D1.5.3 (750)
Sei M eine beliebige Menge, dann heißt

1.) M endlich: $\Leftrightarrow$ $M=\emptyset$ oder $\exists\ m\in\mathbb{N}$ und $\exists$ eine bijektive Abbildung $f:\{1,2,3,...,m\}=\{n\in\mathbb{N}|1\le n\le m\}\to M$, dann heißt m die Elementeanzahl von M, $m=|M|$, ($|\emptyset|=0$).
Mit $a_n:=f(n)$, $1\le n\le m$ ist $M=\{a_1,a_2,a_3,...,a_m\}$ mit $a_n=f^{-1}(n)$, $1\le n\le m$
2.) M unendlich: $\Leftrightarrow$ M ist nicht endlich ($|M|:=\infty$)
3.) M abzählbar: $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine bijektive Abbildung $f:\mathbb{N}\to M$ (d.h. $M=\{a_n:=f(n)|n\in\mathbb{N}\}$)
4.) Eine Menge heißt abzählbar unendlich, falls es eine bij Abb $f:\mathbb{N}\to M$ gibt
5.) M höchstens abzählbar: $\Leftrightarrow$ M ist endlich oder abzählbar unendlich
6.) M überabzählbar: $\Leftrightarrow$ $|M|=\infty$ und M ist nicht höchstens abzählbar
7.) Eine Abbildung $f:\mathbb{N}\to M\ne\emptyset$ eine Folge aus M: (a_n) oder besser $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset M$ mit $a_n=f(n)$, $n\in\mathbb{N}$..
8.) 2 Mengen heißen gleich mächtig, wenn eine Bijektion zwischen den beiden Mengen gilt.

Bem: 1.) Abzählbarkeit bedeutet gleichmächtig wie $\mathbb{N}$.
2.) Eine Menge M ist höchstens abzählbar bedeutet:
$\exists$ injektive Abb $\varphi:M\to\mathbb{N}$

S1.5.7 (750) Teilmengen von abzählbar (unendlichen) Mengen sind höchstens abzählbar

*Bsp: Quadratzahlen der natürlichen Zahlen bilden eine Teilmenge der natürlichen Zahlen

*//**S1.5.5** (706) Wohlordnungss, Vor: $M\subset N$ und $M\ne\emptyset$, Beh: $\exists$ minM//*

Bew: Sei A abzählbar unendlich und sei $B\subset A$. Wir nehmen o.B.d.A an, daß B nicht endlich ist. Sei $f:\mathbb{N}\to A$ eine bij Abb und sei $M=\{n\in\mathbb{N}: f(n)\in B\}$. Dann ist M eine unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ und hat deshalb ein minimales Element n_1. Genau so hat die Menge $M_1=M\backslash\{n_1\}$ ein minimales Element $n_2(>n_1)$. Allg: Sind $n_1<n_2<...<n_m$ Elemente aus M, so besitzt $M_m=M\backslash\{n_1,n_2,...,n_m\}$ ein kleinstes Element, welches wir n_{m+1} nennen. Die Abb $g:\mathbb{N}\to M, m\mapsto g(m)=n_m$ ist sicher injektiv. Sie ist aber auch surjektiv, denn sonst müßte ein Element in M existieren, welches größer als unendlich viele natürliche Zahlen wäre, was nach weiter unten folgender **A1.5.14** nicht sein kann. Also ist $f\circ g$ eine bij Abb von $\mathbb{N}$ auf B, und deshalb gilt die Beh.

A1.5.14 Zeige: Eine nach oben beschränkte Teilmenge M der natürlichen Zahlen ist endlich

S1.5.8(751)Eine unendliche Menge besitzt eine abzählbar unendliche Teilmenge

#Damit ist ja nicht gesagt, dass es keine anderen Teilmengen gibt.

Bew:Sei A unendlich $\Rightarrow A\neq\emptyset$ und wir bezeichnen eines ihrer Elemente mit a_1. Sind bereits $a_1,a_2,...a_n$ aus A ausgewählt (alle verschieden), dann ist $A\backslash\{a_1,a_2,...a_n\}\neq\emptyset$ und wir bezeichnen ein Element mit a_{n+1}. In dieser Weise bekommen wir eine Folge in A und die Menge der Folgeglieder ist abzählbar unendlich.

S1.5.9(751)Das kartesische Produkt zweier abzählbar (unendlicher) Mengen ist wieder abzählbar (unendlich).

Bew:Seien A,B abzählbar unendlich und seien $f:\mathbb{N}\to A$ sowie $g:\mathbb{N}\to B$ bij Abb.

Dann ist die Abb $h:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to A\times B,(n,m)\mapsto(f(n),g(m))$ bij.

Eine natürliche Zahl k kann eindeutig zerlegt werden als

$k=\underbrace{\overbrace{\mu(\mu-1)/2}^{\in N}}_{\text{gerade}}+\nu,\ \mu,\nu\in\mathbb{N},\ 1\leq\nu\leq\mu,$ und $k\mapsto(\mu,\nu)\mapsto(\nu,\mu-\nu+1)$ ist eine bij Abb von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

μ	ν	1	2	3	4	5
		1.	3.	6.	10.=1+2+3+4=5(5-1)/2	
1		(a_1,b_1)	(a_1,b_2)	(a_1,b_3)	(a_1,b_4)	
		2.	5.	9.		
2		(a_2,b_1)	(a_2,b_2)	(a_2,b_3)	(a_2,b_4)	
		4.	8.			μ=4, ν=2
3		(a_3,b_1)	(a_3,b_2)	(a_3,b_3)	(a_3,b_4)	
		7.				
4		(a_4,b_1)	(a_4,b_2)	(a_4,b_3)	(a_4,b_4)	
		11.=5(5-1)/2+1				μ=5, ν=1
5		(a_5,b_1)	(a_5,b_2)	(a_5,b_3)	(a_5,b_4)	

Auch andere Reihenfolge möglich

μ	ν	1	2	3	4
		1	2	6	7
1		(a_1,b_1)	(a_1,b_2)	(a_1,b_3)	(a_1,b_4)....
			5	8	
2	3	(a_2,b_1)	(a_2,b_2)	(a_2,b_3)	(a_2,b_4)...
			9		
3	4	(a_3,b_1)	(a_3,b_2)	(a_3,b_3)	(a_3,b_4)...
4	10	(a_4,b_1)	(a_4,b_2)	(a_4,b_3)	(a_4,b_4)...

usw

$\longrightarrow$ $f:\mathbb{N}\to A\times B$ bijektiv

S1.5.10(752) Seien A_n höchstens abzählbare Mengen $\forall\ n\in\mathbb{N}$. Dann ist die Vereinigung $A=\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ höchstens abzählbar.

*//**S1.5.7**(750) Teilmengen von abzählbar (unendlichen) Mengen sind*
//höchstens abzählbar //
*//**S1.5.8**(751) Eine unendliche Menge besitzt eine abzählbar endliche*
//Teilmenge//

Bew:Wegen **S1.5.7** können wir alle A_n als abzählbar unendlich und paarweise disjunkt annehmen. Das bedeutet $A_n=\{a_{n1},a_{n2},...\}$ mit verschiedenen Elementen a_{nm} und deshalb ist die Abb $(n,m)\mapsto a_{nm}$ bij von $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ auf A. Daraus folgt mit Hilfe von S1.5.8 dieser S1.5.10

Andere Formulierung:

$A_k=\{a_{kj}:1\le j\le p_k\}$ mit $p_k\in\mathbb{N}$ oder $p_k=\infty\ \ \forall\ k\in\mathbb{N}$.

Bem:a) M ist höchstens abzählbar bedeutet: $\exists$ injektive Abb $\varphi:M\to N$

α) Sind A_k paarweise disjunkt, so ist die Abb $\varphi:a_{k\ell}\to(k,\ell)$ abzählbar nach **S1.5.8**

$A\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ im Allgemeinen nicht surjektiv,aber injektiv $\underset{\text{Bem}}{\Rightarrow}$

A höchstens abzählbar

β) Sind A_k nicht paarweise disjunkt, so $B_1:=A_1$, $B_2:=A_1\backslash B_1$, $B_3:=A_3\backslash(B_1\cup B_2)$,usw ...$B_k$ paarweise disjunkt

$\cup_{k=1}^{\infty} A_k=\cup_{k=1}^{\infty} B_k$

b) $|M_1|=n,|M_2|=m\ \Rightarrow\ |M_1 x M_2|=nm$

S1.5.11(752)Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich

Bew:Aus **S1.5.8-S1.5.10** folgt, daß die Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ abzählbar ist. Die Abb $(p,q)\mapsto p/q$ ist eine surjektive Abb von $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ und deshalb folgt mit unten stehender **A1.5.15** die Beh.

A1.5.15 Zeige:Ist $f:\mathbb{N}\to A$ surjektiv, so ist A höchstens abzählbar.

*Lös:$f:\mathbb{N}\to A$ surjektiv $\Rightarrow\ \forall\ a\in A$ existiert mindestens ein $n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow$

1.Fall:$\forall\ a\in A$ existiert genau ein $n\in\mathbb{N}:n\mapsto f(n)=a\ \Rightarrow$ f bij $\Rightarrow$
A abzählbar ∞.

2.Fall:$\exists\ a_{n+1}\in A$ mit $g:\{k_{n+1},k_{n+1}+1,\ldots k_{n+1}+\ell_{n+1}\}\to a_{n+1}$???,
$n\in\mathbb{N}_0$, $k,\ell\in\mathbb{N}$, $n,\ell,k\le\infty$, k, $k_{n+1}=k_n+\ell_n+1$??? $\Rightarrow$
$n\mapsto f(n)=a_n$, $n\in\mathbb{N}, n\le\infty\ \Rightarrow$ abzählbar $\le\infty\ \Rightarrow$ höchstens abzählbar.

S1.5.12(752)Falls A mindestens 2 Elemente hat, also etwa {0,1}, dann ist die Menge aller Folgen in A überabzählbar.

Bew:Sei $F=(f_1,f_2,f_3,...)$ eine (abzählbar unendliche) Menge von Folgen in A. Dann ist $f_k=(f_{k1},f_{k2},f_{k3},...)$ für jedes $k\in\mathbb{N}$. Da A mindestens 2 Elemente hat, gibt es eine Folge $g=(g_1,g_2,g_3,...)$ aus A, für die $g_n\ne f_{nn}$ gilt $\forall\ n\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ g_n\ne f_k\ \ \forall\ k\ \Rightarrow\ g\notin F$. Somit kann eine abzählbar unendliche Menge von Folgen aus A niemals alle diese Folgen umfassen, woraus die Beh folgt.

Andere Formulierung bzw Aufgabe:

A1.5.16 Es sei F die Menge aller 0-1 Folgen aus $\mathbb{R}$, d.h.
$F=\left\{(a_n)_{n=1}^{\infty}:a_n\in\{0,1\}\ \ \forall\ n\in\mathbb{N}\right\}$. Zeige, dass F überabzählbar ist.

Lös: Annahme F ist nicht überabzählbar, d.h. F ist höchstens abzählbar.

$|F|=\infty$, denn $\exists\ (\delta_{nm})_{n=1}^{\infty}\in F\ \ \forall\ m\in\mathbb{N}$, wobei $\delta_{nm}=\begin{cases}0 \text{ falls } n=m\\ 1 \text{ falls } n\ne m\end{cases}\ \underset{|F|=\infty}{\Rightarrow}$

F ist abzählbar, d.h. lässt sich in folgender Form schreiben: $F=\{\underbrace{a^{(m)}}_{(a_n)_{n=1}^{\infty}} : m\in\mathbb{N}\}$

Sei $a^{(m)}=:(a_{mn})_{n=1}^{\infty}$, $m\in\mathbb{N}$

Definiere $a_n=\begin{cases}0 \text{ falls } a_{mn}=1\\ 1 \text{ falls } a_{mn}=0\end{cases}$ $\Rightarrow$ $a_n\neq a_{mn}$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ und $a:=(a_{mn})_{n=1}^{\infty} \underbrace{\Rightarrow}_{a_n\in\{0,1\}\ \forall n\in\mathbb{N}}$

$a\in F \Rightarrow \exists\ m_0\in\mathbb{N}$ $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}=a^{(m_0)}=(a_{n,m_0})_{n=1}^{\infty}$, insbesondere $a_{m_0}=a_{m_0 n_0}$ für ein $m_0\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \exists$ Widerspruch zur Def von a_{m_0} $\Rightarrow$ doch überabzählbar

Bem:Wie wir später sehen werden, folgt aus obigem Satz, daß die Menge der reellen Zahlen in einem beliebig kleinen Intervall [a,b] mit a<b immer überabzählbar ist. Da ein solches Intervall nur abzählbar viele rationale Zahlen enthält, ist sogar die Menge der irrationalen Zahlen in [a,b] überabzählbar.

A1.5.17 Zeige:Eine beschränkte Teilmenge M der ganzen Zahlen ist endlich

*Lös:Sei $n\in\mathbb{N}$. $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n\in\mathbb{N}\}$.

$M=P\cup\{0\}\cup L=\{m_+\in\mathbb{N} \mid m_+=f(n)\leq\overline{m}\}\cup\{0\}\cup\{-m_-\in\mathbb{N} \mid m_-=f(n)\leq\underline{m}\}\subset\mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ M durch $\overline{m}$ und $\underline{m}$ beschränkt $\Rightarrow \exists$ Abb $\{n\in\mathbb{N} \mid 1\leq n\leq\overline{m}\}\to P$

mit $n\mapsto f(n)=m_+$ $\forall$ $n\leq m_+$ d.h. bijektiv $\Rightarrow$ $|1,2,...n|\leq\overline{m}$ $\Rightarrow$ $|P|=k\leq\overline{m}$,

$f(n)=f(k+1)=0$ bijektiv $\Rightarrow$

$\exists$ Abb $\{n\in\mathbb{N} \mid k+1\leq n\leq\overline{m}\}\to L$ mit $n\mapsto f(n)=m_-$ $\forall$ $n\leq m_-$ d.h. bijektiv $\Rightarrow$

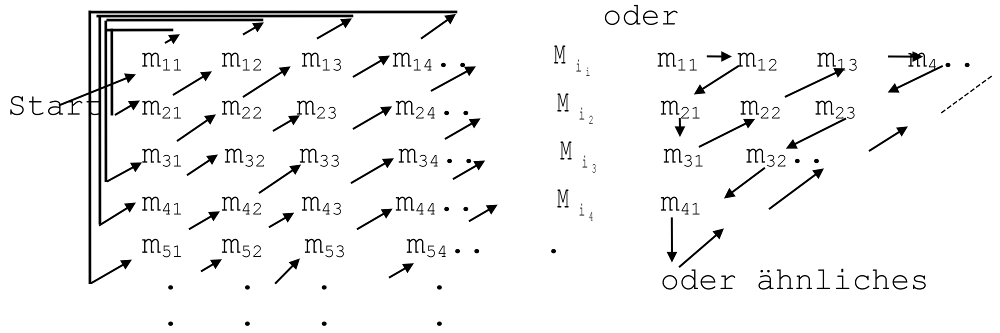
$|k+2,k+3,...,k+n|\leq\underline{m}$ $\Rightarrow$

$\exists$ bij Abb $f:\{1,2,...(k+n)\leq(\overline{m}+1+\underline{m})\}\to P\cup\{0\}\cup L=M$ mit $|M|\leq\overline{m}+1+\underline{m})\leq\infty$

A1.5.18 Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit a<b und $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ injektiv. Zeige, dass $f((a,b])$ überabzählbar ist.

A1.5.19 Zeige: Die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. ist I eine abzählbare Indexmenge und M_i abzählbar für alle $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ abzählbar.

Bew: I abzählbar $\Rightarrow$ I läßt sich in der Form $I = \{i_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ schreiben (mit paarweise verschiedenen i_ν). M_{i_ν} abzählbar $\Rightarrow$ $M_{i_\nu} = \{m_{\nu\mu} : \mu \in \mathbb{N}\}$ (mit $m_{\nu\mu_1} \neq m_{\nu\mu_2}$ $\forall$ $\mu_1 \neq \mu_2$), $\forall$ $\nu \in \mathbb{N}$. (jedes M_i, $i \in I$ lässt sich als M_{i_ν}, $\nu \in \mathbb{N}$ schreiben). Betrachte folgendes Schema:



Durchlaufe obiges Schema in Pfeilrichtung und ordne den $m_{\nu\mu}$ fortlaufend die Nummer 1,2,3..zu, wobei man schon aufgetretene $m_{\nu\mu}$'s überspringt, d.h. $1 \mapsto m_{11}$, $2 \mapsto \begin{cases} m_{21}, \text{ falls } m_{21} \neq m_{11} \\ m_{12}, \text{ falls } m_{21} = m_{11} \end{cases}$ (beachte: $m_{12} \neq m_{11}$, da $m_{11}, m_{12} \in M_{i1}$) usw

Man beachte, dass dieses Verfahren nicht abbricht, da $M_{i_\nu} \subset \bigcup_{i \in I} M_i$ und M_{i_ν} eine unendliche Menge ist.

Dadurch erhält man eine bijektive Abb $\mathbb{N} \to \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} M_{i_\nu} = \bigcup_{i \in I} M_i$, also ist $\bigcup_{i \in I} M_i$ abzählbar.

Bem: Ein exakter mathematischer Beweis obiger Aussage ist relativ aufwendig! Man benötigt z.B. folgende Aussagen:

(.) $f: X \to Y$ surjektiv, wobei X abzählbar $\Rightarrow$ Y höchstens abzählbar

(..) $\exists$ bijektive Abb $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (z.B. g^{-1}, wobei $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g(n,m) := 1/2\,(n+m)(n+m+1)+m$)

Es reicht eine surjektive Abb. $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ z.B. die linksinverse der injektiven Abb $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(n,m) \mapsto 2^n 3^m$

A1.5.20 Geg sei die Menge aller schließlich konstanten Folgen mit rationalen Gliedern, d.h.

$M=\{f: \mathbb{N}\to \mathbb{Q}$: Es existiert ein n_0 mit $f(n)=f(n_0)\ \forall\ n\geq n_0\}$.

Zeige, dass M abzählbar ist.

Bew: Def $M_{q,n_0}=\{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Q}$ mit $f(n)=q\ \forall\ n\geq n_0\}\Rightarrow M=\bigcup_{q\in Q}^{\infty} M_{q,n_0}$.

Wir zeigen: M_{q,n_0} ist abzählbar $\forall\ q\in\mathbb{Q},\ n_0\in\mathbb{N}_0$, insbesondere

$M_{q,1}=\{f: \mathbb{N}\to \mathbb{Q}: f(n)=q\ \forall\ n\in \mathbb{N}\}\Rightarrow |M_{q,1}|=1$.

Wenn $n_0\geq 1$, dann ist $M_{q,n_0}=\{f:\mathbb{N}\to \mathbb{Q}: f(n)=q\ \forall\ n\geq n_0\}=$

$\{(f(1),f(2),...f(n_{0-1}),q,q,q,...):f(1)....f(n_{0-1})\in\mathbb{Q}\}$,

Mit anderen Worten:

$T: M_{q,n_0}\to Q^{n_0-1}, T(f)=(f(1),....f(n_{0-1}))$ ist bijektiv und $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar

$\forall\ n\in \mathbb{N}$ ($\mathbb{Q}^2=\mathbb{Q}x\mathbb{Q}\Rightarrow \mathbb{Q}^n=\mathbb{Q}^{n-1}x\mathbb{Q}$ ist abzählbar) $\Rightarrow M=\bigcup_{q\in Q}\ \bigcup_{n_0=1}^{\infty} M_{n,q_0}$ ist

abzählbar als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen

A1.5.21 Es seien $\forall\ m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ und $f:\{1,...,m_1\} \to \{1,...,m_2\}$ bijektiv.
Zeige: $m_1 = m_2$. (Zur Erinnerung: $\{1,...,m\} := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \le n \le m\}$)

*//**D0.2.5** (202)Bem 2.)$f:X\to Y$ & $g:Y\to Z$ bij $\Rightarrow$ $g\circ f:X\to Z$ bij und//*
// $(g\circ f)^{-1}:Z\to X: (g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ //
*//**S1.5.2** /702/703) Rechenregeln in N: $\forall m,n \in \mathbb{N}$ gilt//*
//6.)$m>n \Rightarrow m \ge n+1 \not\Rightarrow \exists$ natürliche Zahl zwischen n und n+1//
// $(n \ne m \Rightarrow |n-m| \ge 1)$/

Bew:Wird durch Induktion nach $m_1 \in \mathbb{N}$ bewiesen.

$A(m_1)$: $m_2 \in \mathbb{N}$ und $f:\{1,...,m_1\} \to \{1,...,m_2\}$ bijektiv $\Rightarrow m_1 = m_2$)

$m_1 = 1$: Sei $m_2 \in \mathbb{N}$ und $f: \{1\} \to \{1,...,m_2\}$ bijektiv
$\forall\ n \in \{1,...,m_2\}$ gilt $: f(1) = n$, da f surjektiv,
(für $n \in \{1,...,m_2\}$ $\exists\ k \in \{1\}$ mit $f(k) = n$, d.h. $f(1) = n$)
insbesondere $1 = f(1) = m_2$ (da 1 und $m_2 \in \{1,...,m_2\}$), also
$m_1 = 1 = m_2$ d.h. A(1) ist wahr

$m_1 \underbrace{\mapsto}_{m_1 \ge 1} m_1+1$: (Induktionsschluß: $A(m_1) \Rightarrow A(m_1+1)$)

Es sei $m_2 \in \mathbb{N}$ und $f:\underbrace{\{1,...,m_1+1\}}_{=:M_1} \to \underbrace{\{1,...,m_2\}}_{=:M_2}$ bijektiv,

Z.z. $m_1+1 = m_2$

$m_2 \in M_2 \underbrace{\Rightarrow}_{f\ surjektiv} \exists\ n_0 \in M_1 : f(n_0) = m_2 \Rightarrow$

$f\big|_{M_1\setminus\{n_0\}} : M_1\setminus\{n_0\} \to \underbrace{M_2 \setminus \{m_2\}}_{=\{1,..,m_2-1\}}$ bijektiv (wie man leicht

nachprüft) (Bew: $M_2\setminus\{m_2\} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le m_2$ und

$n \ne m_2\} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.2} \{n \in \mathbb{N} : 1 \le n \le m_2 - 1\} = \{1,...,m_2-1\}$)

Definiere $g: M\setminus\{n_0\} \to \{1,..,m_1\}$ durch

$g(n) = \begin{cases} n, \text{falls } 1 \le n \le n_0 - 1 \\ n-1, \text{falls } n_0+1 \le n \le m_1 \end{cases}$ (beachte: g ist

wohldefiniert, da $g(n) \in \{1,..,m_1\}$ $\forall\ n \in M_1\setminus\{n_0\}$).
Dann ist g bijektiv, wie man leicht nachrechnet:
g surjektiv:Sei $m \in \{1,..,m_1\}$ bel..

Def $n := \begin{cases} m, \text{falls } 1 \le m \le n_0 - 1 \\ m+1, \text{falls } n_0 \le m \le m_1 \end{cases}$ $\Rightarrow g(n) = m$ und $n \in M\setminus\{n_0\}$

g injektiv: Seien $g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$ oder $n_1 - 1 = n_2 - 1 \Rightarrow n_1 = n_2$

$\Rightarrow g^{-1}: \{1,..,m_1\} \to M_1\setminus\{n_0\}$ bijektiv $\underbrace{\Rightarrow}_{D0.2.5\ Bem2}$

$f\big|_{M\setminus\{n_0\}} \circ g^{-1} = \{1,..,m_1\} \to \{1,..,m_2-1\}$ bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\underbrace{\Rightarrow}_{IndHyp} m_1 = m_2 - 1$

$\Rightarrow m_1 + 1 = m_2$

$1\ \ 2\ .\ .\ .\ n_0-1\ \ n_0\ \ n_0+1\ .\ .\ .\ m_1 \overset{f}{\to} \quad 1\ \ 2\ .\ .\ m_2-1\ \ m_2$

$g\ \ g^{-1}$

$1\ \ 2\ \ \ \ n_0-1\ \ n_0\ \ \ \ m_1 \xrightarrow{f|_{M\setminus\{n_0\}}\circ g^{-1}} \quad 1\ \ 2\ .\ .\ m_2-1$

*Einige eigene Ergänzungen und Änderungen. Fehlerfrei?

$m_1 \underset{m_1\geq 1}{\mapsto} m_1+1=m_1'$: (Induktionsschluß: $A(m_1) \Rightarrow A(m_1+1)$)

Es sei $m_2\in\mathbf{N}$ und f: $M_1' := \underbrace{\{1,..,m_1+1\}}_{=M_1'} \to \underbrace{\{1,...,m_2\}}_{=:M_2}$ bijektiv

Z.z. $m_1+1=m_2$

$m_2\in M_2 \underset{f\text{ surjektiv}}{\Rightarrow} \exists\ n_0\in M_1' : f(n_0)=m_2 \Rightarrow$

$f\big|_{M_1'\setminus\{n_0\}} : M_1'\setminus\{n_0\}\to \underbrace{M_2\setminus\{m_2\}}_{=\{1,..,m_2-1\}}$ bijektiv (wie man leicht nachprüft)

(Bew: $M_2\setminus\{m_2\}=\{n\in\mathbf{N}:1\leq n\leq m_2$ und $n\neq m_2\} \underset{S1.5.2\,6.)}{\Rightarrow} \{n\in\mathbf{N}:1\leq n\leq m_2-1\}=\{1,...,m_2-1\}$)

Definiere $g:M_1'\setminus\{n_0\}\to\{1,..,m_1\}$ durch

$g(n)=\begin{cases} n, \text{falls } 1\leq n\leq n_0-1 \\ n-1, \text{falls } n_0+1\leq n\leq m_1 \end{cases}$ (beachte: g ist wohldefiniert, da $g(n)\in\{1,..,m_1\}\ \forall\ n\in M_1'\setminus\{n_0\}$).

Dann ist g bijektiv, wie man leicht nachrechnet

g surjektiv: Sei $m\in\{1,..,m_1\}$ bel..

Def $n:=\begin{cases} m, \text{falls } 1\leq m\leq n_0-1 \\ m+1, \text{falls } n_0\leq m\leq m_1 \end{cases} \Rightarrow g(n)=m$ und $n\in M_1'\setminus\{n_0\}$

g injektiv: Seien $g(n_1)=g(n_2) \Rightarrow n_1=n_2$ oder $n_1-1=n_2-1\Rightarrow n_1=n_2$

$\Rightarrow g^{-1}:\{1,..,m_1\}\to M_1\setminus\{n_0\}$ bijektiv $\underset{D0.2.5\text{ Bem2}}{\Rightarrow}$

$f\big|_{M\setminus\{n_0\}}\circ g^{-1}=\{1,..,m_1\}\to\{1,..,m_1'\}\setminus n_0\to\{1,..,m_2-1\}$ bijektiv

Kombination bijektiver Abb ist bij.

$\underset{\text{IndHyp}}{\Rightarrow} m_1=m_2-1$

$1\ \ 2\ .\ .\ .\ n_0-1\ \ n_0\ \ n_0+1\ .\ .\ .\ m_1'=m_1+1 \overset{f}{\to} \quad 1\ \ 2\ .\ .\ m_2-1\ \ m_2$

$g\ \ g^{-1}$

$1\ \ 2\ \ \ \ n_0-1\ \ n_0\ \ \ \ m_1 \xrightarrow{f|_{M\setminus\{n_0\}}\circ g^{-1}} \quad 1\ \ 2\ .\ .\ m_2-1$

S1.5.13(758) Vor:$M\subset\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$ und M endlich
Beh:M besitzt ein Minimum und ein Maximum
Bem:$|\mathbb{N}|=\infty$ unbeschränkt, andernfalls $\exists$ $m=\max\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}$ und $m+1\in\mathbb{N}$ Widerspruch
Bew:$A_{(n)}$:Jede n elementige Menge hat max und min

n=1: $M=\{a_1\} \Rightarrow a_1=\max M=\min M$
n=2: $M=\{a_1,a_2\} \Rightarrow a_1\leq a_2 \Rightarrow a_1=\min M,\ a_2=\max M$
$a_1<a_2 \Rightarrow a_1=\min M,\ a_2=\max M$

n→n+1:$M=\{a_1,a_2,...a_n,a_{n+1}\}=\{a_1,a_2,...a_n\}\cup\{a_{n+1}\}$
$\max M = \max\{\max\{a_1,a_2,...a_n\},a_{n+1}\}$
$\min M = \min\{\min\{a_1,a_2,...a_n\},a_{n+1}\}$
$\exists$ max,min

Andere Formulierung:
Induktion nach der Elementezahl von $M\subset\mathbb{R}$:
$A_{(n)}$: jede Mange M mit $|M|=n$ hat Max und Min
n=1 :$M=\{a_1\}$ mit $a_1\in\mathbb{R} \Rightarrow a_1=\max M=\min M$
n→n+1:Sei M eine Menge mit $|M|=n+1$, d.h.
$M=\{a_1,a_2,...a_n,a_{n+1}\}=\{a_1,a_2,...a_n\}\cup\{a_{n+1}\}=:M'\cup\{a_{n+1}\}$,
$|M'|=n$. Nach IndHyp gilt:
$\exists$ $\min M'=a_{v_1}$ und $\exists$ $\max M'=a_{v_2}$.
$a_{v_1}\leq a_{n+1}\leq a_{v_2} \Rightarrow a_{v_1}=\min M,\ a_{v_2}=\max M$
$a_{n+1}<a_{v_1}\leq a_{v_2} \Rightarrow a_{n+1}=\min M,\ a_{v_2}=\max M$
$a_{v_1}\leq a_{v_2}<a_{n+1} \Rightarrow a_{v_1}=\min M,\ a_{n+1}=\max M$
d.h. M hat min und max

D1.5.4(758)
1.) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$: $\mathbb{Z}=\{a\in\mathbb{R}|a\in\mathbb{N}_0$ oder $-a\in\mathbb{N}\}$ heißt Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}=\mathbb{N}\cup\{0\}\cup\{-n:n\in\mathbb{N}\}$
2.) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$:$\mathbb{Q}=\{p/q\in\mathbb{R}|p\in\mathbb{Z}$ und $q\in\mathbb{Z}/\{0\}\}$, heißt Menge der rationalen Zahlen in $\mathbb{R}$
3.) Die Teilmenge von $\mathbb{R}$:$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ heißt die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R}$ (z.B. $\sqrt{2}$)
4.) $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty,-\infty\}$
5.) $\forall$ $x\in\mathbb{R}:-\infty<x<\infty$
6.) $-\infty=(-1)\infty$
7.) $\forall$ $x\in\mathbb{R}:\infty+x=\infty$

8.) $\forall$ $x\in\mathbb{R}_+:\infty x=\infty$
$\infty * x=\begin{cases}\infty, falls\ x>0\\ -\infty, falls\ x<0\end{cases}$, $0*\infty$ nicht definiert
9.) $\infty+\infty=\infty$, $-\infty+(-\infty)=-\infty$, $\infty*\infty=\infty$, $(-\infty)*\infty=-\infty$, $(-\infty)*(-\infty)=\infty$
10.) $\frac{x}{\pm\infty}:=0\ \ \forall\ x\in\mathbb{R}$.
11.) $\overline{\mathbb{R}}$ ist kein Körper (siehe nicht Definiertes)

Bem zu 1.),2.)
Für die Elemente von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ist in natürlicher Weise eine Addition und eine Multiplikation definiert, denn diese Operationen sind für alle reellen Zahlen definiert, also auch für die Elemente einer Teilmenge. Fraglich ist höchstens, ob das Ergebnis dieser Operationen wieder zur Menge gehört; dies ist im folgenden enthalten:

Andere Formulierungen zu 1. und 2.):

$\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abgeschlossen bzgl Addition und Multiplikation, d.h. für $a,b\in\mathbb{Z}(\in\mathbb{Q})$ sind auch $a+b$, $ab\in\mathbb{Z}(\in\mathbb{Q})$. Ferner gelten in $\mathbb{Z}$ die Axiome (A1)-(A4) sowie (M1),(M2),M(4),(D) und man nennt $\mathbb{Z}$ deshalb einen kommutativen Ring mit Einselement. In $\mathbb{Q}$ gelten alle Axiome eines Körpers. Man nennt $\mathbb{Q}$ auch den Quotientenkörper von $\mathbb{Z}$.

Bew:die Abgeschlossenheit ergibt sich direkt aus der Def und den Rechenregeln für Brüche, z.B.: $p_1/q_1+p_2/q_2=\dfrac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1p_2}$.

Die Gültigkeit der Axiome ergibt sich, da für $a\in\mathbb{Z}$ auch $-a\in\mathbb{Z}$ ist (genauso für $\mathbb{Q}$) und da für $a=p/q\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ auch $a^{-1}=q/p\in\mathbb{Q}$ ist.

Bem zu 4.)-9.)
Es gilt das Kommutativgesetz.Distributivgesetz und Assoziativgesetze gelten, soweit bei der Anwendung keine undefinierten Ausdrücke entstehen. Beachten: $\infty+(-\infty)$ und $0*\infty$ sind hier nicht definiert.

A1.5.22 Zeige, daß folgende zusätzliche Rechenregeln gelten
a) $\forall\ x\in\mathbb{R}: -\infty+x=-\infty$
b) $\forall\ x\in\mathbb{R}_+: x(-\infty)=-\infty, (-x)\infty=-\infty, (-x)(-\infty)=\infty$
c) $-\infty+(-\infty)=-\infty, (-\infty)\infty=-\infty, (-\infty)(-\infty)=\infty$

A1.5.23 Zeige, dass es nicht möglich ist, die Ausdrücke $\infty+(-\infty)$ und $0*\infty$ so zu definieren, daß $\overline{\mathbb{R}}$ zu einem Körper wird.

S1.5.14(760)

1.) $\forall$ m,n$\in$Z ist m$\pm$n, m·n$\in$Z (Z,+) ist Abelsche Gruppe

Bew:folgt aus S1.5.2 (RR für N) und D1.5.4 1.

2.)(Q,+,*,<) ist ein angeordneter Körper (Unterkörper von R), der nicht vollständig ist (echt in R enthalten ist)

*//**S1.3.2** (513)Vor:Sei $x\geq 0, x\in$R. Beh:$\exists$ genau ein y:$\sqrt{x}\in$R mit $y\geq 0$ und $y^2=x$//*

Bew:Wegen der Bruchrechenregeln in einem Körper ist Q abgeschlossen bzgl + und · (führt aus R nicht heraus).

$\sqrt{2}\subset$R\ Q. T=$\{t\in Q|0\leq t, t^2\leq 2\}$ kein sup in Q

aber in R. Analog zu Beweis in **S1.3.2** $\Rightarrow\exists$ supT=$\sqrt{2}\in$R\ Q

3.) N, Z, Q sind abzählbar, R und R\Q sind überabzählbar

Bew: N:id_N: N$\rightarrow$N $\Rightarrow$ N abzählbar.

Z:$\{a_k|k\in N\}$,

$a_1=0,\ a_k=n, k=2n,\ a_k=-n, k=2n+1\quad n\in N\ \underbrace{\leftrightarrow}_{\text{bij Abb alle N auf Z}}$

siehe Beh

Q : $Q^+=\{x\in Q|x>0\}$. $Q^-=\{x\in Q|x<0\}$.Q= $Q^-\cup\{0\}\cup Q^+$

	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1/2	2/2	3/2	4/2
3	1/3	2/3	3/3	4/3
4	1/4	2/4	¾	4/4

(1)+(1/2+2/1)+(1/3+3/1)+(1/4+2/3+3/2+4/1)+

$(a_1)+\ (a_2+a_3)+\quad (a_4+a_5)+$ ......

Q^+, Q^-(ähnlich Q^+) $\Rightarrow$ Q abzählbar

(0,1]=$\{x\in|0<x\leq 1\}$ ist nicht abzählbar ??????

S1.5.17: Jedes x$\in$(0,1] lässt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch darstellen:$x=0,a_1a_2a_3a_4$...mit $a_\nu=\{0,1,2,3,...,9\}\ \forall\ \nu\in N$.

Annahme (0,1]=$(x_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$

$x_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}....$ Annahme alle reellen Zahlen kommen

$x_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}....$ hier vor ist falsch

$x_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}....$ Widerspruch

$x_4=0,a_{41}a_{42}a_{43}....$

Definiere $x=0,b_1b_2b_3....$ mit $b_n=\{1,2,3,...,9\}$, $b_n\neq a_{nn}\ \forall\ n\in N \Rightarrow$ $x\in(0,1]\ \&\ x\neq x_n\ \forall\ n\in N\Rightarrow$ Widerspruch

Andere Formulierung:

$\mathbb{Q}:=\{p/q,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ |p|,\ q$ teilerfremd$\}$,

$\varphi: \mathbb{Q}\to \mathbb{Z}\times\mathbb{N},\ p/q\to(p,q)$

$M=\{p,q\}$ mit $|p|,q$ teilerfremd

$\varphi: \mathbb{Q}\to M$ injektiv $\underset{Beh}{\Rightarrow}$ abzählbar

$a_\nu\in\{0,1,2,3...,9\}\ \forall\ \nu\in\mathbb{N}$ Ann: $(0,1]=(x_\nu)_{\nu=0}^{\infty}$

S1.5.17:

$x_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{13}...$

$x_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}...$

$x_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}...$

usw

Ann:alle rellen Zahlen kommen hier vor.... sind das alle? Widerspruch

Definiere $x=0,b_1b_2b_3b_4...b_n$ mit

$b_n\in\{0,1,2,3...,9\}\ b_n\neq a_{nn}\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ (d.h. $b_1\neq a_{11},b_2\neq a_{22}\ b_3\neq a_{33}...$) $\Rightarrow$

$x\in(0,1]$ und $x\neq x_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$ Widerspruch

Andere Formulierung:

Idee: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$: $(0,1]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,0<x\leq 1\}$ ist nicht abzählbar.

S1.5.17 Jedes $x\in(0,1]$ lässt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch schreiben: $x=0,a_1a_2a_3a_4a_5$

wir sehen hieraus, dass sich jede Zahl $x\in[0,1)$ als Dezimalzahl darstellen lässt, d.h.

$x=0,x_1x_2x_3x_4$ ...mit $x_\nu\in\{0,1,2,...9\}$, aber $\exists$ kein $\nu_0\in\mathbb{N}$ mit $x_\nu=9\ \forall\ \nu\geq\nu_0$

Annahme: $[0,1)$ ist abzählbar $\{y_\nu\in[0,1),\nu\in\mathbb{N}\}$

$y_\nu=0,x_1^\nu x_2^\nu x_3^\nu,...\nu\in\mathbb{N},\quad \tilde{y}_\nu:=\begin{cases}4 \text{ falls } x_\nu^{(\nu)}\neq 4\\ 5 \text{ falls } x_\nu^{(\nu)}=4\end{cases}$

$y_1=0,\underline{x}_1^{(1)}x_2^{(1)}x_3^{(1)},...$

$y_2=0,x_1^{(2)}\underline{x}_2^{(2)}x_3^{(2)},...$ unterstrichene geändert

$\tilde{y}=0,\tilde{y}_1\,\tilde{y}_2\,...\in[0,1)=y_\nu\ \forall\ \nu$

Also $[0,1)$ überabzählbar, also $\mathbb{R}\supset[0,1)$ überabzählbar

Andere Formulierung:

S1.5.17:Jedes $x\in(0,1]$ lässt sich eindeutig als unendlicher Dezimalbruch schreiben: $x=0,a_1a_2a_3a_4a_5...$

Falsche Annahme: $x_1=0,a_{11}a_{12}a_{13}a_{13}...$

$x_2=0,a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}...$

$x_3=0,a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}...$ usw ist Abzählung aller rellen Zahlen in $[0,1)$

Sei $s=0,s_1s_2s_3s_4...\in[0,1)$ & $s_i=(a_{ii}+1)$ falls $a_{ii}\neq 9$, $s_i=0$ falls $a_{ii}=9\Rightarrow$ $s_i\neq a_{ii}\ \forall\ i\Rightarrow s\neq x_n\ \forall\ n\Rightarrow$ Widerspruch

A1.5.24 Bestimme,falls existent, sup M, max M, inf M, und min M für folgende Mengen:

a) $M=\{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}:n,m\in\mathbb{N}\}$ b) $M=\{x^2-10x-24:x\in(1,3]\}$ c) $M=[1,\sqrt{2}]\ (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$.

A1.5.25 Zeige: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0$: $1/n<\varepsilon$

A1.5.26 Zeige: $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_0\in\mathbb{N}\ \forall\ n\geq n_0$: $(n^2-5)^{-1}<\varepsilon$

A1.5.27 Zeige: Ist $z\in\mathbb{C}$ und $|z|\le 1/n \ \forall\ n\in\mathbb{N}$, so folgt $z=0$

S1.5.15 (759)
1.) $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists$ das größte Ganze von a, d.h. $\exists\ [a]\in\mathbb{Z}$ mit
$[a]\le a<[a]+1$, $[a]:=\max\{n\in\mathbb{Z}\,|\,n\le a\}$

*//**S1.5.5** (706) Wohlordnungss, Vor: $M\subset N$ und $M\neq\emptyset$, Beh: $\exists$ minM//*

Bew: Sei $a>0$: $T=\{n\in\mathbb{N}\,|\,n>a\in\mathbb{R}_+\} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.14} T\neq\emptyset,\ T\subset\mathbb{N} \underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.4} \exists\ \underline{m}=\min T,\ \underline{m}\in\mathbb{N},\ a<\underline{m} \Rightarrow$
$\underline{m}-1\le a<\underline{m} \Rightarrow [a]=\underline{m}-1\le a<\underline{m}$.
Sei $a\le 0$: $a\in\mathbb{Z} \Rightarrow [a]=a$ (dann gilt $a\le a\le a+1$).
Sei $a<0$: $a\notin\mathbb{Z} \Rightarrow -a>0 \Rightarrow \exists\ [-a]<-a<[-a]+1 \Rightarrow -[-a]>a>-[-a]-1 \Rightarrow$
$-[-a]-1<a<-[-a]-1+1 \Rightarrow [a]=-[-a]-1$
Bsp $-3,5$: $-a=3,5 \Rightarrow [-a]=3 \Rightarrow -[-a]-1=-4$

2.) $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b$ (.) $\exists\ q\in\mathbb{Q}$ mit $a<q<b$ und (..) $\exists\ d\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mit $a<d<b$
Bew: (.) $\varepsilon=b-a>0 \Rightarrow \exists\ n\in\mathbb{N}$: $2/n<\varepsilon$

Ansatz $q:=\dfrac{[nb]-1}{n}\in\mathbb{Q}$, $q\le\dfrac{nb-1}{n}=b-1/n<b$

$q:=\dfrac{[nb]+1-2}{n}>\dfrac{nb-2}{n}=b-2/n>b-\underbrace{\varepsilon}_{|b-a|}=a \Rightarrow a<q<b$

(..) O.B.d.A.: Sei $a\in\mathbb{Q}$ (sonst betrachte q,b).

Sei $\varepsilon=b-a$, $2/n<\varepsilon$, $d=a+\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ $(d\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) \Rightarrow d>a$, $d<a+2/n<a+\varepsilon=a+(b-a)=b \Rightarrow$
$a<d<b$
Benutze: $1<\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}<\sqrt{2}\,\sqrt{2}=2$

Andere Formulierung:
Zwischen 2 bel reellen Zahlen liegt immer eine rationale Zahl
Bew: Seien $a,b\in\mathbb{R}, a<b$. Nach obiger A1.5.25 $\exists\ q\in\mathbb{N}$: $1/q<b-a$.
Betrachte die rationalen Zahlen $r_j=[a]+j/q$, für $j\in\mathbb{N}_0=\{0\}\cup\mathbb{N}$. Die Ungleichung $r_j\le a$ gilt sicher für $j=0$, aber nicht für $j\ge q \Rightarrow$
$\exists$ maximales j_0 mit $r_{j_0}\le a \Rightarrow r_{j_0+1}>a$ aber $r_{j_0+1}<b$ nach Def von q.

$(a\ge r_{j_0+1}=\underbrace{r_{j_0}}_{\le a}+\underbrace{\frac{1}{q}}_{<b-a}<a+b-a=b)$

3.) Zwischen 2 bel rationalen Zahlen liegt immer eine irrationale Zahl

Bew: $a,b\in\mathbb{Q}, a<b$. Nach folgender A1.5.29 gibt es mindestens eine positive irrationale Zahl ε. Nach S Archimedes $\exists$ ein $n\in\mathbb{N}$: $n>\varepsilon/(b-a)$, also $\varepsilon/n<b-a$. Da $a+\varepsilon/n$ irrational sein muß(warum?), folgt die Beh.

Andere Formulierung:

Vorbetrachtung: $\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Annahme $\sqrt{2}=p/q$, $p,q\in\mathbb{N}$ teilerfremd, $p^2/q^2=2$, $p^2=2q^2 \Rightarrow$ 2 teilt p, d.h. $p=2p' \Rightarrow$ $4p'^2=2q^2 \Rightarrow 2p'^2=q^2 \Rightarrow$ 2 teilt q Widerspruch

Bew: oBdA $a\in\mathbb{Q}$, $r=a+\frac{\sqrt{2}}{n_0}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (n_0 wie oben), $a<r<b$ (wie oben)

Nachtrag zu Bew S1.5.17

$M=\{x\in\mathbb{Q}: x\geq 0, x^2\leq 2\}$. (Falsche) Annahme: $\exists$ sup M in $\mathbb{Q}$, so sagen wir $q:=\sup M$ (q rational $\neq\sqrt{2}$)

1.Fall $q>\sqrt{2} \Rightarrow \exists\, q'\in\mathbb{Q}: q>q'>\sqrt{2} \Rightarrow q'^2>2 \Rightarrow$
q' ist obere Schranke<sup M Widerspruch

2.Fall $q<\sqrt{2}$ analog... Widerspruch $\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig

#4.) $\rho,\varepsilon\in\mathbb{R}$, $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, r\in\mathbb{Q}$: $\rho-\varepsilon<r<\rho+\varepsilon$, d.h. r liegt zwischen $\rho-\varepsilon$ und $\rho+\varepsilon$.

//S1.5.4(705) Archimedisches Prinzip//
// $\forall\, a\in\mathbb{R}\ \exists\, n\in\mathbb{N}: a<n$ (d.h. $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben nicht beschränkt)//
*//**S1.5.5** (706)Wohlordnungss, Vor: $M\subset N$ und $M\neq\emptyset$, Beh: $\exists$ minM//*

Bew: $m\in\mathbb{N}$, wähle $1/m \underset{S1.5.4\ 1.)}{<} \varepsilon$: $\rho-\varepsilon<r<\rho+\varepsilon \Rightarrow \rho-1/m<r<\rho+1/m$
$\rho\geq 0$: $\exists\, n_> \underset{S1.5.4}{>} m\rho \underset{S1.5.5}{\Rightarrow} \forall\, n_>\ \exists\, k\leq n_> \Rightarrow k-1\leq m\rho<k$
$r:=k/m \Rightarrow r-1/m\leq\rho<r \Rightarrow r\leq\rho+1/m$ ' $\rho-1/m<r$
d.h. $r\in\mathbb{Q}$ liegt zwischen $\rho-\varepsilon$ und $\rho+\varepsilon$.
$\rho<0$: $-\rho>0 \Rightarrow \exists\, r$: $-\rho-\varepsilon<r<-\rho+\varepsilon \Rightarrow \rho+\varepsilon>-r>\rho-\varepsilon \Rightarrow$
$-r\in\mathbb{Q}$ liegt für $\rho<0$ zwischen $\rho-\varepsilon$ und $\rho+\varepsilon$

#5.) $\rho\in\mathbb{R}$, $\exists$ eine Folge $(r_n)\in\mathbb{Q}$, $r_n \nearrow$ oder $\searrow$: $\lim_{n\to\infty} r_n=\rho$

Bew: $\rho\in\mathbb{R} \underset{4.)}{\Rightarrow} \forall\, n\in\mathbb{N}\ \exists\, r_n$: $|r_n-\rho|<1/n \Rightarrow r_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \rho$

A1.5.28 Zeige: $\mathbb{Q}$ ist ein geordneter Körper.

A1.5.29 Zeige: Die Menge der rationalen Zahlen r mit $0<r^2\leq 2$ ist nicht leer, nach oben beschränkt und besitzt (in $\mathbb{Q}$) kein Supremum.
Schließe hieraus:
a) Der Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.
b) Es gibt mindestens eine positive irrationale Zahl.

A1.5.30 Zeige: Jedes offene Intervall in $\mathbb{R}$ enthält unendlich viele rationale, aber auch irrationale Zahlen.

S1.5.16(764) **(**Division mit Rest)
$\forall$ $p\in\mathbb{Z}$ und $n\in\mathbb{N}$ $\exists$ eindeutig bestimmte Zahlen $q\in\mathbb{Z}$ und $r\in\{0,...,n-1\}$ mit $p=nq+r$
Bew:Wenn die behauptete Gleichung gilt, folgt $p/n=q+r/n$ und $0\leq r/n<1$.
Also muß $q=p/n-r/n=[p/n]$ gelten, woraus die Eindeutigkeit von q und dann auch von r folgt. Umgekehrt sei $q=[p/n]$, also $p/n=q+\xi$ mit $0\leq\xi<1$.
Dann ist $p=nq+n\xi$ und $p=nq+r$ mit $r=n\xi=(p-nq)\in\mathbb{Z}$ und $0\leq r<n$ (da $n*\xi<n$), woraus die Existenz der q und r folgt.

Andere Formulierung, jedoch mit Einschränkung auf $\mathbb{N}$:
Sei $m\in\mathbb{N}$ fest. $\forall$ $n\in\mathbb{N}$ $\exists$ $q,r\in\mathbb{N}_0$ mit $n=qm+r$ & $0\leq r<m$ und q,r sind eindeutig bestimmt.
Bew:Induktion nach n
$N=\{n\in\mathbb{N}|n=qm+r, 0\leq r<m,\ q,r\in\mathbb{N}_0\}$ (n hier noch nicht alle $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$
$1\in N$, da: 1.Fall: $m=1:1=1*1+0$
2.Fall: $m>1:1=0*m+1$
$n\in N$, d.h $n=qm+r,\ 0\leq r<m$ $\Rightarrow$
$n+1=qm+r+1,\ 0\leq r+1\leq m$
1.Fall:$r+1<m$ $\Rightarrow$ Darstellung von n+1 in der gewünschten Art $\Rightarrow$ $n+1\in N$
2. Fall:$r+1=m$ $\Rightarrow$ $n+1=qm+m=(q+1)m$ $\Rightarrow$ $n\in N$ $\Rightarrow$ N induktiv $\Rightarrow$ $N=\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ Beh
Eindeutigkeit:
Annahme $n=qm+r=\bar{q}m+\bar{r}$, $0\leq r,\bar{r}$ $r,\bar{r}<m$ $\Rightarrow$ $(q-\bar{q})m=\bar{r}-r$ $\Rightarrow$ $\bar{r}\neq r$ $\Rightarrow$
Annahme $\bar{r}>r$ möglich $\Rightarrow$ $(q-\bar{q})m>0$ $\Rightarrow$ $q>\bar{q}$ $\Rightarrow$ $q\geq\bar{q}+1$ $\underset{m>r \text{ und } r\geq 0}{\Rightarrow}$
$n=qm+r\geq(\bar{q}+1)m+r=\bar{q}m+m+r>\bar{q}m+\bar{r}=n$ $\Rightarrow$ $n>n$ $\Rightarrow$ Widerspruch $\Rightarrow$ $\bar{r}=r$ und $\bar{q}=q$

S1.5.17(764) (g-Adische Zahlendarstellung)
Sei $g\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. Dann gibt es für alle $n\in\mathbb{N}$ eindeutig bestimmte Zahlen $p\in\mathbb{N}_0$ und $z_k\in\{0,1,...,g-1\}$ mit $0\leq k\leq p$, sodass $n=z_0+z_1g+...z_pg^p$, $z_p\neq 0$.
Bew:Die Beh ist richtig für $n\leq g-1$ (mit $p=0$ und $z_0=n$).
Ist $n\geq g$, so existieren nach S1.5.16 eindeutig bestimmte Zahlen $z_0\in\{0,1,...,g-1\}$ und $m\in\mathbb{Z}$ mit $n=mg+z_0$. Offenbar ist sogar $0<m<n$.
Eine Anwendung der Induktionshypothese auf die Zahl m ergibt dann die gewünschte Zerlegung für n.

Andere Formulierung:

Es sei $g\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ fest gegeben. Dann gilt für jede natürliche Zahl

n: $n=\sum_{\nu=0}^{p}\alpha_\nu g^\nu$ mit $p:=\max\{\nu\in\mathbb{N}_0 : g^\nu\le n\}$, $\alpha_\nu\in\{0,1,...,g-1\}$

Bew: Diese Darstellung ist eindeutig und folgt aus der Division

mit Rest: $n/g^p=\underbrace{\alpha_p}_{\in\{0,1,...,g-1\}}+r_p/g^p,\ 0\le r_p<g^p,\ r_p/g^{p-1}=\alpha_{p-1}+r_{p-1}/g^{p-1}$

usw. Für $x>0$, $x=\underbrace{[x]}_{\text{sieheoben}}+\underbrace{x-[x]}_{y\in[0,1)}$

A1.5.31 Finde die Dual- und die Hexadezimaldarstellunge(d.h. die g-adischen Darstellungen mit $g=2$ und $g=16$) der Zahlen $n=24$, $n=123$, $n=315$. Benutze dabei für $g=16$ die Bezeichnungen A,B,C,D,E,F für die Ziffern 10,11,12,13,14,15.

Lös: $g=2$,

$g^0=1, g^1=2,\ g^2=4,\ g^3=8,\ g^4=16,\ g^5=32,\ g^6=64,\ g^7=128,\ g^8=256$

$n=24$: $24:16=1R8,\ 8:8=1R0$

$=1*16+1*8+0*4+0*2+0*1 \Rightarrow 11000_2$.

$n=123$: $123:64=\underline{1}R59:32=\underline{1}R27:16=\underline{1}R11:8=\underline{1}R3:2=\underline{1}R\underline{1}$

$=1*64+1*32+1*16+1*8+0*4+1*2+1*2^0 \Rightarrow 1111011_2$.

$n=315$: $315:2=157R1 \Rightarrow z_0=1$ $\quad 9:2=4R1 \Rightarrow z_5=1$

$157:2=78R1 \Rightarrow z_1=1$ $\quad 4:2=2R0 \Rightarrow z_6=0$

$78=2=39R0 \Rightarrow z_2=0$ $\quad 2:2=1R0 \Rightarrow z_7=0$

$39:2=19R1 \Rightarrow z_3=1$ $\quad 1<2 \Rightarrow z_8=1$

$19:2=9R1 \Rightarrow z_4=1$

$=100111011_2$.

$g=16$,

$n=24$: $24:16=1R8 \Rightarrow 18_{16}$.

$n=315$: $315:16=19R\underline{11} \Rightarrow z_0=B$

$19:16=\underline{1}R\underline{3}\Rightarrow\ z_1=3$

$=13B_{16}$.

*Andere Formulierung:

$g=2\ \ z_{k_2}\in\{0,1\}$, $p\in\mathbb{N}_0$, $z_{k_{16}}\in\{0,1,...9A,B,...,E,F\}$,

$n=z_0+z_1g+...z_pg^p$

$24=2^? \Rightarrow 2^4+\underbrace{\Delta}_{8=2^3}=0+0*2^1+0*2^2+1*2^3+1*2^4=11000$ (binär)

$=16^? \Rightarrow 16^1+8=8+1*16=18$ (hex)

$123=2^? \Rightarrow \underbrace{64}_{2^6}+\overbrace{\underbrace{32}_{2^5}+\underbrace{27}_{\underbrace{16}_{2^4}+\underbrace{11}_{\underbrace{8}_{2^3}+\underbrace{3}_{\underbrace{2}_{2^1}+\underbrace{1}_{2^0}}}}}^{59}=1+1*2^1+1*2^3+1*2^4+1*2^5+1*2^6=111111$ (bin)

$123=16^? \Rightarrow \underset{112+11}{\underline{7*16}}=B+7*16=1B$ (hex)

A1.5.32 Es seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a<b$ und $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ injektiv. Zeige, daß $f((a,b])$ überabzählbar ist.

A1.5.33 Untersuche, welche der oben eingeführten Intervalle nach oben (unten) beschränkt sind

A1.5.34 Bestimme,falls existent, sup(inf), max(min) der oben eingeführten Intervalle.

D1.5.5(766) Seien $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$

$[a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x\leq b\}$ abgeschlossenes Intervall

$[a,b):=\{x\in\mathbb{R}: a\leq x<b\}$ halboffenes Intervall

$(a,b]:=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ halboffenes Intervall

$(a,b):=\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ offenes Intervall

$(-\infty,b]:=\{x\in\mathbb{R}: x\leq b\}$, $(-\infty,b):=\{x\in\mathbb{R}: x<b\}$,

$[a,\infty]:=\{x\in\mathbb{R}: x\geq a\}$, $(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}: x>a\}$, $(-\infty,\infty)$ sind unbeschränkte Intervalle

S1.5.18(766) Intervallschachtelungsprozess

Vor:Seien $I_n=[a_n,b_n]$, $a_n\leq b_n$ mit $I_{n+1}\subset I_n$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$

Beh:$\exists$ mindestens ein $x\in\mathbb{R}$: $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, d.h. $a_n\leq x\leq b_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

Bem:1.)$a_{n+1}\geq a_n$, $b_{n+1}\leq b_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}$, $a_m\leq a_n$, $\forall\ m\geq n$, $b_m\leq b_n$, $\forall\ m\geq n$

2.)Aussage entspricht Axiom Vollständigkeit

*//**D1.3.2** (504) $(\mathbb{K},+,\cdot,<)$ heißt vollständig (bezüglich $<$): $\Leftrightarrow\ \forall\ T\subset\mathbb{K}$, $T\neq\emptyset$ // und T nach oben beschränkt $\exists\ \sup T\in\mathbb{K}$. Ein angeordneter, vollständiger// //(bzgl Anordnung) Körper heißt Körper der rellen Zahlen $\mathbb{R}$//*

Bew:$I_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]\subset I_n=[a_n,b_n]\ \forall\ n\in\mathbb{N}$

$a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_m\ldots\leq a_n\leq b_m\leq\ldots b_2\leq b_1$,$n>m\Rightarrow a_n\leq b_m\ \forall n,m\in\mathbb{N}$

$T:=\{a_n|n\in\mathbb{N}\}\subset\mathbb{R}, T\neq\emptyset$ (alle linken Endpunkte zu T zusammengefaßt)

Jedes b_m ,$m\in\mathbb{N}$ ist obere Schranke von T

D1.3.28 $\Rightarrow\ \exists\ x:\sup T\in\mathbb{R}\Rightarrow a_n\leq x\ \forall\ n\in\mathbb{N}$.

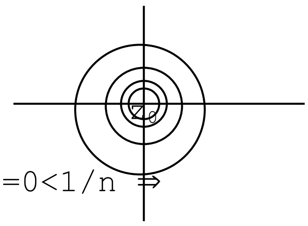
x ist kleinste obere Schranke von T $\Rightarrow x\leq b_m\ \forall\ m\in\mathbb{N}\Rightarrow x\in I_n\ \forall\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow$

$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Nach D1.6.1, S1.6.1 lesen

Bsp:$K_n=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|<1/n\}$,

z.z $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n=\{z_0\}$



Bew:"$K\supset\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$" $z_0\in K$, da $z_0\in K_n$, $|z-z_0|=0<1/n\Rightarrow$

$z_0\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

„$K\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$" Annahme $z_1\in K$, $z_1\neq z_0\Rightarrow|z_1-z_0|=\delta>0$. Wähle $\tilde{n}\in\mathbb{N}$, $\tilde{n}>1/\delta\Rightarrow$

$K_{\tilde{n}}=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\underbrace{|z-z_0|}_{=\delta\text{ für }z=z_1!}<1/\tilde{n}<\delta\}\ \Rightarrow z_1\notin K_{\tilde{n}}\ \Rightarrow z_1\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$

A1.5.35

a) $A \subset B$, $\exists$ min A und min B $\Rightarrow$ min A$\geq$min B

Bew: Bspskizze: [[ )] a=min A: $a \in A$ & $A \subset B \Rightarrow a \in B \Rightarrow a \geq \min B$

b) $A \subset B$, $\exists$ inf A & inf B $\Rightarrow$ inf A$\geq$inf B

Bew: a:=inf A, B:=inf B $\Rightarrow b \leq x \ \forall x \in B$ $b \leqslant x \forall x \in B \underset{A \subset B}{\Rightarrow} b \leqslant x \forall x \in A \Rightarrow$

b untere Schranke von A $\Rightarrow$ $b \leq a$

c) $\exists$ max A und max B $\Rightarrow$ $\exists$ max ($A \cup B$) & max $\Rightarrow$ max($A \cup B$)= max{max A, max B}

Bew: Sei $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \leq \max A \wedge x \leq \max B \Rightarrow$

$x \leq \max\{\max A, \max B\} \ \forall x \in A \cup B$, da $\max\{\max A, \max B\} \in A \cup B$

ist $\max\{\max A, \max B\} = \max(A \cup B)$

A1.5.36 Max, Min, Sup, Inf?

a) $A = \bigcup_{n \in N} [0, \frac{1}{n}]$

Lös: $\frac{1}{m} \underset{m>n}{\lneq} \frac{1}{n} \Rightarrow [0, \frac{1}{m}] \subset [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow [0, \frac{1}{n}] \subset [0, \frac{1}{1}] = [0,1] \ \forall n \Rightarrow A = [0,1]$

0$\in A$ & $\forall x \in A$: $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \min A = 0$

$0 \leq x \ \forall x \in A \Rightarrow \inf A = 0$

1$\in A$ & $\forall x \in A$: $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \ x \leq 1 \Rightarrow \max A = 1$

$x \leq 1 \ \forall x \in A \Rightarrow \sup A = 1$

b) $B = \bigcap_{n \in N} [0, \frac{1}{n}]$

Lös: $0 \in [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow 0 \in B \ \forall n$

- $x<0$: $x \notin [0, \frac{1}{1}] \Rightarrow x \notin B$

•• $x>0$: $\underset{N\,unbeschränkt}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbf{N}$: $n > x^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{n} \Rightarrow \exists n \in \mathbf{N}$: $x \notin [0, \frac{1}{n}] \Rightarrow x \notin B$

• & •• $\Rightarrow B=\{0\}$, da $x>0$ oder $x<0$ oder $x=0$ in $\mathbf{R}$ $\Rightarrow$

min B=inf B=max b=sup B

c) $C = \bigcap_{n \in N} (0, \frac{1}{n})$

Lös: $(0, \frac{1}{n}) \subseteq [0, \frac{1}{n}] \ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow C \subset B = \{0\}$

$0 \notin (0, \frac{1}{n}) \Rightarrow 0 \notin C \Rightarrow C = \emptyset \Rightarrow$

$\forall x \in \mathbf{R}$: x ist obere Schranke von C, x-1 ist ebenfalls obere Schranke von C

$\Rightarrow \nexists \bar{s}: \bar{s}$ kleinste obere Schranke von C $\Rightarrow$

kein sup, analog kein inf $\Rightarrow$ kein max, kein min

d) $D = \bigcap_{n \in N} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

//**S1.5.18**(763) Intervallschachtelungsprozess
// Vor:Seien $I_n=[a_n,b_n]$, $a_n \le b_n$ mit $I_{n+1} \subset I_n$, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

// Beh:$\exists$ mindestens ein $x \in \mathbb{R}$: $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, d.h. $a_n \le x \le b_n$ $\forall$ $n \in \mathbb{N}$

Lös: D ist Intervallschachtelung $\underbrace{\Rightarrow}_{S1.5.18}$ $|D|=1$ $\underbrace{\Rightarrow}_{B}$ $D=\{0\}$ $\Rightarrow$
supD=inf D=max D=min D=0