $-A:=\{-x:x\in A\}$.

Zeige:Es existiert $\inf A\in K$ genau dann, wenn $\sup(-A)\in K$ existiert und dann gilt: $\inf A=-\sup(-A)$.

#Bsp



Bew:"⇒„Sei $\underset{\rightarrow}{s}=\inf A\in K$.

Wir zeigen: $\sup(-A)=-\underset{\rightarrow}{s}\in K$ (insbesondere existent).

Mit Def:

(α) $-\underset{\rightarrow}{s}$ ist obere Schranke von −A:

$$\underset{\rightarrow}{s}=\inf A \Rightarrow \underset{\rightarrow}{s}\le x\ \forall\ x\in A \Rightarrow -\underset{\rightarrow}{s}\ge -x\ \forall\ x\in A \underset{\text{Def v A}}{\Rightarrow} -\underset{\rightarrow}{s}\ge y\ \forall\ y\in -A$$

(β) $-\underset{\rightarrow}{s}\le \bar{s}$ $\forall$ oberen Schranken $\bar{s}$ von −A

Sei $\bar{s}$ obere Schranke von −A beliebig ⇒

$-\bar{s}$ untere Schranke von A (denn $\bar{s}\ge y\ \forall\ y\in -A \Rightarrow$

$\bar{s}\ge -x\ \forall\ x\in A \Rightarrow -\bar{s}\le x\ \forall\ x\in A) \underset{s=\inf A}{\Rightarrow} -\bar{s}\le \underset{\rightarrow}{s} \Rightarrow \bar{s}\ge -\underset{\rightarrow}{s}$

„⇐„Analog Aus Bew folgt $\sup(-A)=-\underset{\rightarrow}{s}=-\inf(A)$

b)Es seien A,B nichtleere Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit $A \subset B$

(.)Zeige:Falls sup A und sup B in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt $\sup A \leq \sup B$

//BeM: 3.)(500)Sei $T \subset K$, $T \neq \emptyset$, $\exists$ sup T bzw inf T $\Rightarrow$//

// sup T = min{ s° | s° ist obere Schranke von T in $\mathbb{K}$}//

Lös:Z.z.$\exists$ sup A,sup B$\in\mathbb{K}$ $\Rightarrow$ sup A$\leq$sup B,

$\sup A \underset{\text{Bem 3}}{=} \min\{s' : s' \text{ ist obere Schranke von A in } \mathbb{K}\} \underset{\text{Abschätzung}}{\leq}$

$\min\{s'' : s'' \text{ ist obere Schranke von B in } \mathbb{K}\} = \sup B$

Bew:Aus „>“

Annahme $\exists$ s_0'' obere Schranke von B mit $\sup A > s_0''$ $\underset{A \subset B}{\Rightarrow}$

s_0'' ist obere Schranke von A mit $\sup A > s_0''$ $\Rightarrow$ Widerspruch

Bem:$s_0'' \geq b$ $\forall$ $b \in B$ $\Rightarrow$ $s_0'' > a$, $A \subset B$ $\forall$ $a \in A$

(..)Zeige:Falls inf A und inf B in $\mathbb{K}$ existieren, so gilt inf A$\geq$inf B

Lös:analog(.)

(...)Gibt es solche Mengen $A \neq B$, für die inf A, inf B, sup A, sup B existieren, mit sup A=sup B und inf A =inf B?

Lös:Sei $B=(0,1]$ $\Rightarrow$ sup B=1, inf B=0 (insbesondere existent in $\mathbb{K}$).

$A:=(0,1]\setminus\{\underbrace{1/2}_{\text{irgend ein Punkt}}\}$ $\Rightarrow$ sup A=1, inf A=0.

analog zum Bew für B

A1.3.14 Es sei K ein angeordneter Körper und $A:=\{x\in K: x>1\}$.
Existieren inf A, min A, sup A, max A in K? Bestimme im Falle der Existenz die entsprechenden Werte.

*//**D1.2.1** (400)(K,+,*) angeordnet: $\Leftrightarrow \exists$ auf K//*
// R:=<,Anordnungsaxiome://
// (O2)Aus a<b und b<c $\Rightarrow$ a<c $\forall$ a,b,c∈K//
*// (O3)a<b $\Rightarrow$ a+c < b+c $\forall$ c∈K, a<b und 0<c $\Rightarrow$ a*c < b*c//*
*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//*
// 2.)$\exists$ maxT $\Leftrightarrow \exists$ supT∈K und supT∈T: maxT=supT//
// $\exists$ minT $\Leftrightarrow \exists$ infT∈K und infT∈T: minT=infT//

Bew:(.)sup A existiert nicht in K, sonst wäre sup A∈K obere Schranke von A d.h. $x\leq \sup A \ \forall\, x\in A \underset{x>1\,\forall x\in A}{\Rightarrow} 1<\sup A$, $0<\sup A \underset{(O2),(O3)}{\Rightarrow} 1<(\sup A)+1$

$\underset{\text{Def A}}{\Rightarrow}$ (sup A)+1∈A Widerspruch zu sup A obere Schranke von A, denn sup A<(sup A)+1

max A existiert nicht in K, da sup A nicht existiert in K, wg. S1.3.1 2.)

(..)inf A existiert und inf A=1. Bew mit Def von inf, denn

α) 1 ist untere Schranke von A, klar, da 1<x $\forall$ x∈A (insbesondere 1≤x $\forall$ x∈A)

β) $1\geq \underline{\leq}$ $\forall$ unteren Schranken $\underline{\leq}$ von A.

Bew:Annahme: $\exists\ \underline{\leq}>1$ für untere Schranke von A $\underset{RR}{\Rightarrow}$ $\exists$ c∈K: $1<c<\underline{\leq}$, insbesondere c∈A.

Widerspruch zu $\underline{\leq}$ untere Schranke von A, da $c<\underline{\leq}$ $\underset{\alpha),\beta),Def}{\Rightarrow}$ inf A=1∈K

min a existiert nicht, da 1∉A (S1.3.1)

Andere Formulierung:
$M_1=\{x\in R: x>2\}$
Lös:Es gilt sup $M_1=\infty$ und inf $M_1=2$, min M_1 existiert nicht.
Bew:$M_1\neq\emptyset$, da 2+1>2, d.h.2+1∈M_1. M_1 besitzt keine obere Schranke, denn wenn s eine obere Schranke wäre, dann müsste gelten: s≥2+1 und s+1>2 und s+1>s Widerspruch ⇒ sup $M_1=\infty$

2 ist untere Schranke von M_1. Sei nun s>2. Dann gilt $2<\frac{2+s}{2}<s$,

d.h. $\frac{2+s}{2}<s$ und $\frac{2+s}{2}\in M_1$ ⇒ s ist keine untere Schranke von M_1 ⇒ inf M_1=2. Da $2\notin M_1$ existiert min M_1 nicht.

A1.3.15 $A,B\neq\emptyset$, $A,B\subset R$. $\forall$ a∈A,b∈B gelte a≤b. Zeige, sup A≤inf B.
Lös:Ann sup A>inf B ⇒ $\exists$ a∈A mit a≥inf B+ε/2 ⇒ inf B≤a-ε/2 ⇒ $\exists$ b∈B mit b≤(a-ε/2)+ε/4=a-ε/4 ⇒ Widerspruch zur Vor b≥a

A1.3.16

Bestimme sup X und inf X (mit Bew) für folgende Mengen X und prüfe, ob diese Mengen ein max oder min besitzen

a) $X=\{x: x=\frac{|t|}{1+|t|},\ t\in R\}$

Lös: $0\le|t|<1+|t| \Rightarrow 0\le\frac{|t|}{1+|t|}<\frac{|t|}{|t|}=1 \quad \forall\ t\in R \Rightarrow$ 0 ist untere Schranke,

1 ist obere Schranke von X.

- inf,min ? Für t=0 ist $\frac{|t|}{1+|t|}=0 \Rightarrow 0\in X$, 0=min X=inf X
- sup? Annahme $\exists$ m<1 mit $\frac{|t|}{1+|t|}\le m \ \forall\ t\in R$, $1-m>0 \Leftrightarrow$

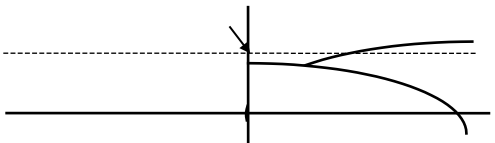
  $|t|\le m(1+|t|)=m+|t|m \Leftrightarrow |t|(1-m)\le m \Leftrightarrow |t|\le\frac{m}{1-m} \quad \forall\ t\in R$,

  Widerspruch zu R unbeschränkt $\Rightarrow \forall\ m: m\ge x: x\in X \Rightarrow m\ge 1 \Rightarrow$ sup X=1.
- 1=max X? $t\in R: 1=\frac{|t|}{1+|t|} \Leftrightarrow 1+|t|=|t| \Leftrightarrow 1=0$! falsch $\Rightarrow 1\notin X \Rightarrow$

  X hat kein max.

Andere Formulierung:

$M=\{\frac{|x|}{1+|x|}: x\in R\}$



*//**D1.2.2** (405) K=(K,+, ·,<) & T⊂K, T≠∅.//*
// $\overline{m}$ =maxT:⇔ ∀ t∈T: t≤$\overline{m}$. $\underline{m}$ =min T:⇔∀ t∈T: $\underline{m}$ ≤t//
*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*
// 1.) $\overline{s}$ = supT: ⇔ α) $\overline{s}$ ist obere Schranke von T und //
// β) ∀ ε>0 ist $\overline{s}$ -ε keine obere Schranke von T//
// ⇔ ∀ t∈T: t≤$\overline{s}$ und ∀ ε>0 ∃ t_ε∈T mit t_ε>$\overline{s}$ -ε//
// 2.)∃ minT ⇔ ∃ infT∈K und infT∈T: minT=infT//

Lös: Beh M=[0,1). Damit inf M=min M=0, sup M=1, ∃ kein max M, denn

0∈M und 0≤y ∀ y∈M $\overset{D1.2.2}{\Rightarrow}$ min M=0 $\Rightarrow$ inf M $\overset{S1.3.1\ 2.)}{=}$ 0.

1 ist obere Schranke von M und 1-ε ∀ ε>0 ist keine obere Schranke von M $\overset{S1.3.1\ 1.)}{\Rightarrow}$ sup M=1 $\underbrace{\overset{S1.3.1\ 2.)}{\Rightarrow}}_{1\notin M}$ max M existiert nicht, da 1∉M

Bew: ● M⊂[0,1), sei y∈M,

Nebenrechnung: $1+|x|>|x|$, $\frac{1}{1+|x|}<\frac{1}{|x|}$, $\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}$

d.h. $y=\frac{|x|}{1+|x|}$ mit $x\in R \Rightarrow 0\le|x|<1+|x| \Rightarrow 0\le\frac{|x|}{1+|x|}<\frac{|x|}{|x|}=1$ falls $x\neq 0$

bzw

$0\le\frac{0}{1+0}<1$, falls x=0

● M⊃[0,1), y∈[0,1), Nebenrechnung: $y=\frac{x}{1+x} \Leftrightarrow y+xy=x \Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

Definiere $x=\frac{y}{1-y} \Rightarrow x\ge 0 \Rightarrow y=\frac{x}{1+x}=\frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow y\in M$

Ähnliche Aufgabe

$M=\{\frac{|x|}{1+2|x|}:x\in\mathbb{R}\}$

Es gilt min M=inf M=0, sup M=1/2, max existiert nicht.

Für $x\in\mathbb{R}$ gilt $0\le\frac{|x|}{1+2|x|}=\frac{2|x|}{1+2|x|}*\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ ⇒

$0\in M$ ist untere Schranke ⇒ min M=0=inf M

½ obere Schranke vom M ⇒ Sei s<1/2. Setze $t=\frac{s+1/2}{2}$

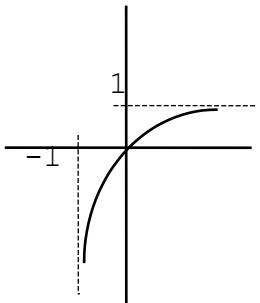
(⇒ s<t<1/2).

Dann ist $t\in M$, denn für x>0 gilt $t=\frac{x}{1+2x}\Leftrightarrow 2t=\frac{1+2x-1}{1+2x}\Leftrightarrow$

$2t=1-\frac{1}{1+2x}\Leftrightarrow\frac{1}{1+2x}=1-2t\Leftrightarrow 1+2x=\frac{1}{1-2t}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{1}{\underbrace{1-2t}_{<1}}}_{>1}-1\right)\Rightarrow$

s ist also keine obere Schranke ⇒ 1/2=supM,
$1/2\notin M$ ⇒ maxM existiert nicht

b) $M=\left\{\frac{x}{1+x}:x\in\mathbb{R},x>-1\right\}$



Beh:M=(-∞,1), damit inf M=-∞ d.h. M ist nach unten nicht beschränkt.
∃ kein inf M und kein min M
sup M=1. ∃ kein max M,
Begründung analog zu a)
Bew:Wir zeigen : M=(-∞,1)={y∈R:y<1}.

- $M\subset(-\infty,1)$: $y\in M\Rightarrow\exists\ x\in\mathbb{R}$, x>-1 mit $y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y<1$, d.h. $y\in(-\infty,1)$,
  denn 1.Fall x=0 ⇒ y=0<1
  2.Fall x>0 ⇒ 1+x>x ⇒ $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{x}$ ⇒ $y=\frac{x}{1+x}\underset{x>0}{\le}\frac{x}{x}=1$
  3.Fall x<0 ⇒ $y=\underset{<0}{x}\ \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1+x}_{>0\ da\ x>-1}}}\ <0<1$

- $M\supset(-\infty,1]$: $y\in(-\infty,1]$, d.h. y<1, 1-y>0, $y=\frac{x}{1+x}\ \underset{x>-1\Leftrightarrow 1+x>0}{\Leftrightarrow}\ y+yx=x\Leftrightarrow$

  $x-yx=y\Leftrightarrow x=\frac{y}{1-y}$

  Setze $x:=\frac{y}{1-y}\Rightarrow x\in\mathbb{R}$ und x>-1 ⇒ $y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$,
  denn

  1.Fall $y\ge 0$, $x=y\ \underbrace{\frac{1}{\underbrace{1-y}_{>0,\ da\ y<1}}}_{\ge 0>-1}$ wie in Def M gesetzt

  2.Fall y<0,1-y>-y, $x=\frac{y}{1-y}\underset{*}{>}\frac{y}{-y}=-1\Rightarrow y\in M$, da $y=\frac{x}{1+x}$

  *1-y>-y ⇒ $\frac{1}{1-y}<\frac{1}{-y}\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\underset{y<0}{>}\frac{y}{-y}=-1$

*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*
// 2.)∃ maxT ⇔ ∃ supT∈K und supT∈T: maxT=supT//

// $\exists$ *minT* $\Leftrightarrow$ $\exists$ *infT*$\in$*K und infT*$\in$*T: minT=infT*//

Aus M=(-∞,1) folgt sofort die Beh., denn

(.)Wäre M nach unten beschränkt, so $\exists$ k$\in$R:k$\neq$y, $\forall$ y$\in$M=(-∞,1) $\Rightarrow$ k$\leq$1 $\Rightarrow$ k-1<1, also k-1$\in$M Widerspruch zu k untere Schranke (k-1<k).

(..)min M existiert nicht, da inf M in R nicht existiert (S1.3.1)

(...)sup M=1

(....)max M<x nicht, da 1$\notin$M (und S 1.3.1)

Andere Formulierung:

X={x:x=$\frac{t}{1+t}$, t>-1}

Lös:Für −1<t<0 $\Rightarrow$ $\frac{t}{1+t}$<0

Für t>0 $\underset{\text{wie a)}}{\Rightarrow}$ x={0≤x<1} und sup X=1, es existiert kein max.

Beh: X ist nach unten unbeschränkt.

Bew:Annahme $\exists$ K$\in$R(oBdA K<1) mit x$\geq$K $\forall$ x$\in$X $\underset{\text{Def Menge}}{\Leftrightarrow}$ $\frac{t}{1+t}\geq$K $\forall$ t>-1

$\Leftrightarrow$ t$\underbrace{(1-K)}_{>0}\geq$K $\Leftrightarrow$ t$\geq\frac{K}{1-K}$>-1 da K>K-1 bzw $\frac{K}{K-1}$<1 $\Leftrightarrow$ $\frac{K}{1-K}$>-1

$\Leftrightarrow$ $\exists$ t:=1/2($\underbrace{\underbrace{\frac{K}{1-K}}_{>-1}-1}_{>-2}$), $\frac{K}{1-K}$>t>-1 $\Rightarrow$ $\frac{K}{1-K}$>t>-1 Widerspruch

*da t>-1, d.h. auch t>$\frac{K}{1-K}$ $\Rightarrow$ Annahme falsch $\Rightarrow$ Beh falsch

Andere Formulierung:

$M=\{\frac{x}{1+x},\ x\in\mathbb{R},\ x>-1\}$

Lös: zu beweisen inf M=-∞, d.h. nicht nach untenbeschränkt ⇒ inf M in $\mathbb{R}$ nicht existent

min, max existiert nicht, sup M=1

M=(-∞,1)={y∈R: y<1} weil

M⊂(-∞,1): y∈M ⇒ ∃ x∈R, x>-1 mit $y=\frac{x}{1+x}$ ⇒ y<1,d.h. y∈(-∞,1) denn

1.Fall: x=0, 1+x>x ⇒ y=0<1

2.Fall: x>0, 1+x>x ⇒ $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{x}$ ⇒ $\frac{1}{1+x}<\frac{x}{x}=1$

3.Fall: x<0: $y=\underbrace{x}_{<0}*\underbrace{\frac{1}{1+x}}_{>0}<0<1$

M⊃(-∞,1): y∈(-∞,1), d.h. y<1. Setze $x:=\frac{y}{1-y}$ (vgl oben) ⇒

x∈R & x>-1, denn 1.Fall: y≥0 ⇒ $x=\underbrace{y}_{\geq 0}*\underbrace{\frac{1}{1-y}}_{>0}\geq 0>-1$

2.Fall: y<0: 1-y>-y ⇒ $\frac{1}{1+y}<\frac{1}{-y}$ ⇒ $x=\frac{y}{1-y}>=\frac{y}{-y}=-1$

⇒ y∈M, da $y=\frac{x}{1+x}$

M=(-∞,1) ⇒ zu Beweisendes da

(.)Wäre M nach unten beschränkt ⇒ ∃ K∈R: K≠y∈M=(-∞,1) ⇒ K<1 ⇒ k-1<1 ⇒ k-1∈M ⇒ Widerspruch zu K ist untere Schranke (K=1<K)

(..)min existiert nicht da inf M in $\mathbb{R}$ nicht existiert.

(...)sup M=1 Bew siehe a)

(....)max M existiert nicht, da 1∉M

c) $M=\left\{\frac{1}{n}+\frac{2}{m} : m,n\in\mathbb{N}\right\}$

*//**D1.2.2** (405) K=(K,+, *,<) & T⊂K, T≠∅. $\overline{m}$ =maxT:⇔ ∀ t∈T: t≤$\overline{m}$ .//*
*//**S1.3.1** (501)Vor.: K angeordnet T⊂K, T≠∅, s∈K//*
// 1.) $\underset{\rightarrow}{s}$ inf T:⇔ α) $\underset{\rightarrow}{s}$ ist untere Schranke von T und //
// β) ∀ ε>0 ist $\underset{\rightarrow}{s}$ +ε keine untere Schranke von T //
// ⇔ ∀ t∈T: t≥$\underset{\rightarrow}{s}$ und ∀ ε>0 ∃ t_ε∈T mit t_ε<$\underset{\rightarrow}{s}$ +ε//
// 2.)∃ maxT ⇔ ∃ supT∈K und supT∈T: maxT=supT//

Beh:Aus Vermutung inf M=0, min M existiert nicht, sup M=max M=3

Bew:(.) $\frac{1}{n}+\frac{2}{m}\underset{n\geq 1}{\leq}\frac{1}{1}+\frac{2}{m}\underset{m\geq 1}{\leq}1+\frac{2}{1}=3$ ∀ m,n∈ℕ ⇒

t≤3 ∀ t∈M und 3∈M (mit m=n=1) $\underset{D1.2.2}{\Rightarrow}$ max M=3 $\underset{S1.3.1\ 2.)}{\Rightarrow}$ sup M=3

(..)Wegen $\underset{>0}{\frac{1}{n}}+\underset{>0}{\frac{2}{m}}>0$ ∀ m,n∈ℕ ist 0 untere Schranke von M

Zwischenbetrachtung: ∀ε>0 ∃ t^ε∈M mit $t^\varepsilon<\varepsilon$?

Bew:Sei ε>0 bel fest ℕ ist unbeschränkt ⇒

∃ $\underbrace{n_0, m_0}_{\text{von }\varepsilon\text{ abhängig}}$ ∈ℕ: $n_0>2/\varepsilon$, $m_0>2\cdot 2/\varepsilon$.

Setze $t^\varepsilon:=\frac{1}{n_0}+\frac{2}{m_0}$ ⇒ t^ε∈M und $t^\varepsilon<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$

Aus Zwischenbeh $\underset{S1.3.1\ 1.)}{\Rightarrow}$ inf M=0 $\overbrace{\underset{S1.3.1\ 2.)}{\Rightarrow}}^{0\notin M}$ min M existiert nicht

d) $M=\{1\}\cup\left\{\frac{n-m}{n+m} \mid n,m\in\mathbb{N}\right\}$

Lös:Es gilt $\frac{n-m}{n+m}<\frac{n}{n+m}<1$, 1 obere Schranke von M und

$\frac{n-m}{n+m}>\frac{-m}{n+m}>-1$, -1 untere Schranke von M.

Wegen 1∈M folgt 1=max M=sup M.

Bleibt zu zeigen:-1=inf M.

Da −1 untere Schranke, genügt es, zu zeigen, dass t∈M mit t<-1+ε

∀ s>-1+ε. Andererseits gilt $\frac{1-m-1+1}{1+m}<-1+\varepsilon$ ⇔

$\frac{2}{1+m}-1<-1+\varepsilon$ ⇔ $\frac{2}{\varepsilon}<1+m$ ⇔ $m>\frac{2}{\varepsilon}-1$. Wähle hier ein m∈ℕ mit $m>\frac{2}{\varepsilon}$

(existiert, da ℕ nicht beschränkt). Dann gilt $\frac{1-m}{1+m}$∈M und $\frac{1-m}{1+m}<-1+\varepsilon$

⇒ -1=inf M und min M existiert nicht, denn -1∉M

e) {x∈ℝ|(x-a)(x-b)(x-c)<0}, wobei a,b,c∈ℝ, a<b<c.

Lös:Es gilt A=(x-a)(x-b)(x-c)=0 für x∈{a,b,c}. Da a<b<c ist, gilt

(x-a)(x-b)(x-c)<0, wenn x∈{(-∞,a)∪(b,c)} und x∈{a,b})∪{b,∞} ⇒

{x∈ℝ|(x-a)(x-b)(x-c)}=(-∞,a)∪(b,c) ⇒

A ist nicht nach unten beschränkt, inf A=-∞ und sup A=c, denn

c ist obere Schranke von A und für ε>0 existiert

d∈(b,c) mit d>c-ε ⇒ max A existiert nicht, denn c∉A.

S1.3.2(515)

Vor:Sei $x\geq 0, x\in\mathbb{R}$.
Beh:$\exists$ genau ein $y\in\mathbb{R}$ mit $y\geq 0$ und $y^2=x$
(y=:$\sqrt{x}$ Quadratwurzel aus x)

*//**D1.3.2** (504) (K,+,·,<) heißt vollständig (bezüglich <): ⇔ //*
// ∀ T⊂K, T≠∅ und T nach oben beschränkt ∃ supT∈K. Ein angeordneter,//
// vollständiger (bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der rellen
//Zahlen R//
Bew:Z.z (.)Existenz und (..)Eindeutigkeit, oBdA x>0
(.)Betrachte $T:=\{y\in\mathbb{R} \mid y\geq 0 \text{ und } y^2\leq x\}\subset\mathbb{R}$ d.h. alle Axiome benutzbar.
$T\neq\emptyset$ (da $0\in T$) und beschränkt: untere Schranke 0, obere Schranke
x+1 (denn $y>x+1 \underset{y\geq 0}{\Rightarrow} y^2>(x+1)^2=x^2+2x+1>x$) $\Rightarrow$ T beschränkt $\neq\emptyset$
$\underset{D1.3.2}{\Rightarrow}$ ~~x~~=supT existiert $(0\leq y\leq x+1)$
Z.z. $y^2=x$. ~~Lösungsweg~~: $y^2>x$: $y^2<x$:
Annahme $y^2>x$:Setze $\varepsilon=\frac{y^2-x}{2y}>0$ (siehe oben),
Betrachte $(y-\varepsilon)^2=(y-\frac{y^2-x}{2y})^2=y^2-2\varepsilon y+\varepsilon^2>y^2-2\varepsilon y=x$ d.h $y-\varepsilon$ ist
obere Schranke von T ⇒ Widerspruch zur Def von y, also ist
$y^2\leq x$
Annahme $y^2<x$
$\varepsilon=\frac{x-y^2}{2y+1}>0$,(oBdA $\varepsilon\leq 1$ ⇒ sonst $\frac{x-y^2}{2y+1}>1$ ⇒ $x-y^2>2y+1$ ⇒
$x>y^2+2y+1$
⇒ $x>(y+1)^2=y^2+2y+1$ Widerspruch, siehe oben)
$(y+\varepsilon)^2=y^2+\varepsilon\,(2y+\underset{<1\leq x+1}{\varepsilon})\leq y^2+\varepsilon(2y+1)=x \Rightarrow (y+\varepsilon)^2\leq x \Rightarrow (y+\varepsilon)\in T\ldots$
$y+\varepsilon\in T$ Widerspruch zu y ist obere Schranke von T $\underset{(O1)}{\Rightarrow}$ $y^2=x$

*//**D1.2.1** (400) (K,+,*) angeordnet: ⇔ ∃ auf K R:=<,Anordnungsaxiome://*
//(O1) ∀ a,b∈K gilt genau eine der folgenden Eigenschaften://
// a<b oder b<a oder a=b //

(..)Eindeutigkeit: Annahme $\exists\ y\neq z\in\mathbb{R}$, $y^2=z^2=x$
α) y<z $y^2<yz<zz=z^2$ Widerspruch
β) y>z, $y^2>yz>zz=z^2$ Widerspruch ⇒ Eindeutigkeit
..$0<y<z \Rightarrow y^2<yz<z^2$

Bem:

1.) Sei $[0,\infty)=\{x\in\mathbb{R}|0\le x\}$, dann ist $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ definiert durch $x\mapsto f(x)=x^2$ eine Bijektion mit Umkehrfunktion ($0\le x_1\le x_2 \Rightarrow x_1^2\le x_2^2$)
injektiv $f^{-1}:[0,\infty)\to[0,\infty)$ $x\mapsto\sqrt{x}$
$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^2$ ist bij, d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}:(y)=\sqrt{y}$
Quadratwurzelfunktion

2.) α) $a,b\ge 0 \Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
Bew: $\sqrt{a},\sqrt{b}\ge 0$ $(\sqrt{a}\sqrt{b})^2=(\sqrt{a}\sqrt{b})(\sqrt{a}\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab$
Wegen der Eindeutigkeit der $\sqrt{\ }\Rightarrow \sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

β) $0\le a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$
Bew: Annahme $\sqrt{a}\ge\sqrt{b}\ge 0 \Rightarrow a\ge b$ Widerspruch

γ) $\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$
Bew: da $a^2=(-a)^2\ge 0$, $a\ge 0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=a$, $a<0 \Rightarrow \sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=-a \Rightarrow$
$\sqrt{a^2}=\sqrt{(-a)^2}=|a|$

3.) Die Funktion $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $x\mapsto x^2$ ist bijektiv,
d.h. $\exists$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y)=\sqrt{y}$ (Wurzelfunktion)

D1.3.4 Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d: X\times X\to\mathbb{R}$, heißt Metrik auf X, wenn für beliebige $x,y,z\in X$, die folgenden Axiome erfüllt sind:

1.) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2.) Symmetrie : $d(x,y)=d(y,x)$
3.) Dreiecksungleichung: $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

S1.3.3 Positive Definitheit

$d: X\times X\to\mathbb{R} \Rightarrow d(x,y)\ge 0$

Bew: $0=\frac{1}{2}d(x,x) \underset{D1.3.4\,3.)}{\le} \frac{1}{2}(d(x,y)+d(y,x)) \underset{D1.3.4\,2.)}{=}$
$\frac{1}{2}(d(x,y)+d(x,y))=d(x,y) \Rightarrow d(x,y)\ge 0$

D1.3.5 (516)
(X,d) heißt metrischer Raum, wenn d eine Metrik auf X ist. (Manche Autoren fordern zusätzlich, dass $X\neq\emptyset$.
In der Praxis bezeichnet man zumeist X allein als den metrischen Raum, wenn aus dem Kontext klar ist, dass in diesem Raum die Metrik d benutzt wird.)
Eine Abbildung vom Raum in sich selbst heißt Isometrie, sofern sie die Metrik erhält. Figuren, die von einer Isometrie aufeinander abgebildet werden können, heißen kongruent zueinander.