1.5(700) **Die natürlichen Zahlen und das Prinzip der vollständigen Induktion**

Natürliche Zahlen: 1,2:=1+1,, 3:=2+1 usw

D1.5.1(700)

1.) Eine Teilmenge $T\subset\mathbb{R}$ heißt induktiv:$\Leftrightarrow$

α) $1\in T$ und β) $t\in T \Rightarrow t+1\in T \ \forall\ t\in\mathbb{R}$ ($t+1\in T\ \forall\ t\in T$)

Bsp: $[1,\infty)$

2.) Sei I die Menge aller induktiven Teilmengen T von $\mathbb{R}$ ($I\subset(\mathcal{P}(\mathbb{R}))$),

dann heißt $\mathbb{N}:=\bigcap_{T\in I} T$ die Menge der natürlichen Zahlen.

Bem: $\mathbb{R}\in I \Rightarrow I\neq\emptyset$ (siehe Körperaxiome)

Eigenschaften von $\mathbb{N}$:

1.) $\mathbb{N}$ ist induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

Bew: Da jede induktive Teilmenge die Zahl 1 enthält, folgt dies auch für den Durchschnitt. Sei $x\in\mathbb{N} \Rightarrow$ x ist in jeder induktiven Menge $M\subset\mathbb{R}$ enthalten. Nach Def gilt das gleiche auch für x+1 und daher folgt $x+1\in\mathbb{N}$

2.)(.) $\mathbb{N}$ ist in jeder induktiven Teilmenge von $\mathbb{R}$ enthalten $\Rightarrow$

(..) $\mathbb{N}$ ist kleinste induktive Teilmenge von $\mathbb{R}$

Bew: (.) $1\in T\ \forall\ T\in I$, weil T induktive Menge $\Rightarrow 1\in\bigcap_{T\in I} T=\mathbb{N}$.

Sei $t\in\mathbb{N}$ gegeben $\Rightarrow t\in T\ \forall\ T\in I$ (T's sind alle induktive Mengen)

$\Rightarrow (t+1)\in T\ \forall\ T\in I \Rightarrow (t+1)\in\bigcap_{T\in I} T=\mathbb{N}$.

(..) Noch zu zeigen: kleinste induktive Menge

Sei $\tilde{T}\subset\mathbb{N}$ eine induktive Menge, also ist $\tilde{T}\in I$.

$\mathbb{N}=\bigcap_{T\in I} T=\bigcap_{T\in I\,/\,\{\tilde{T}\}} T\cap\tilde{T}\subset\tilde{T} \Rightarrow \tilde{T}\subset\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}\subset\tilde{T} \Rightarrow \tilde{T}=\mathbb{N}$, #d.h. eine kleinere, deshalb Teilmenge, $\tilde{T}:\tilde{T}\subset\mathbb{N}$ als $\mathbb{N}$ selbst gibt's nicht, da $\tilde{T}=\mathbb{N}$.

Bem:1.) $0\notin \mathbb{N}$, da mit T auch $0\notin T\cap[1,\infty)$ eine induktive Menge ist, ($[1,\infty):=\{x\in\mathbb{R}|1\leq x\}$) und $\mathbb{N}\subset T\cap[1,\infty)$, $0\notin[1,\infty)$ gilt) und damit $0\notin \bigcap_{T\in I} T =:\mathbb{N}$

#1.) $0\notin \mathbb{N}$, da mit T auch $\underset{0\notin}{T}\cap[1,\infty)$ eine induktive Menge ist,

($[1,\infty):=\{x\in\mathbb{R}|1\leq x\}$) und $\mathbb{N}\subset T\cap[1,\infty)$, $0\notin[1,\infty)$ gilt) und damit

$0\notin \bigcap_{T\in I} T =:\mathbb{N}$

Bez: $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ ist induktiv und heißt die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen

Sei $A\subset\mathbb{N}$ so, daß $1\in A$ und der Schluss $x\in A \Rightarrow x+1\in A$ richtig sind (mit anderen Worten :A ist induktiv). Dann folgt bereits $A=\mathbb{N}$

Beh:a) $x<1 \Rightarrow x\notin\mathbb{N}$

Bew: $M=[1,\infty)$ ist offenbar induktiv und deshalb $\mathbb{N}\subset M$

b) $n\in\mathbb{N}$, $n<x<n+1 \Rightarrow x\notin\mathbb{N}$

Bew: $M_n=\{1,2,...,n\}\cup[n+1,\infty)$ ist induktiv und somit gilt $\mathbb{N}\subset M_n$

#Bew: $x\notin M_n=\{1,2,...,n\}\cup[n+1,\infty)$ ist induktiv und somit gilt $\mathbb{N}\subset M_n$

A1.5.1 Sei im folgenden $a\in\mathbb{R}$ festgehalten. Wir wollen ein $M\subset\mathbb{R}$ a-induktiv nennen, wenn $a\in M$ und $x\in M \Rightarrow x+1\in M$ immer gelten.
Zeige:Es gibt genau eine kleinste a-induktive Menge N_a. Für welches a ist $N_a=\mathbb{N}$?

A1.5.2 Zeige für N_a wie oben 2 Aussagen, welche obiger Beh entsprechen

A1.5.3 Finde für jedes N_a wie oben eine bijektive Abb von N_a auf $\mathbb{N}$

S1.5.1(702) Prinzip der vollständigen Induktion

Vor. $\forall\, n\in\mathbf{N}$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es gelte

1.) "$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang: IAnf) und

2.) $\forall\, n\in\mathbf{N}$ (beliebige $n\in\mathbf{N}$) folgt aus „$\underbrace{A_{(n)}\text{ist wahr}}_{\text{IndHyp: IHyp}}$" auch

„$\underbrace{A_{(n+1)}\,\textit{ist wahr}}_{\textit{IndAussage: IAuss}}$" so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n\in\mathbf{N}$

$\forall\, n\in\mathbf{N}$ gilt $\underbrace{(\underbrace{A_{(n)}}_{\text{IH}} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Induktionsbehauptung}})}_{\text{Induktionsschluß (IS) } n\Rightarrow n+1}$ ist wahr

Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\, n\in\mathbf{N}$

Bew: Sei $T:=\{n\in\mathbf{N} \mid A_{(n)}\text{ist wahr}\} \Rightarrow T\subset\mathbf{N}$

$1\in T$ da $A_{(1)}$ wahr

Sei $n\in T \Rightarrow A_{(n)}$ wahr. $(A_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)})$ wahr $\Rightarrow A_{(n+1)}$ wahr$\Rightarrow$

$\underbrace{n+1\in T}_{*} \Rightarrow \underbrace{T\text{ induktiv}}_{*\text{wahr}} \Rightarrow T=\mathbf{N}$

Andere Formulierung: $T=\{n\in \mathbf{N}: A_{(n)} \text{ ist wahr}\}\subset \mathbf{N}$.

T ist induktive Menge $\Rightarrow T\supset\mathbf{N}$ (kleinste induktive Menge) $\Rightarrow T=\mathbf{N}$

Bsp: $A_{(n)}$: $\underbrace{-2^n > n}_{\textit{falsch}}$ wahr $\Rightarrow A_{(n+1)}$: $\underbrace{-2^{n+1} > n+1}_{\text{falsch}}$ wahr $\Rightarrow \underbrace{\underbrace{-2^n}_{>n\text{ falsch}}\cdot 2}_{>2n\text{ falsch}} > 2n \geq n+1 \Rightarrow$

$\underbrace{-2^{n+1} > n+1}_{\text{falsch}}$ wahr $A_{(n+1)}$ wahr

Die Angabe falsch kann auch eine richtige Aussage sein.

andere Formulierung

Geg sei Aussage A(n), welche für $\forall\, n\in\mathbf{N}$ sinnvoll ist. Wir sagen, daß wir A(n) durch vollständige Induktion beweisen, wenn wir nach folgendem Schema vorgehen:

a) Wir zeigen die Richtigkeit von A(1) (Induktionsanfang)

b) Sei jetzt $n\in\mathbf{N}$ beliebig gegeben. Unter der Induktionshypothese, d.i. die Annahme der Richtigkeit von A(n), oder auch die Annahme der Richtigkeit von A(m) $\forall\, m\in\mathbf{N}$ mit $m\leq n$, zeigen wir die Richtigkeit von A(n+1)(Schluss von n auf n+1, oder Induktionsschritt).
Ist dies gelungen, so ist die Menge der $n\in\mathbf{N}$, für die A(n) richtig ist, eine induktive Menge und aus dem Induktionsprinzip folgt, dass A(n) für alle $n\in\mathbf{N}$ richtig ist.
Beachte aber, dass ein Beweis durch vollständige Induktion nur dann möglich ist, wenn die zu zeigende Aussage schon bekannt ist.

Beachte noch, dass beim Beweisen durch vollständige Induktion der Induktionsanfang nicht unbedingt 1 sein muss, sondern im Allgemeinen sogar eine beliebige reelle Zahl sein kann, dies ergibt sich durch Betrachten der a-induktiven Mengen (A1.5.1-A1.5.3)

Das Induktionsprinzip kann auch zur Definition von Größen $\alpha(n)$, $n\in\mathbf{N}$, benutzt werden, indem man

(.) $\alpha(1)$ durch eine Vorschrift definiert

(..) Wenn man $\alpha(1)\ldots\alpha(n)$ definiert hat, eine Vorschrift F angibt, mit der man $\alpha(n+1)=F(\alpha(1)\ldots\alpha(n),n)$????

Durch ein solches Vorgehen ist $\alpha(n)$ $\forall\, n\in\mathbf{N}$ eindeutig definiert

A1.5.4 Zeige: $1+3+5+...+(2n+1)=(n+1)^2 \ \forall \ n\in\mathbb{N}$

Lös: Für n=1 ist die Aussage sicher richtig.
Wenn sie für irgend ein n gilt, folgt
$1+3+..(2n+1)+(2n+3)=(n+1)^2+2(n+1)+1^2=(n+1+1)^2$.
Also gilt die Beh auch für n+1 anstelle von n

S1.5.2 (703)

Rechenregeln in $\mathbb{N}$: $\forall \ m,n\in\mathbb{N}$ gilt

1.) $n\geq 1$ (also $1=\min\mathbb{N}$)

*//**S1.5.1** (701) Prinzip der vollständigen Induktion....//*

Bew: $A_{(n)}:(n\geq 1)$

Ianf n=1: $A_{(1)}: 1 \geq 1$

$n\to n+1$: $(A_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)}) \underbrace{n}_{\geq 1\, IHyp} +1\geq 1+1>1+0=1 \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.1} A_{(n)}$ wahr $\forall \ n\in\mathbb{N}$

2.) $n\neq 1 \Rightarrow \exists \ k\in\mathbb{N}: n=k+1$, d.h. $n-1\in\mathbb{N}$

Bew: $T=\{1\}\cup\{n+1 | n\in\mathbb{N}\}$...weil $\mathbb{N}$ induktiv $T\subset\mathbb{N}$... wann immer $n\in\mathbb{N}$,
dann n+1 in der Menge....
Beh: T induktiv,
da $1\in T$ und sei $k\in T \Rightarrow k\in\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{Def\ T} k+1\in T \Rightarrow$ kleinste ind
Teilmenge $\mathbb{N}\subset T \Rightarrow \forall \underbrace{k}_{\neq 1}\in\mathbb{N}$ ist $k\in T \Rightarrow \exists \ n\in\mathbb{N}$, $k=n+1 \Rightarrow n=k-1\in\mathbb{N}$

3.) $m+n\in\mathbb{N}$, d.h. $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bzgl Addition

Bew: $A_{(n)}:(n+m\in\mathbb{N} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$ baf)

IAnf $A_{(1)}: 1+m=m+1\in\mathbb{N} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$ da $\mathbb{N}$ ind. Syst.
$A_{(1)}$ wahr, da $\mathbb{N}$ induktiv $\forall$ n

IS $n\to n+1: n+m\in\mathbb{N} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$, da $\mathbb{N}$ induktiv $\Rightarrow$
$\underbrace{(m+n)}_{IHyp:\in N}+1\in\mathbb{N}$ da $\mathbb{N}$ induktiv $\forall m\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$(m+n)+1=(n+1)+m\in\mathbb{N} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$.

4.) $m*n\in\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bzgl Multiplikation

Bew: $A_{(n)}$: $(n*m\in\mathbb{N} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$ baf)

n=1 $A_{(1)}$: $1*m=m\in\mathbb{N} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$

$n\to n+1$ $A_{(n+1)}: m(n+1)\in\mathbb{N}= \underbrace{mn}_{IHyp\in N}+m\underbrace{\in\mathbb{N}}_{3.)} \ \forall \ m\in\mathbb{N}$

5.) $m-n\in\mathbb{N}$ wenn $n<m$

*//**S1.5.2** (702) Rechenregeln in N: $\forall m,n\in N$ gilt//*
//1.) $n\geq 1$ (also $1=\min N$)//
//2.) $n\neq 1 \Rightarrow \exists\ k\in N$: $n=k+1$, d.h. $n-1\in N$//

Bew: $A_{(n)}$: $\forall\ m>n: m-n\in\mathbb{N}\ \ \forall \underset{m>n}{m}\in\mathbb{N}$

$A_{(1)}$ $n=1: m-1\in\mathbb{N}\ \ m\in\mathbb{N}\ \ \forall\ m>1$ ...siehe 2.) #$n\geq 1 \underbrace{\Rightarrow}_{m>n} m>1$

$A_{(n)}$ $: m-n\in\mathbb{N}\ \ \forall\ m>n.$

$A_{(n+1)}$:Wähle $m\in\mathbb{N}$ $m>n+1 \underbrace{\Rightarrow}_{1.)} m>1 \underbrace{\Rightarrow}_{2.)} m-1>n \Rightarrow$

$\underbrace{m}_{>n+1}-(n+1)=(\underbrace{(m-1)}_{>n}-n)\in\mathbb{N}$

andere Formulierung:

$A_{(1)}$ $n=1$ $: m>1 \Rightarrow m-1\geq 1$ und $m-1\in\mathbb{N}$ nach 1.)

$A_{(n)}$ n $: m-n\in\mathbb{N}$ wenn $m>n\ \ \forall\ m,n\in\mathbb{N}$

$A_{(n+1)}$ $n\to n+1: m>n+1,\ m-(n+1)=\underbrace{m-n}_{\in N\ IndHyp}\underbrace{-1}_{2.)}\in\mathbb{N}_0$ aber $m-n-1\neq 0$ weil

$m>n+1$, deshalb $\in\mathbb{N}$

6.) $m>n \Rightarrow m\geq n+1 \Rightarrow$ Es gibt keine natürliche Zahl zwischen n und n+1
($n\neq m \Rightarrow |n-m|\geq 1$)

Bew: 3.) $m+n\in\mathbb{N}$, 5.) $m-n\in\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{1.)} m-n\geq 1 \Rightarrow m\geq n+1$

$m\neq n \Rightarrow m>n$ oder $m<n$

1.Fall $m>n \Rightarrow m\geq n+1 \Rightarrow m-n\geq 1$

2.Fall $m<n \Rightarrow \underbrace{n-m}_{5.):\in N}\geq 1 \Rightarrow$ $|n-m|=\max\{m-n,n-m\}\geq 1$

andere Formulierung:

Nach (O1) gilt $n>m$ oder $n<m$. $|n-m|=n-m\underbrace{\in}_{5.)}\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{1.)} n-m\geq 1$ also $|n-m|>1$

Bez: $n+1$ heißt Nachfolger von $n\in\mathbb{N}$ (n der Vorgänger von $n+1$).
Schreibweise: $\mathbb{N}=\{1,2,3....\}$, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,3...\}$, wobei $3=2+1, 4=3+1$ usw

S1.5.3(705) Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung

Vor: $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ seien Aussagen $A_{(n)}$ gegeben und es gelte

1.) $A_{(1)}$ ist wahr

2.) $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ ist ($A_{(m)}$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}$ mit $1\leq m\leq n \Rightarrow A_{(n+1)}$) ist wahr

$A_{(1)}$ und $A_{(2)}$ ….und $A_{(n)}$

Andere Formulierung Vor:

Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall$ $m\in\mathbb{N}$ mit $1\leq m\leq n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr",
so gilt:

Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}$

Bew: $B_{(n)}:=A_{(1)}$ und $A_{(2)}$...und $A_{(n)}$. $B_{(1)}=A_{(1)}$ wahr. Vor: ($B_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)}$) wahr
$\Rightarrow B_{(n)} \Rightarrow B_{(n+1)}$) wahr. S1.5.1 angewandt auf $B \Rightarrow B_{(n)}$ wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$
$A_{(n)}$ wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}$?????

Bem: Induktion kann auch bei $n_0\in\mathbb{N}$ beginnen $B_{(n)}:=A_{(n_0+n-1)}$

Will man zeigen, dass gilt „$A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$, $n\geq n_0$, und einem $n_0\in\mathbb{N}_0$, so kann man das Prinzip der vollständigen Induktion benutzen mit Ianf: $A_{(n_0)}$ ist wahr.

Verkürzte Darstellung/Gegenüberstellung 1., 2. Fassung:

$A_{(1)}$ ist wahr

$A_{(n)}$ ist wahr $\Rightarrow$ ($A_{(n+1)}$) ist wahr | $A_{(m)}$) ist wahr $\forall$ $m\in\{1,2,...n\}$
| $\Rightarrow A_{(n)}$ ist wahr

Bsp: $2^n>n^2$ $\forall$ $n\geq5$

Induktionsanfang n=5: $2^5=32>5^2=25$

Induktionshypothese n: $2^n>n^2$

Induktionsschritt n+1: $2^{n+1}=2^n*2 \underset{IH}{>} n^2*2=n^2+n^2=n^2+(n-1)n+n>n^2+2n+1=(n+1)^2$

A1.5.5 Beweise durch vollständige Induktion:

a) Beweis $n^2\leq2^n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $n\neq3$.

Bew: n=1: $1^2\leq2^n=2$ ok

n=2: $2^2\leq2^2$ ok

IA n=4: $4^2\leq2^4$ ok

IH $n^2\leq2^n$

IS $(n+1)^2=n^2+2n+1 \underbrace{\leq}_{IH} 2^n+\frac{n^2}{2}+1\leq2^n+2^{n-1}+1\leq2^n+2^{n-1}+2^{n-1}=2^n+2^n=2^{n+1}$

a) $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^3=1+2^3+3^3+4^3+....n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(Bedeutung $\sum_{k=1}^{n+1}$ siehe D1.5.2 (709))

Bew: IAnf n=1 : $1^3=\frac{1^2*2^2}{4}=1$

IHyp für ein $n\in\mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

IS $n\rightarrow n+1$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\sum_{k=1}^{n} k^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^2(n+1)=$

$\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

b) Sei M eine endliche Menge, |M| bezeichne die Anzahl ihrer Elemente und $\mathbf{P}(M)$ ihre Potenzmenge. $\forall$ endlichen Mengen gilt: $|\mathbf{P}(M)|=2^{|M|}$.

Anl: Für $m\in M$ ist $\mathbf{P}(M)=A\cup(\mathbf{P}(M)\setminus A)$ mit $A=\{X\in\mathbf{P}(M):m\in X\}$

Bew: IAnf n=1 : $|M|=1 \Rightarrow M=\{m\} \Rightarrow \mathbf{P}(M)=\{\emptyset,\{m\}\} \Rightarrow |\mathbf{P}(M)|=2=2^1$.

Ihyp : $|\mathbf{P}(M)|=2^{|M|}$. für ein $n\in\mathbf{N}$...

IS $n\rightarrow n+1$: Sei $m\in M$. $\tilde{M}=M\setminus\{m\} \Rightarrow |\tilde{M}|=n$, da $|M|=n+1$.

$$X=\{\underbrace{X\ ohne\,\{m\}}_{Y}\cup\{m\}\}$$

$$\mathbf{P}(M)=A\cup(\mathbf{P}(M)\setminus A)=\{X\in\mathbf{P}(M):m\in X\}\cup\{X\in\mathbf{P}(M):m\notin X\}=$$

$$\{X\in\mathbf{P}(M):m\in X\}\cup\{Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}=\{Y\cup\{m\}:Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}\cup\{Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}$$

$$|\mathbf{P}(M)|=||Y\cup\{m\}:Y\in\mathbf{P}(\tilde{M})\}|+|\mathbf{P}(\tilde{M})|=2^n+2^n=2^{n+1}.$$

c) Fibonaccizahlen: Es seien $F_0=0$ und $F_1=1$ gegeben. F_n wird rekursiv definiert durch $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. Dann gilt $\forall\ 2\leq n\in\mathbf{N}$:

$$F_n=\frac{[1/2(1+\sqrt{5})]^n-[1/2(1-\sqrt{5})]^n}{1/2(1+\sqrt{5})-1/2(1-\sqrt{5})}=\frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu},\quad \lambda=½(1+\sqrt{5})\quad \mu=½(1-\sqrt{5})$$

Bew: IAnfang n=2: $F_2=F_1+F_0=1+0=1$

$$F_2=\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda-\mu}=\lambda+\mu=1/2(1+\sqrt{5})+½(1-\sqrt{5})$$

IHyp : Für ein $n\in\mathbf{N}$ gilt $F_k=\dfrac{\lambda^k-\mu^k}{\lambda-\mu}\quad\forall\ 2\leq k\leq n$

IS $n\rightarrow n+1$: z.z. $F_{n+1}=\dfrac{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}=F_n+F_{n-1}\underset{\text{IHyp f. n und n-1}}{=}\dfrac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}+\dfrac{\lambda^{n-1}-\mu^{n-1}}{\lambda-\mu}=$

$$\frac{(\lambda^n+\lambda^{n-1})-(\mu^n+\mu^{n-1})}{\lambda-\mu}=\frac{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\quad \text{siehe NR}$$

NR: $\lambda^n+\lambda^{n-1}=\lambda^{n-1}(\lambda+1)=\lambda^{n-1}\lambda^2=\lambda^{n+1}$.

Beh: $(\lambda+1)=\lambda^2$,

$½+\sqrt{5}/2+1=3/2+\sqrt{5}/2$, $[1/2(1+\sqrt{5})]^2=¼(1+2\sqrt{5}+5)=3/2+\sqrt{5}/2$

analog $\mu^n+\mu^{n-1}=\mu^{n+1}$.

d) $\sum_{k=0}^{n} 2^k=2^{n+1}-1\quad\forall\ n\in\mathbf{N}$

Lös: n=0: $\sum_{k=0}^{0} 2^k=2^0=1$, $2^{0+1}-1=2^1-1=1$ ....ok

Indh: $\sum_{k=0}^{n} 2^k=2^{n+1}-1$ für $n\geq 0$

$n\rightarrow n+1$: $\sum_{k=0}^{n+1} 2^k=\sum_{k=0}^{n} 2^k+2^{n+1}\underset{IH}{=}2^{n+1}-1+2^{n+1}=2*2^{n+1}-1=2^{(n+1)+1}-1$

e) $\prod_{k=2}^{n}(1-k)=(-1)$

S1.5.4(707) Archimedisches Prinzip
$\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists\ n\in\mathbb{N}: a<n$ (d.h. $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben nicht beschränkt)

*//**D1.3.2** (504) $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich <):⇔ //*
//$\forall\ T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ und T nach oben beschränkt $\exists$ sup$T\in\mathbb{K}$. //
//Ein angeordneter, vollständiger(bzgl Anordnung) Körper heißt Körper// // der rellen Zahlen $\mathbb{R}$//
*//**S1.3.1** (501)Vor.:$\mathbb{K}$ angeordnet $T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$, $s\in\mathbb{K}$//*
// 1.) $\overline{s}$ = supT: ⇔ α) $\overline{s}$ ist obere Schranke von T und//
// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\overline{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T //
// ⇔ $\forall\ t\in T$: $t\leq\overline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon>\overline{s}-\varepsilon$ //
Bew:(falsche)Ann. $\exists\ a\in\mathbb{R}$: $n\leq a\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ a ist obere Schranke für $\mathbb{N}$.
D1.3.2: $\exists$ sup $\mathbb{N}=\overline{s}\in\mathbb{R}$.
S1.3.1: mit $\varepsilon=1 \Rightarrow \exists\ n\in\mathbb{N}: s-\underbrace{1}_{\varepsilon}<\underbrace{n}_{>s}$ (ε kann auch 1 sein) $\Rightarrow \overline{s}<n+1\in\mathbb{N} \Rightarrow$
Widerspruch zur Def von $\overline{s}$

Bem:1.) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n\in\mathbb{N}$ mit $1/n<\varepsilon$ (Prinzip des Eudoxos) ⇔
Archimedisches Prinzip
2.) Für $a\in\mathbb{R}$ gilt $a=0 \Leftrightarrow |a|<1/n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$
(vgl S1.2.1 (406))
$a=0 \Leftrightarrow |a|<\varepsilon\ \forall\ \varepsilon\in K$ mit $\varepsilon>0$
3.) $\forall\ a,b>0\ \exists\ n\in\mathbb{N}$: $na>b$
Bew:Aus $na\leq b$ folgt $n\leq b/a$, was nicht $\forall\ n\in\mathbb{N}$ gelten kann.

S1.5.5(707) Wohlordnungssatz
Vor:$M\subset\mathbb{N}$ und $M\neq\emptyset$ Beh: $\exists$ minM
#Zu dem Bew habe ich mir noch folgende Gedanken gemacht:
$\mathbb{N}$ wird zerlegt in M und $T:=M^c=\mathbb{N}\setminus M=\{n\in\mathbb{N}|n<m\ \forall\ m\in M\}$. Damit ist #$T\cap M=\emptyset$. Dann wird die falsche Annahme gesetzt, dass M kein Minimum
#hat und T unter dieser falschen Annahme untersucht. Im Folgenden #wird bewiesen, dass T induktiv, damit nicht nur $T\subset\mathbb{N}$, sondern $T=\mathbb{N}$ #ist. Wegen $(T=\mathbb{N})\cap M=\emptyset$ muss dann $M=\emptyset$ sein, denn wäre irgend ein #$m\in M\in\mathbb{N} \Rightarrow m\in(T=\mathbb{N})\cap M \Rightarrow (T=\mathbb{N})\cap M\neq\emptyset \Rightarrow$ Widerspruch, d.h. Annahme #tatsächlich falsch.
#Ist diese Vorbetrachtung hilfreich?
*//**S1.5.2** (702) Rechenregeln in N: $\forall m,n\in N$ gilt//*
//6.) $m>n \Rightarrow m\geq n+1 \Rightarrow \nexists$ natürliche Zahl zwischen n und n+1//
// $(n\neq m \Rightarrow |n-m|\geq 1)$//
Bew:Annahme $\nexists$ min M (z.Z. dann $M\neq\emptyset$. Falls das nicht stimmt, ist die Annahme falsch).
$T:=\{n\in\mathbb{N}|n<m\ \forall\ m\in M\} \Rightarrow T\subset\mathbb{N}$. $\underset{\text{induktiv ?}}{T}\cap M=\emptyset$.
Jedoch T ist induktiv:
1.) $1\in T$, $1\leq n\ \forall\ n\in\mathbb{N} \Rightarrow 1\leq m\ \forall\ m\in M$. Währe $1\in M$, so währe 1=min M ⇒
Widerspruch zu $\exists$ kein min M ⇒ $1<m\ \forall\ m\in M \Rightarrow 1\in T$

2.) Sei $n \in T \Rightarrow n < m \ \forall\ m \in M \underset{S1.5.2\ 6.)}{\underbrace{\Rightarrow}} n+1 < m \ \forall\ m \in M$, denn falls $n+1=m$ für ein $m \in M \Rightarrow n+1 = \min M \Rightarrow$ Widerspruch zu $\nexists \min M \Rightarrow n+1 < m \ \forall\ m \in M$ $\underset{\text{Def } T}{\underbrace{\Rightarrow}} n+1 \in T$.

1.) und 2.) T ist induktiv

$\mathbb{N}$ kleinste induktive Menge $\Rightarrow \mathbb{N} \subset T$ und $T \subset \mathbb{N}$ (siehe bei T:=...) $\Rightarrow$ $\mathbb{N} = T \Rightarrow M = M \cap \mathbb{N} = M \cap T = \emptyset \Rightarrow M = \emptyset$ Widerspruch zu $M \neq \emptyset$

Andere Formulierung:

*//**D0.1.5** (5) $M_1 \subset M_2$, $M_1^C := M_2 \setminus M_1$ Komplement M_1 in M_2,* $M \subset \mathbb{N}$, $M^c = \mathbb{N} \setminus M$ *//*

Annahme minM existiert nicht $\Rightarrow M = \emptyset$ bzw $M^c = \mathbb{N}$, d.h.

z.z. M^c induktiv

(.) Es ist $1 \in M^c$, weil, wenn $1 \notin M^c$, d.h $1 \in M$ und dann ist $1 = \min M$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) $\Rightarrow$ Widerspruch

(..) Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $m \in M^c$ für $1 \leq m \leq n$, dann ist $(n+1) \in M^c$, denn wäre $(n+1) \notin M^c$, so wäre $(n+1) \in M$ und damit $(n+1) = \min M$, weil $\forall\ m \in M$ gilt $m \geq n+1 \Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ (.) und (..) M^c induktiv $\Rightarrow$ Beh

Andere Formulierung:

Sei $M \subset \mathbb{N}$ <u>ohne</u> kleinstes Element $\Rightarrow 1 \notin M$. Falls schon gezeigt ist, dass $M \cap \{1,2,..n\} = \emptyset$, dann folgt auch $n+1 \notin M$, weil sonst $n+1$ kleinstes Element wäre. Also gilt: $\forall\ n \in \mathbb{N}: M \cap \{1,2,..n\} = \emptyset$ und daher $M = \emptyset$.

Andere Formulierung:

*//**S1.5.2** (702) Rechenregeln in N: $\forall m,n \in N$ gilt//*

//6.) $m > n \Rightarrow m \geq n+1 \Rightarrow \nexists$ natürliche Zahl zwischen n und//

// $n+1$ ($n \neq m \Rightarrow |n-m| \geq 1$)//

$K := \{k \in \mathbb{N} : k < m\ \forall\ m \in M$. Annahme $M \subset \mathbb{N}$ ohne Minimum $\Rightarrow$ $1 \notin M$ (andernfalls wäre 1 das kleinstes Element) $\Rightarrow 1 < m\ \forall\ m \in M \Rightarrow$ $1 \in K$ $k \in K$ beliebig $\Rightarrow k+1 \leq m\ \forall\ m \in M$, weil andernfalls $k+1 > m_0$ für ein gewisses $m_0 \in M$ wäre mit $k < m_0 < k+1$, -S1.5.2 6.):das ist nicht möglich-,

$\# k+1 \neq m \in M\ \forall\ m \in M \underset{S1.5.2\ 6.)}{\underbrace{\Rightarrow}} k+1$ Min M $\Rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow k+1 < m\ \forall\ m \in M \Rightarrow k, k+1 \in K \Rightarrow K$ induktiv $\Rightarrow K = \mathbb{N}$.

$\forall\ m \in M$ (möglich, da $M \neq \emptyset$) gilt $m \in K = \mathbb{N} \Rightarrow m < m$ Widerspruch, Ann falsch

S1.5.5' (709) Jede nach oben beschränkte nichtleere Menge M ganzer Zahlen besitzt ein Maximales Element

*//**S1.5.4** (705) Archimedisches Prinzip//*
// $\forall\ a\in R\ \exists\ n\in\mathbb{N}: a<n$ (d.h. $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben nicht beschränkt)//
Bew:Sei o.B.d.A. in M mindestens eine <u>positive</u> Zahl enthalten (falls nicht, können wir nämlich M durch $M+m_0=\{m+m_0|:m\in M\}$ ersetzen). Sei dann $\tilde{M}=\{n\in\mathbb{N}:M\le n\}$. Aus S1.5.4 folgt, daß $\tilde{M}\neq\emptyset\Rightarrow\tilde{M}$ besitzt minimales Element n_0. Nach Def von $\tilde{M}$ ist n_0 obere Schranke von M, aber n_0-1 ist keine obere Schranke. $\Rightarrow n_0\in M\Rightarrow n_0$ ist maximales Element von M
Andere Formulierung Bew
*Lös:$M\subset\mathbb{N}\ \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.5}\ \exists\ \overline{m}=\max M\Rightarrow\exists$ Abb $\{n\in\mathbb{N}|1\le n\le\overline{m}\}\to M$ mit $n\mapsto f(n)=m\ \forall\ n\le m$
d.h. bijektiv $\Rightarrow|1,2,...n|\le\overline{m}\ \Rightarrow\ |M|\le\overline{m}<\infty$

A1.5.6
a) Durch das Rekursionsschema
$a_0:=-2,\ a_1:=1,\ a_{n+1}:=1/2(a_n+a_{n-1}),\ n\in\mathbb{N}$, wird genau eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ festgelegt. Man gebe eine explizite Darstellung für diese Folge.
Anleitung:Man berechne a_n für n=2,3,4,5 und beweise sodann die sich ergebende Vermutung.

*//**S1.5.3** (703)Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*
//Vor:Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall\ m\in N$ mit $1\le m\le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr",// // so gilt: Beh:$A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n\in N$//
Lös:$a_2=1/2(1+(-2)=-1/2\quad a_3=1/4\quad a_4=-1/8\quad a_5=1/16$.. Vermutung:
Beh:$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=(-1/2)^{n-1}\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$. Bew mit Indsatz 2. Fassung

$$A(n):\ a_n=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\quad\forall\ n\in\mathbb{N}_0.$$

Bew:IAnf S1.5.3:n=0:$a_0=-2=(-1/2)^{0-1}$, d.h. $A_{(0)}$ wahr
IS : $\forall\ n\in\mathbb{N}_0$ gilt ($A_{(m)}\ \forall\ m\in\mathbb{N}_0$ mit $0\le m\le n\Rightarrow A_{(n+1)}$).
Sei $n\in\mathbb{N}_0$ fest aber bliebig
(Z.z. ist: $\underbrace{A_{(m)},0\le m\le n}_{\text{Ind Hyp}}\Rightarrow\underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Ind Beh}}$)
1.Fall:n=0 $a_{n+1}=a_1=1=(-1/2)^0=(-1/2)^{(n+1)-1}=(-1/2)^{(1+1)-1}=(-1/2)$ wahr,
d.h. $A_{(0)}\Rightarrow A_{(0+1)}$, $A_{(0)}$ wurde hier nicht benötigt
2.Fall:n≥1 IndHyp:$a_m=(-1/2)^{m-1}$ für alle m $0\le m\le n$,

IndBeh :$a_{n+1}=(-1/2)^{(n+1)-1}=(-1/2)^n$
$a_{n+1}=1/2(a_n+a_{n-1})\ \underbrace{=}_{\text{IndHyp}}\ 1/2((-1/2)^{n-1}+(-1/2)^{(n-1)-1})=$
$\frac{1}{2}((-1/2)^{n-1}\underbrace{(1+(-1/2)^{-1})}_{=1+(-2)}=$
$(-1)(1/2)(-1/2)^{n-1}=(-1/2)(-1/2)^{n-1}=(-1/2)^n$

*//**S1.5.3** (703)Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*
//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall\ m\in\mathbb{N}$ mit $1\le m\le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist wahr"// // so gilt: Beh:$A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n\in\mathbb{N}$//
Es wurde also für beliebiges aber festes $n\in\mathbb{N}_0$ gezeigt

$A_{(m)}$, $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$ mit $0\le m\le n \Rightarrow A_{(n+1)}$,
also nach Teil 2) in S1.5.3 $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ gilt ($A_{(m)}$, $m\in\mathbb{N}_0$, $0\le m\le n \Rightarrow A_{(n+1)}$).
Die Vor nach S1.5.3 ist also erfüllt mit IndAnf n=0.
Damit: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$ (Teil 1 und 2))

b) Die Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ sei folgendermaßen rekursiv definiert:
$a_0:=3$, $a_{n+1}:=1/2(a_n+5/a_n)$, $n\ge 0$.
(.) Zeige: $\sqrt{5}<a_{n+1}<a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.
(..) Ist $\sqrt{5}$ das Infimum der Wertemenge der Folge (a_n)?
Bem: Diese Def ist sinnvoll, da $a_n>0$ d.h. auch $a_n\ne 0$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$.
Bew durch Induktion
$n=0: a_0=3>0$, $n\to n+1: a_{n+1}=1/2(\underbrace{a_n}_{>0}+\underbrace{5/a_n}_{>0})>0$

*//**A1.2.10**c) 408) a, b∈K angeordnet. c) $a^2<b^2$ gilt genau dann, wenn $|a|<|b|$//*
*//**S1.3.1** (501) Vor.: K angeordnet $T\subset K$, $T\ne\emptyset$, $\underline{s}\in K$//*
// 1.) $\underline{s}=\inf T :\Leftrightarrow$ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //
// β) $\forall\ \varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T //
// $\Leftrightarrow$ $\forall\ t\in T$: $t\ge\underline{s}$ und $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ t_\varepsilon\in T$ mit $t_\varepsilon<\underline{s}+\varepsilon$//

Lös: Z.z. $\sqrt{5}<a_{n+1}<a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$
$5<a_n^2$ (damit $\sqrt{5}<a_n$, denn $(\sqrt{5})^2=5<a_n^2 \underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.10} \underbrace{|\sqrt{5}|}_{=\sqrt{5},\ \sqrt{\ }\text{stets}\ge 0}<|a_n|=a_n>0$
und $a_n>a_{n+1}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$).
Bew $5<a_n^2$ (IHyp) durch Induktion nach n.
Ianf $n=0$: $5<a_0^2=3^2=9$ und
$a_1=1/2(a_0+5/a_0)=1/2(3+5/3)=7/3<9/3=3=a_0$
IS $n\underbrace{\mapsto}_{n\ge 0}n+1$: $a_{n+1}^2-5=[1/2(a_n+5/a_n)]^2-5=1/4(a_n^2+10+(5/a_n)^2-20)=$
$1/4(a_n^2-10+(5/a_n)^2)=[1/2(a_n-5/a_n)]^2=\left(\frac{a_n^2-5}{2a_n}\right)^2>0$,
(da nach IHyp $a_n^2-5\ne 0$ wegen $a_n^2>5$) $\Rightarrow a_{n+1}^2>5$
Beh: $a_{n+1}<a_n$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$
Bew: $a_n-a_{n+1}=a_n-1/2(a_n+5/a_n)=1/2(a_n-5/a_n)=\frac{a_n^2-5}{2a_n}>0$
(nach IHyp da $a_n^2-5\ne 0$ wegen IHyp $a_n^2>5$) also $a_n>a_{n+1}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}_0$
Nach obigem ist die Menge $\{a_n: n\in\mathbb{N}_0\}$ nach unten durch
$\sqrt{5}$ beschränkt $\underbrace{\Rightarrow}_{\text{Vollständigkeitsax.}}$ $\exists\ \alpha:=\inf\{a_n, n\in\mathbb{N}_0\}$
existent in $\mathbb{R}$ und $\alpha\ge\sqrt{5}$
Beh: $\alpha=\sqrt{5}=\inf\{a_n, n\in\mathbb{N}_0\}$.
Bew: Annahme: $\alpha\ne\sqrt{5}$, d.h. $\alpha>\sqrt{5}$ $\underbrace{\Rightarrow}_{A1.2.10c}$ $\alpha^2>5 \Rightarrow a_n-a_{n+1}=\frac{a_n^2-5}{2a_n} \underbrace{\ge}_{a_n\ge\alpha\ \forall n}$

$$\frac{\alpha^2 - 5}{\underbrace{2 \cdot 3}_{a_n \le a_0 = 3\ \forall n}} =: \varepsilon \quad \forall\ n\in \mathbb{N}_0,$$ wobei $\varepsilon > 0$ (da $\alpha^2>5$).

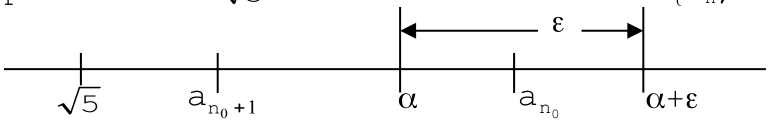
$^{*}\ a_{n_0} - a_{n_0+1} \ge \varepsilon \ \Rightarrow\ -a_{n_0+1} \ge \varepsilon - a_{n_0} \ \Rightarrow\ a_{n_0+1} \le a_{n_0} - \varepsilon$

Zu diesem $\varepsilon > 0$ $\underbrace{\exists t_\varepsilon}_{S1.3.11.)} \in \{a_n : n\in \mathbb{N}_0\}$ da α Infimum, mit $t^{\varepsilon} < \alpha + \varepsilon$,

d.h. $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}_0 : a_{n_0} < \alpha+\varepsilon$, d.h. $a_{n_0} - \varepsilon < \alpha \Rightarrow a_{n_0+1} \le a_{n_0} - \varepsilon < \alpha \Rightarrow$

$\sqrt{5} < a_{n_0+1} < \alpha$..

Widerspruch zu $\alpha > \sqrt{5}$ untere Schranke von $\{a_n, n\in \mathbb{N}_0\} \Rightarrow \alpha = \sqrt{5}$



D1.5.2 (711)

In einem Körper K seien Elemente $a, a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ für ein $n\in \mathbb{N}$ eindeutig gegeben. Dann definieren wir

(.) Die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ durch
$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{0} a_\nu := 0 \\ \sum_{\nu=1}^{1} a_\nu := a_1 \\ \sum_{\nu=1}^{m+1} a_\nu := a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu, 1 \le m \le n-1 \end{cases}$$

Bem: Die Assoziativgesetze besagen: Klammern sind nicht nötig

Andere Formulierung:

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 0, \text{falls } n < m \\ a_m, \text{falls } n = m \\ \sum_{k=m}^{n-1} a_k + a_n, \text{falls } m+1 \le n \end{cases}$$

(..) Das Produkt $\prod_{j=1}^{n} a_j$ durch
$$\begin{cases} \prod_{j=1}^{0} a_j := 1 \\ \prod_{j=1}^{m+1} a_j := \left(\prod_{j=1}^{m} a_j\right) \cdot a_{m+1}, 0 \le m \le n-1 \end{cases}$$

Andere Formulierung:

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := \begin{cases} 1, \text{falls } n < m \\ a_m, \text{falls } n = m \\ \prod_{k=m}^{n-1} a_k * a_n, \text{falls } m+1 \geq n \end{cases}$$

Motivation $\log(a_m * a_{m+1} * \ldots * a_n) = \sum_{k=m}^{n} \log a_k)$

(...)Die Potenzen a^n durch $a^n = a * a^{n-1}$.

Für die Potenzen gelten die üblichen Rechenregeln.
Bew durch Induktion

n-faches von a :$n*a$, $\underset{\in R}{1} *a:=a$, $(m+1)a:=a+ma$, $1\leq m\leq n-1$, $\underset{\in R}{0} *a=0\in K$

nte Potenz von a:a^n, $a^1:=a$, $a^{m+1}= a*a^m$, $1\leq m\leq n-1$,
neutrales Element $a\in K\rightarrow a^0=1\in K$ (auch für $a=0\in K$)

*//**S1.5.5** (706)Wohlordnungss, Vor:$M\subset N$ und $M\neq\emptyset$,Beh: $\exists$ minM//*

Bem:1.)Satz 1.5.4 $\Rightarrow$ obige Summen und Produkte sind $\forall$ $n\in N$ eindeutig (rekursiv) definiert

2.)Aus (A1),(M1) folgt mit Induktion, dass n-fache Summen und Produkte unabhängig von der Klammersetzung sind

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \prod_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

#3.) m>n: $\frac{\overbrace{a*a*a*...*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*....*a}_{n}} = a^{m-n}$,

m=n: $a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$,

m=1: $\frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a*a*....*a}_{n}} = \frac{a^0}{\underbrace{a*a*....*a}_{n}} = a^{0-n} = a^{-n}$

m<n: $\frac{\overbrace{a*a*...*a}^{m\ mal}}{\underbrace{a*a*a*....*a}_{n}} = \frac{1}{\underbrace{a*a*....*a}_{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-(m-n)} = \frac{a^0}{\underbrace{a*a*....*a}_{n-m}} = a^{0-(n-m)} =$

$a^{0-(n-m)} = a^{\overbrace{m-n}^{<0}}$ usw Grundlagen Algebra

Andere Formulierungen:
Sind n reelle oder komplexe Zahlen $a_1, \dots a_n$ gegeben, so bezeichnet im Folgenden $\sum_{j=1}^{n} a_j$ immer die Summe und $\prod_{j=1}^{n} a_j$ ihr Produkt. Sinngemäß schreiben wir Summen und Produkte von Zahlen, deren Nummerierung nicht bei 1, sondern bei 0 beginnt. Falls $n \leq 0$ ist, soll immer $\sum_{j=1}^{n} a_j=0$ und $\prod_{j=1}^{n} a_j=1$ gelten. Man sagt: Eine leere Summe ist gleich 0, ein leeres Produkt gleich 1.
Allgemeiner: Ist J eine endliche Indexmenge und ist $f: J \to K$, $j \mapsto f(j)=f_j$, eine beliebige Abb, so schreiben wir $\sum_{j \in J} f_j$ für die Summe der Zahlen f_j (und analog für das Produkt). Wegen der Kommutativität der Addition ist es dabei unerheblich, in welcher Reihenfolge wir die Zahlen addieren.
Ist etwa $J=\{1,...,n\} \times \{1,...,m\}$, so ist $j \in J$ ein Zahlenpaar (i,k) und wir schreiben f_{ik} statt $f_{(ik)}$. Die Summe dieser Zahlen ist dann eine sogenannte Doppelsumme und wegen des Kommutativ- und Assoziativgesetzes gilt $\sum_{(i,k) \in J} f_{ik} = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{m} f_{ik}) = \sum_{k=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} f_{ik})$
Entsprechendes gilt auch für Produkte.
Bem: $a_{\nu\mu}$ $(m_1 \leq \nu \leq n_1,\ m_2 \leq \nu \leq n_2)$ $m_1=m_2=1$ $n_1, n_2 \in N$.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n_2} \\ a_{21} & \dots & & \dots a_{2n_2} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n_1 1} & \dots & & \dots a_{n_1 n_2} \end{matrix}$$

$$\sum_{\nu=m_1}^{n_1} \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu} =: \sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu, \quad \sum_{\nu=m_1}^{n_1} b_\nu = \sum_{\mu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}.$$

$$= \sum_{\mu=m_2}^{n_2} \sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$$

$$\begin{matrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \dots & \dots & \dots & \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots a_{nn} \end{matrix}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}.$$

$1 \leq \nu \leq n$
$1 \leq \mu \leq \nu$

A1.5.7

a) $a_n := \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$. Zeige $a_n \geq \frac{1}{2}$.

Lös: $a_{n+1} < a_n$, $\frac{1}{2} < a_n < 1 \quad \forall\ n \geq 2$,

$$a_n - a_{n+1} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2(n+1)-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0 \ \Rightarrow\ a_n > a_{n+1}$$

Für $n \geq 2$: $a_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} < \frac{n}{n} = 1$

(man braucht 2 Summanden, daher n>=2, größter Summand ist $\frac{1}{n}$)

für n=1: $a_n = 1 < 1$, $a_n - \frac{1}{2} = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \underset{n\geq 2}{>} \frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2} = \frac{2n-(2n-1)}{4n-2} = \frac{1}{4n-2} > 0$

gilt auch für n=1, dann $> \to \geq$

b)Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3)

*//**S1.5.3** (703)Prinzip der vollständigen Induktion 2. Fassung//*
//Vor: Aus „$A_{(m)}$ ist wahr" $\forall\ m \in \mathbb{N}$ mit $1 \le m \le n$ folgt stets „$A_{(n+1)}$ ist// //wahr", so gilt: Beh:$A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n \in \mathbb{N}$//
//Bem:Induktion kann auch bei $n_0 \in N$ beginnen $B_{(n)} := A_{(n_0+n-1)}$//

Beweise: $\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$

//D1.5.2 (709)//

// (.) Die Summe $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$ durch
$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{0} a_\nu := 0 \\ \sum_{\nu=1}^{1} a_\nu := a_1 \\ \sum_{\nu=1}^{m+1} a_\nu := a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu,\ 1 \le m \le n-1 \end{cases}$$
//

*//**S1.5.1** (701)vollständigen Ind//*
//Vor. $\forall\ n \in N$ sei $A_{(n)}$ eine von n abhängige Aussage gegeben und es
// gelte 1.)"$A_{(1)}$ ist wahr" (Induktionsanfang) und//
// 2.) $\forall\ n \in N$ (beliebige $n \in N$) folgt aus „$\underbrace{A_{(n)}\text{ist wahr}}_{\text{IndHyp}}$" auch//
// „$\underbrace{A_{(n+1)}\text{ist wahr}}_{\text{IndAussage}}$" so gilt: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall n \in N$//
// $\forall\ n \in N$ gilt $\underbrace{(\underbrace{A_{(n)}}_{\text{Induktionshypothese}} \Rightarrow \underbrace{A_{(n+1)}}_{\text{Induktionsbehauptung}})}_{\text{Induktionsschluß } n \Rightarrow n+1}$ ist wahr//
//Beh: $A_{(n)}$ ist wahr $\forall\ n \in N$//

Bew:Induktion nach $n \in \mathbb{N}_0$. Induktion kann bei jedem Element von $\mathbb{Z}$ anfangen(mit A(n):"$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}$")

IAnf n=0 : $\sum_{\nu=1}^{0} \nu \underset{D1.5.2}{=} 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}$ wahr, d.h. $A_{(0)}$ wahr

IS $n \to n+1$ $(n \ge 0)$:Z.z. $\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{n(n+1)}{2}}_{A_{(n)}\text{ Indhyp}} \Rightarrow \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}}_{A_{(n+1)\,Indbeh}}$ ist wahr

$$\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu \underset{D1.5.2}{=} (n+1) + \underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} \nu}_{\text{Ind Hyp} = \frac{n(n+1)}{2}} = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)(1+n/2) =$$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, damit ergibt sich die Beh aus S1.5.1 (vollständige Induktion) mit Induktionsanfang n=0 anstelle von n=1

c) $\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\ n\in\mathbf{N}_0$

Bew: Induktion nach $n\in\mathbf{N}_0$

n=0 : $\sum_{\nu=1}^{0} \nu^2 \underset{D1.5.2}{=} 0 = \frac{0\cdot(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ wahr

$\underset{n>0}{n}$ $n\mapsto n+1$: $\sum_{\nu=1}^{n+1} \nu^2 \underset{D1.5.2}{=} (n+1)^2+\sum_{\nu=1}^{n} \nu^2 \overset{IndHyp}{=} (n+1)^2+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$

$(n+1)\frac{6(n+1)+n(2n+1)}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} =$

$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$

d) $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1$

Bew: Ihyp : $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1$

n=1 : $\prod_{k=1}^{1} (1+1/k) = 1+1$

$n\mapsto n+1$: Es gelte $\prod_{k=1}^{n} (1+1/k) = n+1 \ \forall\ n\in\mathbf{N}$. Dann gilt

$\prod_{k=1}^{n+1} (1+1/k) = \prod_{k=1}^{n} (1+1/k)(1+\frac{1}{n+1}) \underset{IHyp}{=} (n+1)\frac{n+2}{n+1} = n+2 = (n+1)+1$

e) $\prod_{k=1}^{n} (1+x_k) \ge 1+\sum_{k=1}^{n} x_k$ für $x_1,...,x_n>0$.

Wenn $x_1,...,x_n=x$: $(1+x)^n \ge 1+nx$, siehe auch weiter unten S1.5.6 mit $x\ge -1$

Bew: n=1 : $\prod_{k=1}^{1} (1+x_n) = 1+x_1 = 1+\sum_{k=1}^{1} x_k$

$n\to n+1$: $\prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) = \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)(1+x_{n+1}) \ge (1+\sum_{k=1}^{n} x_k)(1+x_{n+1}) =$

$1+\sum_{k=1}^{n} x_k + \underbrace{x_{n+1}}_{>0} + \underbrace{x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k}_{\ge 0} \ge 1+\sum_{k=1}^{n+1} x_k.$

f) $\sum_{k=1}^{n} a_k * \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \ge n^2 (a_1,\ldots a_n>0)$

Bew: Für $x,y>0$ gilt $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} = \frac{x^2+y^2-2xy+2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2+2xy}{xy} \ge \frac{2xy}{xy} = 2$

Bew durch Induktion nach n

n=1: $\sum_{k=1}^{1} a_k * \sum_{j=1}^{1} \frac{1}{a_j} = \frac{a_1}{a_1} = 1^2$

$n\to n+1$: Für $n\in\mathbf{N}$ gelte $\sum_{k=1}^{n+1} a_k * \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{a_j} = (\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1})(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}}) =$

$\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + a_{n+1}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} + \frac{1}{a_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} a_j + a_{n+1}\frac{1}{a_{n+1}} >$

$n^2+\sum_{j=1}^{n} (\frac{a_{n+1}}{a_j}+\frac{a_j}{a_{n+1}})+1 \ge n^2+\sum_{j=1}^{n} n+1 = n^2+2n+1 = (n+1)^2.$

g) $\sum_{k=1}^{n} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

Bew:n=1: $\sum_{k=1}^{n} k^3=1=\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2$

n$\to$n+1: $\sum_{k=1}^{n+1} k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+(n+1)^3=(n+1)^2\left(\frac{n^2}{4}+\frac{4n+4}{4}\right)=(n+1)^2+\frac{(n+2)^2}{4}=$

A1.5.8 Beweise: $\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j} a_{jk}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k}^{n} a_{jk}$

Bew:1. Möglichkeit:

K=: 1 2 3 … n

j=1: a_{11}

j=2: a_{21} a_{22}

j=3: a_{31} a_{32} a_{33}

.

.

j=n: a_{n1} a_{n2} $a_{n3}...a_{nn}$

$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j} a_{jk}=\prod_{j=1}^{n} a_{j1}a_{j2}a_{j3}...a_{jj}=(a_{11})(a_{21}a_{22})...(a_{n1}...a_{nn})=$$

$$\left(\prod_{j=k}^{n} a_{1k}a_{2k}...a_{nk}\right)=\prod_{k=1}^{n} a_{kk}a_{k+1k}...a_{nk}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k}^{n} a_{jk}$$

2. Möglichkeit:

$$\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{j} a_{jk}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\underbrace{a_{jk}}_{\text{Setze } a_{jk}=1 \text{ für } k>j}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} a_{jk}=\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=k}^{n} a_{jk}.\quad 1\le k\le j\le n$$

A1.5.9 Es seien $x_1,...,x_n\in\mathbb{R}$ mit $x_\nu\ge 0\ \forall\ \nu=1,...,n$.

Beweise: $\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)\ge 1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu$.

Bew: $\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)\underbrace{(1+x_{n+1})}_{\ge 0}\ge\left(1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)(1+x_{n+1})=1+\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu+\underbrace{x_{n+1}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu}_{\ge 0}\ge 1+\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu$

Durch vollständige Induktion:

n=1: $\prod_{\nu=1}^{1}(1+x_\nu)=1+x_1\ge 1+\sum_{\nu=1}^{1} x_\nu=1+x_\nu$

n$\to$ n+1: $\prod_{\nu=1}^{n+1}(1+x_\nu)=(1+x_{n+1})\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)(1+x_\nu)\ge(1+x_{n+1})\left(1+\prod_{\nu=1}^{n}(1+x_\nu)\right)=$

$$1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu+x_{n+1}+\underbrace{x_{n+1}}_{\ge 0}\underbrace{\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu}_{\ge 0}\ge 1+\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu+x_{n+1}=1+\sum_{\nu=1}^{n+1} x_\nu\Rightarrow$$

A(n) ist wahr

A1.5.10 Es seien $a_1,...,a_n,b_1,...,b_{n+1}\in \mathbb{C}$, und es sei $A_n:=\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Zeige: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1}-b_k)$

Bew:Induktion nach n oder $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1}-b_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu(b_{k+1}-b_k) =$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \underbrace{\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1}-b_k)}_{\text{Teleskopsumme}} = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(b_{n+1}-b_\nu) = b_{n+1}A_n - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu.$$

oder rechte Seite:

$$A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_{k+1}-b_k) = b_{n+1}\sum_{k=1}^{\infty} a_\nu - \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)\sum_{\nu=1}^{k} a_\nu}_{1\le\nu\le k\le n} =$$

$$b_{n+1}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu - \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \sum_{k=0}^{\infty}(b_{k+1}-b_k) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(b_{n+1}+\sum_{k=0}^{\infty}(b_{k+1}-b_k)) =$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(b_{n+1}+b_\nu-b_{n+1}) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\, b_\nu \text{:linke Seite}$$

S1.5.6(718)Unleichung von Bernoulli
Vor:$x\in\mathbb{R}$, $x\ge -1$, $n\in\mathbb{N}$
Beh:$(1+x)^n \ge 1+nx$,
Gleichheit gilt genau dann, wenn x=0 oder n=0 oder n=1
Bew:$A_{(n)}$: $(1+x)^n \ge 1+nx$
$A_{(1)}$: $(1+x)^1 \ge 1+1\cdot x$

$n\to n+1$: $(1+x)^n \ge 1+nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\ge 1+nx}\underbrace{(1+x)}_{\ge 0} \ge (1+nx)(1+x) =$

$$1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x + \underbrace{nx^2}_{n\ge 0} \ge 1+(n+1)x$$

Bem:1.) n=0 $(1+x)^0=1 \ge 1+0\cdot x$
2.) Für $x\ge -1$, $n\ge 2$, $x\ne 0 \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx$ anstelle von $\ge$
...Induktionsanfang n=2

#**S1.5.7**(715) Vor: $x,y\in\mathbb{R}$, $x,y>0$, $n\in\mathbb{N}$. Beh: $x<y \Leftrightarrow x^n<y^n$
#//D1.2.1 (400)(K,+,) angeordnet (O3) a<b und 0<c ⇒ a*c < b*c //*

\# Bew:n=2 : $x<y \Leftrightarrow x*x \underset{D1.2.1(O3)}{<} x*y \underset{D1.2.1(O3)}{<} y*y \Leftrightarrow x^2<y^2$

\# IH n : $x<y \Leftrightarrow x^n<y^n$

\# n+1 : $x<y \Leftrightarrow x^n*x \underset{IH\ D1.2.1(O3)}{<} y^n*x \underset{IH\ D1.2.1(O3)}{<} y^n*y \Leftrightarrow x^{n+1}<y^{n+1}$

A1.5.11 Beweise $\forall\ n\in\mathbb{N}$ mit $n\ge 2$ die Ungleichung $1+\frac{1}{n} < (1+\frac{1}{n^2-1})^n$.

Bew: $(1+\frac{1}{n^2-1})^n \underset{\text{Bernoulli}}{\ge} 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}$, $\underbrace{\frac{n^2}{n^2-1}}_{>1} > 1+\frac{1}{n}$

A1.5.12

Vorbemerkung zur Induktion. Induktion kann bei $n_0 \in \mathbb{Z}$ beginnen (vgl Bem nach S1.5.3). Beweise:

a) $n^2 \le 2^n \;\forall\; n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\}$

*//**A1.2.9** (408)a)aus a<b und b≤c folgt a<c//*

Bew: $n=0,\; 0^2=0 \le 1 = 2^0,\; n=1: 1^2=1 \le 2 = 2^1,\; n=2: 2^2 \le 2^2,\; n=3: 3^2 \not\le 2^3$

$n^2 \le 2^n \;\forall\; n \in \mathbb{N},\; n \ge 4$ wird unten durch Induktion nach n noch bewiesen. Dazu benötigt man Lemma:

$2n+1 < 2^n \;\forall\; n \in \mathbb{N},\; n \ge 3$ Induktion nach n

n=3: $\quad 2 \cdot 3 + 1 = 7 < 8 = 2^3$ wahr

$$\underbrace{n}_{n \ge 3} \mapsto n+1: 2(n+1)+1 = (2n+1)+2 \underset{\text{IndHyp}}{\le} 2^n + \underbrace{2}_{<2^n} < 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

Also: $2(n+1)+1 < 2^{n+1}$ (mit **A1.2.9** a)

Bem: $2 \le 2^n = (1+1)^n \underset{\text{Bernoulli Ungl}}{\ge} 1+n \ge 2 \;\forall\; n \in \mathbb{N}$

Noch z.z.: $n^2 \le 2^n \;\forall\; n \in \mathbb{N}, n \ge 4$ ... Induktion nach n

n=4: $\quad 4^2 = 16 \le 16 = 2^4$ wahr

$$\underbrace{n}_{n \ge 4} \mapsto n+1: (n+1)^2 = \underbrace{n^2}_{\le 2^n} + 2n+1 \underset{\text{IndHyp Abschätzung}}{\le} 2^n + \underbrace{2n+1}_{\le 2^n \text{ siehe oben da } n \ge 3}$$

$$\le 2^n + 2^n = 2^{n+1} \Rightarrow (n+1)^2 \le 2^{n+1}$$

Bem: Genauer gilt $n^2 < 2^n \;\forall\; n \in \mathbb{N}_0,\; n \ge 5$ oder $n \in \{0,1\}$

$n^2 = 2^n$ für $n \in \{2,4\}$

$n^2 > 2^n$ für $n=3$

b) $$\sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu} \quad \forall\; n \in \mathbb{N}_0.$$

*//**D1.5.2** (709)* $$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu := \begin{cases} \sum_{\nu=1}^{0} a_\nu := 0 \\ \sum_{\nu=1}^{1} a_\nu := a_1 \\ \sum_{\nu=1}^{m+1} a_\nu := a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} a_\nu,\; 1 \le m \le n-1 \end{cases}$$ *//*

Bew: Induktion nach n

n=0: $$\sum_{\nu=1}^{2\cdot 0} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \underset{\text{D1.5.2}}{=} 0 \underset{\text{D1.5.2}}{=} \sum_{\nu=1}^{0} \frac{1}{\nu} = \sum_{\nu=0+1}^{2\cdot 0} \frac{1}{\nu} \quad \text{wahr}$$

$n \mapsto n+1$: $$\sum_{\nu=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu} \underset{\text{2xD1.5.2}}{=} \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu}) + \frac{(-1)^{\overbrace{(2n+1)+1}^{gerade}}}{2n+1} + \frac{(-1)^{\overbrace{(2n+2)+1}^{ungerade}}}{2n+2} \underset{IndHyp\,*(715)}{=}$$

$$\underbrace{\left(\sum_{\nu=n+1}^{2n} \frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{2n+1}}_{= \sum_{\nu=n+1}^{2n+1} \frac{1}{\nu}} + \frac{-1}{2n+2} = \left(\sum_{\nu=n+2}^{2n+1} \frac{1}{\nu}\right) + \underbrace{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1}}_{=+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+1} = +\frac{1}{2n+2}} =$$

$$\sum_{\nu=n+2}^{2n+2} 1/\nu = \sum_{\nu=(n+1)+1}^{2(n+1)} 1/\nu$$

$$* \quad (-1)^k = \begin{cases} 1, \text{ falls k gerade} \\ -1, \text{ falls k ungerade} \end{cases} \text{(Bew. durch Ind nach k)}$$

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{2n} 1/\nu + \frac{1}{2n+1} = \sum_{\nu=n+1}^{2n+1} 1/\nu \right)$$

A1.5.13 $M=\left\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\right\}$

M={1/2; 1; 9/8; 1; 0,78125; 0,5625,…}……Vermutung:
Beh: inf M=0, min M existiert nicht ,sup M=max M=9/8

*//**A1.5.12** (715) a) $n^2 \leq 2^n \ \forall \ n \in \mathbb{N}_0 \setminus \{3\}$*
*//**S1.3.1** (501) Vor.: $\mathbb{K}$ angeordnet $T \subset \mathbb{K}$, $T \neq \emptyset$, $s \in \mathbb{K}$*
// 1.) $\overline{s}$ = supT: ⇔ α) $\overline{s}$ ist obere Schranke von T und
// β) $\forall \ \varepsilon>0$ ist $\overline{s}-\varepsilon$ keine obere Schranke von T
// ⇔ $\forall \ t \in T$: $t \leq \overline{s}$ und $\forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon > \overline{s}-\varepsilon$
// $\underline{s}$ = inf T: ⇔ α) $\underline{s}$ ist untere Schranke von T und //
// β) $\forall \ \varepsilon>0$ ist $\underline{s}+\varepsilon$ keine untere Schranke von T//
// ⇔ $\forall \ t \in T$: $t \geq \underline{s}$ und $\forall \ \varepsilon>0 \ \exists \ t_\varepsilon \in T$ mit $t_\varepsilon < \underline{s}+\varepsilon$//
// 2.) ∃ maxT ⇔ ∃ supT∈$\mathbb{K}$ und supT∈T: maxT=supT//
// ∃ minT ⇔ ∃ infT∈$\mathbb{K}$ und infT∈T: minT=infT//

Bew: (.) $\frac{n^2}{2^n} \leq 1 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ nach A1.5.12 a), für n=3: $\frac{n^2}{2^n}$=9/8 $\underset{1 \leq 9/8}{\Rightarrow}$

$\frac{n^2}{2^n} \leq 9/8 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ und $9/8 \in M \underset{\text{Def max}}{\Rightarrow}$ max M=9/8 $\underset{\text{S1.3.1 2.)}}{\Rightarrow}$ sup M=9/8.

(..) $\frac{n^2}{2^n} > 0 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ 0 ist untere Schranke von M

Noch z.z.* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ m^\varepsilon \in M$ mit $m^\varepsilon < \varepsilon$. Dann folgt aus S1.3.1 1.)

inf M=0 $\underbrace{\overset{\text{S1.3.1 2.)}}{\Rightarrow}}_{0 \notin M}$ min M existiert nicht

Bew: Sei $\varepsilon > 0$ bel aber fest.

$\mathbb{N}$ unbeschränkt $\Rightarrow \ \exists \ \underbrace{n_0}_{\in n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$: $n_0 > 1/\varepsilon$ bzw. $1/n_0 < \varepsilon$.

O.B.d.A. $n_0 \geq 10$

Setze $m^\varepsilon = \frac{n_0^2}{2^{n_0}} \Rightarrow m^\varepsilon \in M$ und $m^\varepsilon \underset{2^{n_0} > n_0^3}{<} \frac{n_0^2}{n_0^3} = \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

Einschub: Beh $2^n > n^3 \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}, n \geq 10$. Bew Induktion nach n

n=10: $2^{10}=1024>1000=10^3$

$n \underset{n \geq 10}{\mapsto} n+1$: $(n+1)^3 = n^3+3n^2+3n+1 \underset{\text{IndHyp}}{<} 2^n + \underbrace{(3n^2+3n+1)}_{<2^n, \text{ da } n \geq 10} < 2^n+2^n=$

2^{n+1}

Nebenrechnung: $3n^2+3n+1 < 2^n \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \ n \geq 10$
(stimmt auch für n=8 und n=9) Bew durch Induktion nach n

n=10: $3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 331 < 1024 = 2^{10}$

$n \mapsto n+1$: $3(n+1)^2+3(n+1)+1 = (3n^2+6n+3)+(3n+3)+1 =$

$(3n^2+3n+1)+(6n+6) \underset{\text{IndHyp}}{<} 2^n + \underbrace{6(n+1)}_{<2^n \text{ (Induktion)}} < 2^n+2^n=2^{n+1}$

Beh: $6(n+1) < 2^n \ \ \forall \ n \in \mathbb{N}, n \geq 10$

n=10: 66<1000

$n \mapsto n+1$: $6(n+2) = 6(n+1)+6 \underset{\text{IndHyp}}{<} 2^n + \underset{<2^n}{6} < 2^n+2^n=2^{n+1}$