1.6(800) **Die komplexen Zahlen**

Es soll ein $\mathbb{R}$ umfassender Körper konstruiert werden, in dem die Gleichung $x^2+1=0$ lösbar ist.

//D0.1.2 (3) $M_1=M_2 :\Leftrightarrow x\in M_1 \Leftrightarrow x\in M_2$//

D1.6.1(800)

Die Menge $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}$ mit Verknüpfungen

$+:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2:(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\mapsto(x_1+x_2)+(y_1+y_2)$

$\ast:(\mathbb{R}\times\mathbb{R})\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}\times\mathbb{R},\ \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2 \ :(x_1,y_1)\ast(x_2,y_2)\mapsto(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$

heißt Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}=\{z\,|\,z=(x,y) \text{ mit } x,y\in\mathbb{R}\}$

Beachte $z_1=(x_1,y_1)=(x_2,y_2)=z_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$ und $y_1=y_2$ siehe D0.1.2 oder

Die Menge aller Punkte $z=(x,y)^T\in\mathbb{R}$, zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1x_2-y_1y_2\\x_1y_2+x_2y_1\end{pmatrix}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, oder die komplexe Zahlenebene.

S1.6.1(800)

1.) $(\mathbb{C},+,\ast)$ ist ein Körper
   Bew:siehe A1.1.7 (306)
   Mit diesen Verknüpfungen ist $\mathbb{C}$ ein Körper, d.h. es gelten die gleichen Regeln bzgl + und $\ast$ wie in $\mathbb{R}$ und die Addition komplexer Zahlen entspricht genau der Vektoraddition in $\mathbb{R}^2$.
   Wir identifizieren $x\leftrightarrow(x,0)^T$ für alle $x\in\mathbb{R}$, damit ist $\mathbb{R}$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Die Zahl 1 entspricht also dem ersten Einheitsvektor
   $(1,0)^T=i \Rightarrow i^2=-1$ und $z=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x+iy\ \forall\ z\in\mathbb{C}$.

2.) $\mathbb{C}_\mathbb{R}:=\{(x,0)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$, der zu $\mathbb{R}$ isomorph ist.
   $\varphi: \mathbb{R}\to\mathbb{C}_\mathbb{R}$ definiert durch $x\mapsto(x,0)$ ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}_\mathbb{R}$,(d.h.φ ist bijektiv mit
   $\varphi(x_1+x_2)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2),\ \varphi(x_1\ast x_2)=\varphi(x_1)\ast\varphi(x_2)\ \ \forall\ x_1,x_2\in\mathbb{R})$
   Bew:$\varphi(x_1+x_2)=(x_1+x_2,0)=(x_1,0)+(x_2,0)=\varphi(x_1)+\varphi(x_2)$
   $\varphi(x_1\ast x_2)=(x_1x_2,0)=(x_1,0)\ast(x_2,0)=\varphi(x_1)\ast\varphi(x_2)$

3.) Für imaginäre Einheit $i:=(0,1)$ gilt
   $i^2=i\ast i=(0,1)*(0,1)=(0*0-1*1,0*1+1*0)=(-1,0)=-1\in\mathbb{R}$

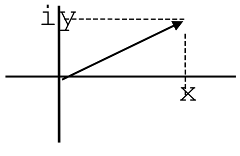
4.) $z=(0,1)$ erfüllt $z^2=(-1,0)$

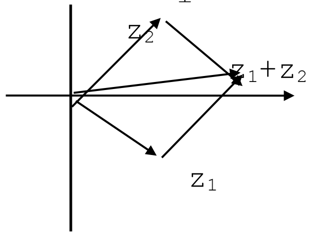
5.) $\mathbb{C}$ kann nicht angeordnet werden, da $i^2=-1<0$, Widerspruch zu ^{2} muß >0 sein

Kartesische Schreibweise der komplexen Zahlen

$z\in\mathbb{C},\ z=(x,y)=(x,0)+(0,y)=\underbrace{(x,0)}_{\in\mathbb{C}_\mathbb{R}}\underbrace{(1,0)}_{\in\mathbb{C}_\mathbb{R}}+\underbrace{(y,0)}_{\in\mathbb{C}_\mathbb{R}}\underbrace{(0,1)}_{=i}$

$z=(x,y)=(x,0)\ast1+(y,0)i$
$=x\ast1+yi=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$





Bezeichnungen: Sei $z=x+iy$ $x,y\in\mathbb{R}$ $i^2=-1$

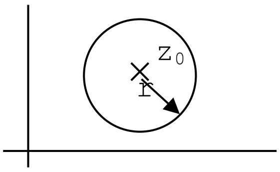
1.) $x:=\operatorname{Re} z$ Realteil von z

2.) $y:=\operatorname{Im} z$ Imaginärteil von z

3.) $\overline{z}:=x-iy$ die zu z konjungierte komplexe Zahl

4.) $|z|:=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$ Betrag von z=Abstand von z zum 0 Punkt

5.) $U_r(z_0):=\{z\in\mathbb{C}:|z-z_0|<r\}$ ist eine Kreisscheibe um $z_0\in\mathbb{C}$ mit Radius $r(>0)$



Für $z=x+iy\in\mathbb{C}$ gilt immer ($|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$)

$$\max\{|x|,|y|\}\leq|z|=\sqrt{x^2+y^2}\leq\sqrt{2\max\{x^2,y^2\}}\leq\sqrt{2\max\{|x|,|y|\}^2}\leq$$

$$\sqrt{2}\max\{|x|,|y|\}\leq\sqrt{2}\,(\underbrace{|x|+|y|}_{\geq\max\{|x|,|y|\}})$$

Bew: $|z|^2=x^2+y^2\geq x^2$, also $|z|\geq|x|$ und $|z|\geq|y|$. Daraus folgt die linke Ungleichung. Wegen $(\max\{|x|,|y|\})^2=\max\{x^2,y^2\}$ gelten auch die anderen Ungleichungen.

Beachte, dass die obige Definition des Betrags einer komplexen Zahl im Falle y=0 (also $z\in\mathbb{R}$) mit der früheren Definition des Betrags der reellen Zahl übereinstimmt.
Die komplexen Zahlen werden als Punkte der Ebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert.
Gaußsche Zahlenebene.
$\mathbb{C}$ läßt sich nicht anordnen, sonst wäre $\forall\, z\neq 0,\ z^2>0$, obwohl $i^2=-1$ Widerspruch!
Da sich $\mathbb{C}$ nicht anordnen lässt, ist es sinnlos, Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen zu betrachten. Allerdings kann man Ungleichungen untersuchen, in denen nur Beträge komplexer Zahlen auftreten. Z.B. gelten die Dreiecksungleichungen auch für Beträge komplexer Zahlen.

(801) Eigenschaften der komplexen Zahlen

Für $z,z_1,z_2\in\mathbb{C}$ gilt

1.) $\operatorname{Re} z=1/2(z+\overline{z})$ $\quad\operatorname{Im} z=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=\frac{i}{2}(\overline{z}-z)$ da $i^2=-1$, $1/i=-i$

$$\left.\begin{matrix} z=x+iy\\ \overline{z}=x-iy\end{matrix}\right\}\ z+\overline{z}=2x,\ z-\overline{z}=2iy\ \left(y=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})=-\frac{i}{2}(z-\overline{z})\right)$$

2.) $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\overline{z}$

3.) $\overline{\overline{z}}=z$, $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$, $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ mit $z_2\neq 0$,

$\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1+iy_1)*(x_2+iy_2)}=\overline{x_1x_2-y_1y_2+i(x_1y_2+y_1x_2)}=$
$x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+y_1x_2)=(x_1-iy_1)*(x_2-iy_2)=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

Nach 5.) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\underset{S1.6.1}{=}\overline{\left(z_1\frac{1}{z_2}\right)}=\overline{z_1}\,\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}\underset{5.)}{=}\overline{z_1}\frac{1}{\overline{z_2}}\underset{S1.6.1}{=}\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=$
$(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

$\overline{z_1 - z_2} = \overline{(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)} = (x_1-x_2)-i(y_1-y_2) =$
$(x_1-iy_1)-(x_2-iy_2) = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

4.) $z=x+iy$, $|x|=|\mathrm{Re}\ z|=\sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$, $|y|=|\mathrm{Im}\ z|=\sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} = |z|$

5.) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{x+iy}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{1}{x-iy} = \frac{1}{\overline{z}}$

S1.6.2(802)
Vor. Sei $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dann

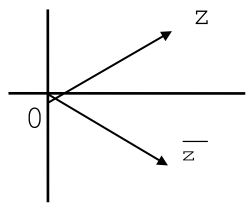
1.) $|z|=\sqrt{z\cdot\overline{z}}$ $\quad |z|=|-z|\ge 0\ \ \forall\ z\in\mathbb{C}$ und $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$, $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{z\overline{z}}$
   Bew: $z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+ixy-ixy-i^2y^2=x^2+y^2=|z|^2$,
   $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$.. $|z|=0 \Leftrightarrow |z|^2=0 \Leftrightarrow x=y=0$

2.) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ falls $z_2\ne 0$
   Bew: $|z_1z_2|^2=(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=(z_1z_2)(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2})=(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})=|z_1|^2|z_2|^2$
   $|z_1|=\left|\frac{z_1}{z_2}z_2\right|=\left|\frac{z_1}{z_2}\right||z_2| \Leftrightarrow \frac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$

3.) Δ Ungleichung
   $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$, $|z_1|-|z_2|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$,
   $|z_1\pm z_2|\ge||z_1|-|z_2||\ge|z_1|-|z_2|$
   „=„ gilt $\Leftrightarrow$ $z_2=\lambda z_1$ oder $z_1=\lambda z_2$ $\lambda\ge 0$

//(801)*1.)Re z=1/2(z+$\overline{z}$) (801)//*
   Bew:siehe auch A1.6.5
   $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=|z_1|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1\overline{z_2}}+|z_2|^2$
   $\underset{Eig\ 1.)}{\Rightarrow}$ $|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\le|z_1|^2+2|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})|+|z_2|^2 \underset{Eig\ 4.)}{\le}$
   $|z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2 \underset{2.)}{=} |z_1|^2+2\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}+|z_2|^2=$
   $|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2 \Rightarrow |z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

   $|z_1|=|z_1+z_2-z_2|\le|z_1+z_2|+|-z_2| \Rightarrow$
   $|z_1+z_2|\ge|z_1|-|z_2|$



Bem:1.) $\mathrm{Re}\ z\le|\mathrm{Re}\ z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|$,
   $\mathrm{Im}\ z\le|\mathrm{Im}\ z|\le|z|\le|\mathrm{Re}\ z|+|\mathrm{Im}\ z|$,

2.) $z=x+iy \Rightarrow \left.\begin{matrix} x\le|x| \\ y\le|y|\end{matrix}\right\}\le|z|\le|x|+|y|$ *da $(x^2+y^2)\le(|x|+|y|)^2$

3.) $z=x+iy\ne 0$, $1/z=z^{-1}=\frac{\overline{z}}{z\overline{z}}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$

4.) der Betrag für $z\in\mathbb{R}$ stimmt mit dem reellen Betrag
   überein

A1.6.1 Z.z.: In $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ gilt das „=" wenn $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})>0$ und $\mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0$

Bew: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=$

$$|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \underset{*}{\leq} |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1\overline{z_2}|=||z_1|+|z_2||^2$$

$$*\text{"}\Rightarrow\text{"}\ |z_1\overline{z_2}|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z_1\overline{z_2})+\underbrace{\mathrm{Im}^2(z_1\overline{z_2})}_{=0}}=|\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})|=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$$

$$*\text{"}\Leftarrow\text{"}\ \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=|z_1\overline{z_2}|=\sqrt{\mathrm{Re}^2(z_1\overline{z_2})+\underbrace{\mathrm{Im}^2(z_1\overline{z_2})}_{=0\Rightarrow \mathrm{Im}(z_1\overline{z_2})=0}}$$

D1.6.2(803)
Für $z\in\mathbb{C}$: $z^0:=1$, $z^1:=z$, $z^{n+1}:=z*z^n$, $z^{-n}:=(1/z)^n$ $(n\in\mathbb{N}, z\neq0)$

S1.6.3(803)
Für $z\in\mathbb{K}$ (Körper) und $n\in\mathbb{Z}$ sei für $-n\in\mathbb{N}$ $nz:=(-n)(-z)$und, falls $z\neq0$, $z^n:=(z^{-1})^{-n}=(1/z)^{-n}$ $\forall$ $n,m\in\mathbb{Z}$ und $z\in\mathbb{K}$ gilt
$nz+mz=(n+m)z$, $m(nz)=(mn)z$, $nz+nw=n(z+w)$, $(z,w\neq0$, falls $n,m<0)$

(.) $z^nz^m=z^{n+m}$

Bew: $\alpha)$ $n,m\geq0$:

Induktion nach n. $A(_n)$: $z^n*z^m=z^{n+m}$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$ für $n\in\mathbb{N}_0$ und auf Grund der rekursiven Def

$\beta)$ $n\geq0, m\leq0$

$z^{n-1}*z^1=z^n \underset{z\neq0}{\Rightarrow} z^{n-1}=z^n*z^{-1}$

$z\neq0$…Induktion nach n. $z^n*z^m=z^{n+m}$ $\forall$ $m\in(-\mathbb{N}_0)$ für $n\in\mathbb{N}_0$

n=0: $z^0*z^m=1*z^m=z^m=z^{0+m}$

$n\mapsto n+1$: $z^{n+1}*z^m \underset{\text{Def }\alpha}{=} z^nz(1/z)^{-m}=z^n(1/z)^{-1}(1/z)^{-m}$

(da $-m\in\mathbb{N}$) $=z^n(1/z)^{-m-1}=z^nz^{m+1} \underset{\text{IndHyp}}{=} z^{n+m+1}$ $\forall$ $m\in\mathbb{N}_0$.

$\gamma)$ $z\neq0$, $n,m\leq0$

$z^nz^m \underset{\text{Def}}{=} (1/z)^{-n}(1/z)^{-m} \underset{\alpha}{=} (1/z)^{-n-m}=z^{n+m}$

(..) $(z^n)^m=z^{mn}$

Bew: $A(_n)$: $(z^n)^m=z^{n*m}$ $\forall$ $n\in\mathbb{Z}$ für $m\in\mathbb{N}_0$

m=0: 1=1

$m\mapsto m+1$: $(z^n)^{m+1}=(z^n)^m(z^n)^1 \underset{\text{IndHyp}}{=} z^{mn}z^n=z^{n(m+1)}$

m<0: $(z^n)^{-1}=z^{-n}$ weil nach (.) $z^nz^{-n}=z^0=1$

(...) $(zw)^n=z^nw^n$, $z,w\neq0$ für $n,m<0$

Bew: analog

A1.6.2 Berechne Betrag, Real- und Imaginärteil folgender komplexer Zahlen (für ein $z=x+iy\in\mathbb{C}$, für welches der Nenner verschwindet)

z^2, $1/z$, $\dfrac{1+z}{1-z}$

A1.6.3 Zeige: Für $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ kann es keine Teilmenge $\mathbb{K}_+$ geben, welche die Axiome (O1)-(o3) erfüllt, d.h. $\mathbb{C}$ kann nicht zu einem geordneten Körper gemacht werden.

A1.6.4 Zeige:Ist $z\in\mathbb{C}$, und $|z|=0$, so folgt $z=0$ (also Re z=Im z=0)

A1.6.5 Zeige für $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R}$:

a) $(x_1x_2+y_1y_2)^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2\le(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

Lös: $(x_1x_2+y_1y_2)^2=x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2$,

$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)-(x_1y_2-x_2y_1)^2=$
$x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2y_2^2-2x_1y_2x_2y_1+x_2^2y_1^2)=$

$x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2+2x_1y_2x_2y_1=(x_1x_2+y_1y_2)^2 \underset{(x_1y_2-x_2y_1)^2\ge 0}{\le} (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$

b) Benutze a) um zu zeigen, daß $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|\ \forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}$
Anleitung: Quadriere beide Seiten

Lös: $|z_1+z_2|^2=|x_1+iy_1+x_2+iy_2|^2=|x_1+x_2+i(y_1+y_2)|^2=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2=$
$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2=x_1^2+y_1^2+2(x_1x_2+y_1y_2)+x_2^2+y_2^2$

$(|z_1|+|z_2|)^2=|z_1|^2+2\underbrace{|z_1||z_2|}_{\ge 0}+|z_2|^2=x_1^2+y_1^2+2\underbrace{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}_{\ge 0}\underbrace{\sqrt{x_2^2+y_2^2}}_{\ge 0}+x_2^2+y_2^2.$

Bleibt z.z. $x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$.

Annahme $x_1x_2+y_1y_2>\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}\ge 0 \Leftrightarrow$

$(x_1x_2+y_1y_2)^2>(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)$ Widerspruch zu a) $\Rightarrow$ richtig

A1.6.6 Zeige für $z\in\mathbb{C}$ und $c\in\mathbb{R}$ gilt:

a) $\operatorname{Re} iz=-\operatorname{Im} z$

b) $\overline{(z^{-1})}=(\overline{z})^{-1}$, $\overline{(cz^{-1})}=c(\overline{z})^{-1}$

A1.6.7

a) Zeige: Für reelle Zahlen a,b,c mit $a\neq 0$ und $z\in\mathbb{C}$ gilt:

$$az^2+bz+c=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, & \text{falls } 4ac\le b^2 \\ \dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}, & \text{falls } 4ac> b^2 \end{cases},$$

Anleitung: Zeige zunächst $az^2+bz+c=a(z+b/2a)^2+c-b^2/4a$.

Bew: $0=az^2+bz+c=a(z^2+\frac{b}{a}z+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2})+c=a(z+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c \Leftrightarrow a(z+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a}-c \Leftrightarrow$

$(z+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

1.Fall: $b^2-4ac\ge 0 \Rightarrow \frac{b^2-4ac}{4a^2}\ge 0 \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \Leftrightarrow$

$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2.Fall: $b^2-4ac<0 \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\pm i\sqrt{\frac{4ac-b^2}{4a^2}} \Leftrightarrow z+\frac{b}{2a}=\frac{\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{\pm 2a} \Rightarrow$

$z=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$

b) Zeige: Für $z,\xi \in \mathbb{C}$ mit $z=x+iy$, $(x,y\in\mathbb{R})$ gilt:

$$z=\xi^2 \Leftrightarrow \xi=\pm\left(\sqrt{\frac{x+|z|}{2}}+i(\operatorname{sgn} y)\sqrt{\frac{-x+|z|}{2}}\right)$$

Lös: "$\Rightarrow$"

$\xi:=s+it$ mit $s,t\in\mathbb{R}$, $z=\xi^2 \Leftrightarrow z=x+iy=(s+it)^2=s^2+2ist-t^2 \Leftrightarrow x=s^2-t^2$ und $y=2st$

1. Fall: $y=0 \Leftrightarrow x=s^2-t^2$ und $(s=0$ oder $t=0) \Rightarrow x=s^2$ oder $x=-t^2 \Leftrightarrow$

$(x\geq 0$ und $s:=\pm\sqrt{x})$ oder $(x\leq 0$ und $t:=\pm\sqrt{-x}) \Leftrightarrow$

$(x\geq 0$ und $\xi=\pm\sqrt{x})$ oder $(x\leq 0$ und $\xi=\pm i\sqrt{-x})$

2. Fall: $y\neq 0 \Leftrightarrow x=s^2-t^2$ und $t=\left(\frac{2s}{y}\right)^{-1} \Rightarrow x=s^2-\frac{y^2}{4s^2}$ und $t=\frac{y}{2s}$

$\Leftrightarrow 4s^4-4s^2x-y^2=0$ und $t=\frac{y}{2s} \underset{u=s^2}{\Leftrightarrow} 4u^2-4uy-y^2=0$ und $t=\frac{y}{2s} \Leftrightarrow$

$u=\frac{4x\pm\sqrt{16x^2+16y^2}}{2\cdot 4}=\frac{4x\pm 4|z|}{2\cdot 4}$

(- kann nicht benutzt werden, da $|z|\geq|x|\geq x$ und $s=\sqrt{u}\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$

$s^2=u=\frac{x+|z|}{2}$ und $t=\frac{y}{2s} \Leftrightarrow s=\pm\sqrt{\frac{x+|z|^2}{2}}$ und $t=\frac{y}{2\left(\pm\sqrt{\frac{x+|z|^2}{2}}\right)} \Leftrightarrow$

$s=\pm\sqrt{\frac{x+|z|}{2}}$ und $t=\pm\frac{y\sqrt{(-x+|z|)/2}}{\pm\sqrt{\underbrace{-x^2+|z|^2}_{=y^2}}}=\pm\frac{y\sqrt{(-x+|z|)/2}}{\pm\underbrace{\sqrt{y^2}}_{|y|}}=$

$\pm(\operatorname{sign} y)\sqrt{(-x+|z|)/2} \Leftrightarrow \xi=\pm\sqrt{\frac{x+|z|}{2}}\pm i(\operatorname{sign} y)\sqrt{\frac{-x+|z|}{2}}$

"$\Leftarrow$" ausquadrieren, nachrechnen

c) Berechne alle $z\in\mathbb{C}$, für die gilt $z^3=1$. Anleitung: $z^3-1=(z-1)(...)$

Lös: $z^3-1=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2-z+1)=0 \Leftrightarrow z=1$ oder $z^2+z+1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow$

$z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ oder $z=1$ oder $z=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

A1.6.8 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ dar und berechne deren Beträge:

a) i^n $(n\in\mathbb{Z})$

Lös: Beh: $i^n=\begin{cases} 1 \text{ falls } n=4k \\ i, \text{ falls } n=4k+1 \\ -1, \text{ falls } n=4k+2 \\ -i, \text{ falls } n=4k+3 \end{cases}$ mit $k\in\mathbb{Z}$, und $\begin{pmatrix} 1=1+0i \\ i=0+1i \\ -1=-1+0i \\ -i=0+(-1)i \end{pmatrix}$

$i^{4k}=(i^4)^k=1^k=1$, da $i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$, $i^{4k+1}=i\cdot i^{4k}=i\cdot 1=i$,

$i^{4k+2}=i^2\cdot i^{4k}=(-1)\cdot 1=-1$, $i^{4k+3}=i^3\cdot i^{4k}=i^3\cdot 1=(-1)i=-i$

Betrag: $|i^n|=1$, da $|1|=1$, $|i|=1$, $|-1|=1$ oder man benutzt

$|z^n|=|z|^n\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$, (Bew: $n\geq 0$: Induktion nach n,

$n<0: |1/z^{-n}|=|(1/z)^{-n}|=|1/z|^{-n}=|z|^n$)

b) $(1+i)^4$

Lös: $=[(1+i)^2]^2=[(1+2i+i^2]^2=(2i)^2=2^2i^2=-4=-4+0i$,

$|(1+i)^4|=|-4|=4$

c) $\frac{1}{(3-i)^2}$

Lös: $=\frac{1}{9-6i+i^2}=\frac{1}{8-6i}\frac{8+6i}{8+6i}=\frac{8+6i}{8^2-(6i)^2}=\frac{8+6i}{100}=2/25+\frac{3}{50}i$

$\left|\frac{1}{(3-i)^2}\right|=\left|\frac{1}{8-6i}\right|=\frac{1}{|8-6i|}=1/10$

d) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Lös: $=\frac{(1+i)^5(1+i)^3}{(1-i)^3(1+i)^3}=\frac{(1+i)^8}{2^3}=1/8[(1+i)^4]^2=1/8(-4)^2=2=2+0i$

$\left|\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}\right|=|2|=2$

A1.6.9 Zeige:

a) Für beliebige Zahlen $z,w\in \mathbb{C}$ gilt: $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$

Bew: $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\underbrace{\overline{z_1\overline{z_2}}}_{=\overline{z_1}z_2}+z_2\overline{z_2}$

$=|z_1|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})+|z_2|^2\quad\forall\ z_1,z_2\in\mathbb{C}\ \Rightarrow$

$|z+w|^2+\underbrace{|z-w|^2}_{=|z+(-w)|^2}=(|z|^2+2\mathrm{Re}(z\overline{w})+|w|^2)+(|z|^2+2\underbrace{\mathrm{Re}(z\overline{(-w)})}_{=-\mathrm{Re}(z\overline{w})}+\underbrace{|-w|^2}_{=|w|^2})=2|z|^2+2|w|^2=$

$2(|z|^2+|w|^2)\quad\forall\ z,w\in\mathbb{C}$

Andere Formulierung:

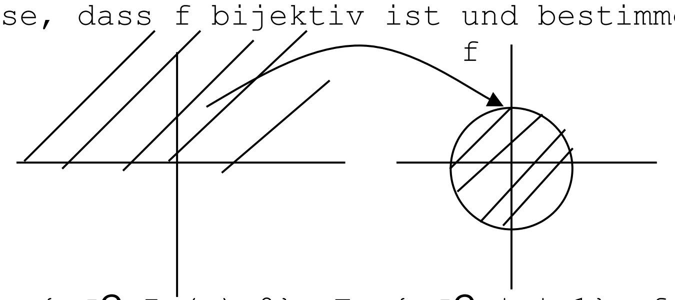
Bew: $(z+w)(\overline{z+w})+(z-w)(\overline{z-w})=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=$

$z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{z}-w\overline{z}-z\overline{w}+w\overline{w}=2|z|^2+2|w|^2.$

A1.6.10

Gegeben sei die Funktion $f:\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}\to\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$

Beweise, dass f bijektiv ist und bestimme die Umkehrfunktion.



Lös: $H:=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>0\}$, $E:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, $f:H\to E$, $f(z)=\frac{z-i}{z+i}$

Nebenrechnung $w=\frac{z-i}{z+i}=\frac{z+i-2i}{z+i}=1-\frac{2i}{z+i} \Leftrightarrow \frac{2i}{z+i}=1-w \Leftrightarrow$
$\frac{z+i}{2i}=\frac{1}{1-w} \Leftrightarrow z=\frac{2i}{1-w}-i=\frac{2i-i(1-w)}{1-w}=\frac{i+iw}{1-w}$

Definiere $g:E\to H$, $g(w)=\frac{i+iw}{1-w}=i\frac{1+w}{1-w}$.

Dann gilt:

(.) $f(H)\subset E$:

Es sei $z=(x+iy)\in H$, d.h. $x\in\mathbb{R}$, $y>0 \Rightarrow$

$$|f(z)|^2=\left|\frac{z-i}{z+i}\right|^2=\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2}=\frac{x^2+y^2+1-2y}{x^2+y^2+1+2y}\underbrace{<}_{y>0}1$$

d.h. $f(z)\in E$

(..) $g(E)\subset H$:

Es sei $|w|<1$. Z.z $\mathrm{Im}(g(w))>0$. Es gilt:

$$\mathrm{Im}(g(w))=\mathrm{Im}\left(i\frac{1+w}{1-w}\right)=\mathrm{Im}\left(i\frac{1+w}{1-w}\,\frac{1-\bar{w}}{1-\bar{w}}\right)\underbrace{=}_{*}\mathrm{Im}\left(i\frac{1-w\bar{w}+w-\bar{w}}{|1-w|^2}\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(i\frac{1-|w|^2+2i\,\mathrm{Im}(w)}{|1-w|^2}\right)=\frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}\underbrace{>}_{|w|<1}0$$

* $w=u+iv$; $(1-w)(1-\bar{w})=(1-u-iv)(1-u+iv)=(1-u)^2+v^2=|1-u-iv|^2=|1-w|^2$

(...) f surjektiv, da $\forall\ w\in E$:

$$f(g(w))\ \frac{i\frac{1+w}{1-w}-i}{i\frac{1+w}{1-w}+i}=\frac{\frac{1+w}{1-w}-1}{\frac{1+w}{1-w}+1}=\frac{\frac{1+w-1+w}{1-w}}{\frac{1+w+1-w}{1-w}}=w$$

(....) f ist injektiv, da aus $f(z_1)=f(z_2)$ für $z_1,z_2\in H$ folgt $g(f(z_1))=g(f(z_2)) \Rightarrow z_1=z_2$. Also ist f bijektiv mit Umkehrfunktion g

b) Zu jedem $z \in \mathbb{C}$ existieren eine reelle Zahl $r \geq 0$ und eine komplexe Zahl w mit $|w|=1$, sodass $z=rw$ ist. Sind r und w eindeutig bestimmt?

Lös: Definition $r:=|z|$ und $w:=\begin{cases} z/r \text{ falls } r \neq 0 \\ 1 \text{ falls } r = 0 \end{cases} \Rightarrow r \geq 0$ und $|w|=1$,

denn $|w|=|z/r|=|z|/|r|=r/r=1$ für $r \neq 0$, sowie $z=rw$ (Existenz z)

Eindeutigkeit:

1.Fall $z \neq 0$: Sei $r_1w_1=z=r_2w_2 \Rightarrow r_1=|r_1|=|z/w_1|=|z|/|w_1|=|z|$,

analog $r_2=|z| \Rightarrow r_1=r_2 \neq 0 \Rightarrow r_1w_1=r_1w_2 \underbrace{\Rightarrow}_{r_1 \neq 0} w_1=w_2$.

Also r und w sind hier eindeutig.

2.Fall $z=0$: r ist eindeutig, Beweis wie im 1.Fall.

w ist nicht eindeutig, z.B. $\underbrace{0}_{r} \cdot \underbrace{1}_{w_1} = \underbrace{0}_{r} \cdot \underbrace{(-1)}_{w_2}$

A1.6.11 Man stelle die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x+iy$ mit $x,y \in \mathbb{R}$ dar und berechne deren Beträge:

a) $\dfrac{i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6+i^7+i^8+i^9+i^{10}+i^{11}+i^{12}+i^{13}+i^{14}+i^{15}}{1+i}$

b) $\left(\dfrac{2+i}{3-i}\right)^2$

c) $(1+i)^{1999}$.

A1.6.12

Bestimme zu folgenden komplexen Zahlen jeweils Real- und Imaginärteil sowie deren Betrag:

(.) $\dfrac{i-1}{i+1}$

Lös: $\dfrac{i-1}{i+1}=\dfrac{i-1}{i+1}\,\dfrac{-i+1}{-i+1}=\dfrac{-(1-i)^2}{1^2+1^2}=\dfrac{-(1-2i+i^2)}{2}=i \Rightarrow$

$\mathrm{Re}(\dfrac{i-1}{i+1})=0$, $\mathrm{Im}(\dfrac{i-1}{i+1})=1$, $\left|\dfrac{i-1}{i+1}\right|=1$

(..) $\dfrac{3-4i}{1-3i}$

Lös: $\dfrac{(3-4i)}{(1-3i)}\,\dfrac{(1+3i)}{(1+3i)}=\dfrac{3-12+13i}{1^2-3^2}=-\dfrac{9}{10}+\dfrac{13}{10}i$

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{3-4i}{1-3i}\right)=-\dfrac{9}{10}$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{3-4i}{1-3i}\right)=\dfrac{13}{10}$, $\left|\dfrac{3-4i}{1-3i}\right|=\sqrt{\dfrac{3^2+4^2}{1^2+3^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

(...) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n$ für $n\in\mathbb{Z}$.

Lös: $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow |z|=\frac{|1+i|}{|\sqrt{2}|}=\frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{2}}=1$, $|z^n|=|z|^n=1$,

$z^2=\frac{(1+i)^2}{(\sqrt{2})^2}=\frac{1+2i-1}{2}=i$, $z^3=iz=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$, $z^4=i^2=-1 \Rightarrow$

$z^{n+4}=-z^n\ \forall\ n\in\mathbb{Z}$, $z^{8k}=(z^8)^k=1 \Rightarrow z^{8k+\nu}=z^\nu$.

$\mathrm{Re}(z^{8k})=1$, $\mathrm{Im}(z^{8k})=0$, $\mathrm{Re}(z^{8k+1})=\mathrm{Im}(z^{8k+1})=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\mathrm{Re}(z^{8k+2})=0$, $\mathrm{Im}(z^{8k+2})=1$, $\mathrm{Re}(z^{8k+3})=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{Im}(z^{8k+3})=\frac{1}{\sqrt{2}}$ und

Für $\nu=4,5,6,7$: $\mathrm{Re}(z^{8k+\nu})=-\mathrm{Re}(z^{8k+\nu-4})$, $\mathrm{Im}(z^{8k+\nu})=-\mathrm{Im}(z^{8k+\nu-4})$ für $k=\mathbb{Z}$

A1.6.13 Bestimme alle $z\in\mathbb{C}$ mit $z^4+(2-i)z^2=2i$

Lös: $z^4+(2-i)z^2=0 \Rightarrow z^4+2z^2-iz^2-2i=0 \Rightarrow z^2(z^2+2)-i(z^2+2)=0 \Rightarrow$

$(z^2+2)(\ z^2-i)=0 \Leftrightarrow z^2+2=0$ oder $z^2-i=0 \Leftrightarrow z^2=-2$ oder $z^2=i \Leftrightarrow$

$z_{1/2}=\pm\sqrt{2}\ \sqrt{-1}$, $z_{1/2}=\pm\sqrt{2}\,i$ weil $i^2=-1$ auch $(-i)^2=-1$ oder

$z_{3/4}=\pm\sqrt{i}$, $z_{3/4}=\pm\sqrt{1}\ \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_{3/4}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

A1.6.14 Äquivalenzrelationen?

Ggf Partion, Äquivalenzklassen, Äquvalenzklasse zu x=z=2

a) $z\sim w$ genau dann, wenn $|z|=|w|$

Lös: ~ reflexiv, da $|z|=|z|$

~ symmetrisch, da $|z|=|w| \Rightarrow |w|=|z|$

~ transitiv, da $|z|=|w|$ & $|w|=|v| \Rightarrow |w|=|v|$

Äquivalenzrelation (da = Äquivalenzrelation)

Äquivalenzklasse zu 2: $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\}$

Partition: $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\in\mathbb{R}\}$

b) $z\sim w$ genau dann, wenn gilt: $\exists\ \phi\in[0,2\pi)$ mit $z=w*e^{j\phi}$

Lös: ~ reflexiv, da $z \underbrace{=}_{\text{für } \Phi=0} z|$

~ symmetrisch da $z=w*e^{j\phi} \Rightarrow w=w*e^{j\phi}*e^{-j\phi}=z*e^{-j\phi}=z*e^{j\overbrace{(2\pi-\Phi)}^{=\Phi'\in[0,2\pi)}}=z*e^{j\phi'}$.

~ transitiv, da $z=w*e^{j\phi}$ & $w=v*e^{j\phi\Psi} \Rightarrow z=v*e^{j\Psi}e^{j\phi}=v*e^{j(\Psi+\phi)}$

Äquivalenzrelation Äquivalenzklasse zu 2: $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=2\}$

Partition: $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\in\mathbb{R}\}$