1.4(600) **Funktionenräume, gerade/ungerade Funktionen, monotone Funktionen**

D1.4.1(600) Funktionenräume

Sei $D\neq\emptyset$. Für Abbildungen $f,g:D\to K$ seien $f+g$, $f\ast g:D\to K$ definiert durch

$$\forall\ x\in D:\begin{cases}(f+g)(x)=f(x)+g(x)\\(f\ast g)(x)=f(x)\ast g(x)\end{cases}$$

Es liegt nahe, eine Zahl α mit der konstanten Funktion $f(x)=\alpha$ $\forall\ x\in D$ zu identifizieren, so daß auch $\alpha\ast g$ definiert ist. Damit wird die Menge aller Funktionen von D nach K ein Vektorraum über K. Ein beliebiger Teilraum dieses Vektorraums heißt dann ein Funktionenraum auf D.

Ein $f:D\to K$ heißt gerade bzw ungerade, falls $D\subset K$ ist mit $x\in D \Rightarrow -x\in D$ und falls $f(x)=f(-x)$ bzw $f(x)=-f(-x)$ $\forall\ x\in D$ gilt.

Für $f:D\to K$ sei $|f|:D\to R$ definiert durch $|f|(x)=|f(x)|$ $\forall\ x\in D$. Wir nennen f beschränkt, falls ein $K\in R_+$ existiert mit $|f(x)|\leq K$ $\forall\ x\in D$.

D1.4.2(600) Für $f:D\to R$ seien $|f|$, f^+, f^- definiert als $|f|(x)=|f(x)|$, $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$ $\forall\ x\in D$.

Für $f,g:D\to R$ schreiben wir $f\leq g$ falls $f(x)\leq g(x)$ $\forall\ x\in D$ gilt. Wir nennen f nach oben beschränkt, falls ein $K\in R$ existiert, sodass $f(x)\leq K$ $\forall\ x\in D$. Analog heißt f nach unten beschränkt, falls –f nach oben beschränkt ist. Falls beides gilt, ist f offenbar beschränkt im oben definierten Sinn.

Folgendes erst nach D1.3.1 lesen, siehe Hinweis dort.

Wir schreiben auch $\sup_{x\in D}f(x)$ statt $\sup f(D)$, und entsprechend $\inf_{x\in D}f(x)$, $\max_{x\in D}f(x)$, $\min_{x\in D}f(x)$, falls letztere existieren.

A1.4.1 Zeige für ein $f:D\to R$ die Gleichungen $|f|=f^++f^-$, $f=f^+-f^-$.

A1.4.2 Sei $D\subset R$, und sei $-D=\{-x:x\in D\}$, sowie $A=D\cap(-D)$ (also möglicherweise die leere Menge). Sei $f:D\to R$ so, dass $f(x)=f(-x)$ $\forall\ x\in A$.

Zeige: Dann gibt es eine gerade Funktion $g:D\cup(-D)\to R$, welche auf D mit f übereinstimmt (dieses g heißt gerade Fortsetzung von f). Wann gibt es genau eine ungerade Fortsetzung von f? Finde heraus, wann die gerade (ungerade) Fortsetzung von f gleich f ist.

A1.4.3 Zeige:Die Summe zweier gerader (ungerader) Funktionen ist wieder gerade(ungerade); das Produkt zweier gerader Funktionen aber auch zweier ungerader Funktionen ist gerade, das Produkt aus einer geraden und einer ungeraden Funktion Funktion ist ungerade.

A1.4.4 Untersuche, ob folgende Funktionen gerade, ungerade, nach oben bzw nach unten beschränkt sind. Bestimme jeweils $|f|$, f^+, f^-.

a) $f:R\to R$, $f(x)=x^2-2$

Lös:gerade: $f(-x)=(-x)^2-2=x^2-2=f(x)$ und $x\in R$, $-x\in R$.

Nach oben unbeschränkt: $\forall\ x\in R\ \exists\ x\in R$, $f(x)>K$?

Wähle $x=\sqrt{K+3}$. O.B.d.A. $K>0 \Rightarrow f(x)=K+3-2=K+1>K$

Nach unten beschränkt: $x^2\geq 0 \Rightarrow x^2-2\geq -2$

$$|f|(x): R\to R,\ f(x)=\begin{cases}x^2-2, x\leq-\sqrt{2}\ oder\ x\geq+\sqrt{2}\\ 2-x^2, sonst\end{cases}$$

$$f^{+}(x)=\begin{cases} x^2-2, & x\le -\sqrt{2} \text{ oder } x\ge \sqrt{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad f^{-}(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\sqrt{2} \text{ oder } x\ge \sqrt{2} \\ 2-x^2, & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Lös: ungerade, unbeschränkt, $|f|(x) := \begin{cases} x^3-x, & -1\le x\le 0 \text{ oder } x\ge 1 \\ x-x^3, & \text{sonst} \end{cases}$

D1.4.3(601) Monotone Funktionen

Sei $D\subset\mathbb{R}$ und $f: D\to\mathbb{R}$. Die Funktion f heißt (auf D) monoton Wachsend $\nearrow$ (fallend $\searrow$), falls $x,y\in D$, $x<y \Rightarrow f(x)\le f(y)$, $(f(x)\ge f(y))$.
Falls sogar immer $f(x)<f(y)$, $(f(x)>f(y))$ gilt, heißt f streng monoton wachsend $\uparrow$ (bzw. fallend $\downarrow$). Beachte, dass streng monotone Funktionen immer injektiv sind.

A1.4.5 Zeige , daß f genau dann (streng) monoton wächst, wenn $-f$ (streng) monoton fällt.

A1.4.6 Zeige: Ist $f(x)>0$ für alle $x\in D$, so ist f genau dann (streng) monoton wachsend, wenn $1/f$ (streng) monoton fällt.

A1.4.7 Zeige, dass $\forall$ $n\in N$ die Funktion $f(x)=x^{-n}$ auf dem Intervall $(0,\infty)$ streng monoton fällt

A1.4.8 Untersuche die Monotonie von $f(x)=x^m$, für eine beliebige Zahl m, auf dem Intervall $(-\infty,0)$ bzw auf $\mathbb{R}$.

Lös: 1.Fall: $m\in\mathbb{N}$, $f(x)=x^m$, $\uparrow$ auf $[0,\infty)$ d.h. $0\le x<y \Rightarrow (*)\ x^m<y^m$.

Falls m gerade ($m=2k$, $k\in\mathbb{N}$):

$(x)^m=x^m$, dann gilt für $x<y\le 0 \Rightarrow -x>-y\ge 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} (-x)^m>(-y)^m \Rightarrow$

$x^m>y^m$ also $f(x)=x^m$ $\downarrow$ auf $(-\infty,0]$ und $\uparrow$ auf $[0,\infty)$

Falls m ungerade ($m=2k-1$, $k\in\mathbb{N}$):

$(-x)^m=-x^m$, $x<y\le 0 \Rightarrow -x>-y\ge 0 \underset{(*)}{\Rightarrow} (-x)^m>(-y)^m \Rightarrow -x^m>-y^m \Rightarrow$

$x^m<y^m$, $f(x)=x^m$, $\uparrow$ auf $(-\infty,0)$, also, auf $\mathbb{R}$.

2.Fall: $m=0$, $f(x)=x^m=1$, konst Funktion $\searrow$ <u>und</u> $\nearrow$, nicht streng monoton

3.Fall: $m<0$, $f(x)=x^m=(1/x)^n$, $n=-m\in\mathbb{N}$.

$f(x)$ für $x=0$ nicht definiert, nur für $(-\infty,0)$.

Sei $x<y<0 \Rightarrow 0>1/x>1/y \underset{\text{1.Fall}}{\Rightarrow} (1/x)^n<(1/y)^n$ falls n gerade,

$(1/x)^n>(1/y)^n$ falls n ungerade $\Rightarrow$

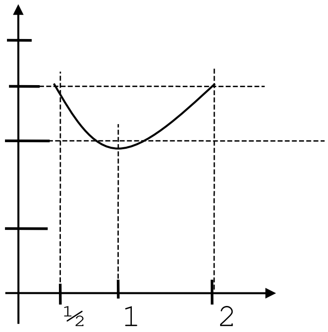
$$\begin{cases} x^m < y^m \text{ falls m gerade} (m=2k, k\in\mathbb{Z}, k\ne 0) \\ x^m > y^m \text{ falls m ungerade} \end{cases}$$

$f(x)=x^m$, $m<0$ auf $(-\infty,0)$ $\uparrow$ falls m gerade,

$\downarrow$ falls m ungerade

//S1.3.1 (501)Vor.:K angeordnet $T\subset K$, $T\neq\emptyset$, $s\in K$//
//   2.)$\exists$ maxT $\Leftrightarrow$ $\exists$ sup$T\in K$ und sup$T\in T$: maxT=supT//
// $\exists$ minT $\Leftrightarrow$ $\exists$ inf$T\in K$ und inf$T\in T$: minT=infT//

A1.4.9 $M=\left\{x+\frac{1}{x}: x\in\mathbb{R}, 1/2<x\leq 2\right\}$



Max,sup,min inf?

Beh:min M=inf M $\underset{S1.3.1}{=}$ 2, sup M=max M=5/2

Bew:$M=[2,5/2]=\{y\in\mathbb{R}: 2\leq y\leq 5/2\}$.
Hieraus sofort die Beh, denn
min M=2 (folgt aus Def von min,
da $2\leq y\ \forall\ y\in M$ und $2\in M$.
max M=5/2(folgt aus Def von max, da $y\leq 5/2\ \forall\ y\in M$ und $5/2\in M$) $\underset{S1.3.1\ 2)}{\Rightarrow}$
inf M=2, sup M=5/2.

- Bew zu $M=[2,5/2]$, Betrachte $f(x)=x+1/x$, $x>0$.
Genügt Zu zeigen $f((1/2, 2])=[2,5/2]$….Methode: "$\subset$" und "$\supset$"

- Zu"$\subset$"
Wir zeigen(.)$f(x_1)<f(x_2)\ \forall\ x_1,x_2\in[1,\infty]$ mit $x_1<x_2$
(f ist streng monoton wachsend auf $[1,+\infty)$)
(..)$f(x_1)>f(x_2)\ \forall\ x_1,x_2\in(1/2, 1]$ mit $x_1<x_2$
(f ist streng monoton fallend auf (1/2,1])
Aus (.),(..) folgt
$f((1/2,2])\subset[2, 5/2]$, denn sei
$x\in(1/2,2]$ bel. $\Rightarrow$ $x\in(1/2, 1]$ oder $x\in[1,2]$.

1.Fall:$x\in(1/2,1]$: $2=f(1)\underset{(..)}{\leq} f(x)\underset{(..)}{<} f(1/2)=5/2$

2.Fall:$x\in[1,2]$: $2=f(1)\underset{(.)}{\leq} f(x)\underset{(.)}{\leq} f(2)=5/2$ $\Rightarrow$ $f(x)\in[2, 5/2]$,

Bew zu (.)$f(x_2)-f(x_1)=x_2-x_1+1/x_2-1/x_1=\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)}_{>1-\frac{1}{x_1^2}\geq 1-\frac{1}{1}=0}>0$

Bew zu(..)$f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}\underbrace{\left(1-\frac{1}{x_1x_2}\right)}_{>0}<0$, denn $1-\frac{1}{x_1x_2}<1-\frac{1}{x_2^2}\leq 0$

- • Zu "$\supset$"
$*f(x)=y \Leftrightarrow y=x+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2+1=xy \Leftrightarrow x^2-xy+1=0 \Leftrightarrow x=x_1$ oder $x=x_2$ mit
$x_{1,2}=1/2(y\pm\sqrt{y^2-4})$. Sei $y\in[2, 5/2]$.
¿ Def $x:=1/2(y+\sqrt{y^2-4})$ $\Rightarrow$ $x\in\mathbb{R}$ und $f(x)=y$ (siehe*)
Noch z.z $x\in(1/2, 2]$. $x\geq\frac{1}{2}y\geq 1/2$ ¿ $2=1$.
Annahme: $x>2$ $\underset{(.)s.o.}{\Rightarrow}$ $y=f(x)\ \underset{(.)}{¿}\ f(2)=5/2$ Widerspruch also $x\leq 2$ $\Rightarrow$
$x\in(1/2, 2]$.
¿ Def $x:=1/2(y-\sqrt{y^2-4})$ $\Rightarrow$ $x\in\mathbb{R}$ und $*f(x)=y$
$y=2 \Rightarrow x=1/2(2-\sqrt{4-4})=1$, $y=5/2 \Rightarrow x=1/2(5/2-\sqrt{(5/2)^2-4})=1/2$
(..)$\forall$ $1/2\leq x\leq 1$:$5/2\leq y\leq 2$ sonst ~~(..)~~ ,ausführlicher Beweis zunächst verschoben, da wohl nicht weiter schwer.???

A1.4.10 $[0,1]\to[0,1]$, Surjektiv oder injektiv?
a) $x\mapsto x^k$, $k\in\mathbb{N}$ beliebig
Lös: Seien $x,y\in[0,1]$, $y>x$ (d.h. $y>0$) $\Rightarrow$

$$y>x \underset{y>0}{\Rightarrow} y^2>yx \underset{y>x}{\Rightarrow} y^2>x^2 \underset{y>0}{\Rightarrow} y^3>yx^2 \underset{y>x}{\Rightarrow} y^3>x^3 \text{..usw} \underset{Induktion}{\Rightarrow} y^k>x^k \ \forall\ k\in\mathbb{N}.$$