

1.8 (1000) Arithmetisches und geometrisches Mittel

D1.8.1 (1000) Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, heißt

$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$ das arithmetische Mittel der Zahlen x_j .

Falls alle $x_j \geq 0$ sind, heißt

$G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$ das geometrische Mittel der Zahlen x_j .

S1.8.1 (1000) $\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \left\{ \begin{matrix} A(x_1, \dots, x_n) \\ G(x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$

*Bew: Idee $n=2$ Induktion $n \mapsto n+1$

Der nächste Satz zeigt, daß das arithmetische Mittel immer der größere der beiden Mittelwerte ist. Für $n=2$ bedeutet das geometrisch, dass der Flächeninhalt eines Rechtecks mit festem Umfang dann am größten ist, wenn

es ein Quadrat ist: $\frac{\overbrace{a+b}^c}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\frac{c}{2} + \frac{c}{2} = \sqrt{\frac{c}{2} \frac{c}{2}}$, denn dann sind die beiden Werte

gleich

S1.8.2 (1000) AGM Ungleichung

$x_1, \dots, x_n \geq 0$: $G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n)$ und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn alle x_j gleich sind.

Bew: Satz trivialerweise richtig für $n=1$, und wir zeigen induktiv die Richtigkeit für $n \geq 2$.

$$\# n=2: \left(\frac{1}{2}(x_1+x_2)\right)^2 \geq (\sqrt{x_1 x_2})^2 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 x_2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\# (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \text{ d.h. Beh richtig für } n=2 \dots$$

Offenbar ist die Beh stets richtig, wenn alle $x_j = 0$ sind, und deshalb sei angenommen, daß $A(x_1, \dots, x_n) > 0$ ist.

$$\text{Für } \lambda > 0 \text{ ist immer } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \lambda x_k = A(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \lambda A(x_1, \dots, x_n),$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \lambda(x_k)} = G(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sqrt[n]{\lambda^n \prod_{k=1}^n (x_k)} = \lambda G(x_1, \dots, x_n), \quad G \leq A, \quad \lambda G \leq \lambda A$$

und deshalb können wir o.B.d.A. $A(x_1, \dots, x_n) = 1$ voraussetzen (durch λ herbeigeführt).

Falls alle $x_j = 1$ sind, ist nichts mehr zu zeigen ($A=G=1$), und deshalb sei jetzt angenommen, dass $x \neq 1 \Rightarrow$

$\exists x_{n-1} = 1 - \alpha$ sowie $x_n = 1 + \beta$, mit $\alpha, \beta > 0$.

$$\text{Wegen } 1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \Leftrightarrow n = \sum_{j=1}^n x_j \text{ folgt daraus, mit } x'_{n-1} = 1 + \beta - \alpha = x_{n-1} + x_n - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x'_{n-1} = \sum_{j=1}^{n-2} x_j + x_{n-1} + x_n - 1 = \sum_{j=1}^{n-2} x_j - 1 = n-1 \text{ ist (wobei die Summe für } n=2 \text{ leer ist, also den Wert 0 hat).}$$

$$\# A(x_n, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}') = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x_{n-1}' \right) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^{n-2} x_j + x_{n-1} + x_n - 1 \right) =$$

$$\# \frac{1}{n-1} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n x_j}_{=n \cdot \frac{A}{1}} - 1 \right) = 1$$

siehe auch

Aus der Induktionshypothese, angewandt auf die Zahlen

$x_1, \dots, x_{n-2}, x'_{n-1}$ schließen wir dann, daß $x'_{n-1} \prod_{j=1}^{n-2} x_j \leq 1$. Es ist aber

$x_{n-1} \cdot x_n = 1 + \beta - \alpha - \alpha\beta < 1 + \beta - \alpha = x'_{n-1}$ woraus die Beh für n folgt

$$\prod_{k=1}^n x_k = x_n x_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} x_k < x'_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} x_k \leq 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^n x_k < 1.$$

Das Vorlesungsmanuscript konnte ich nicht vollständig verstehen, deshalb ein Versuch einer eigenen Formulierung:

Induktion von n-1 nach n:

IHyp n-1: $A_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, x'_{n-1}) = 1 \geq G_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-2}, x'_{n-1}) =$

IS n-1+1: $A(x_1, \dots, x_n) = 1$, wegen $x_{n-1} \cdot x_n = 1 + \beta - \alpha - \alpha\beta < 1 + \beta - \alpha = x'_{n-1}$

$$\# \prod_{k=1}^n x_k = x_n x_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} x_k < x'_{n-1} \prod_{k=1}^{n-2} x_k \leq 1 \Rightarrow \prod_{k=1}^n x_k \leq 1 \Rightarrow A \leq G$$

Andere Formulierung:

// **D1.8.1** (1000) Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, heißt//

// $A(x_1, \dots, x_n) = 1/n \sum_{j=1}^n x_j$ das arithmetische Mittel der Zahlen x_j //

// Falls alle $x_j \geq 0$ sind, heißt// !!!!

// $G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$ das geometrische Mittel der Zahlen x_j //

// **S1.8.1** (1000) $\min\{x_1, \dots, x_n\} \leq \left\{ \begin{matrix} A(x_1, \dots, x_n) \\ G(x_1, \dots, x_n) \end{matrix} \right\} \leq \max\{x_1, \dots, x_n\}$ //

// **S1.5.6** (715) $x \in \mathbb{R}, x \geq -1, n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1+nx, = \Leftrightarrow x=0$ oder $n=0$ oder $n=1$ //

Äquivalente Form $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \leq \left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^n, a_1 \cdot \dots \cdot a_n \geq 0$.

Um Triviales zu vermeiden sei $a_1 \cdot \dots \cdot a_n > 0$.

$$n=1: a_1 \leq \left(\frac{a_1}{1} \right) = a_1.$$

$$\# \text{IH } n: \stackrel{\text{D1.8.1}}{\Leftrightarrow} 0 \leq \alpha := \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}, \alpha \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \Leftrightarrow \alpha^n \geq \prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot \dots \cdot a_n$$

$n \rightarrow n+1$: Sei $a_{n+1} \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n \Rightarrow$ (Indices können beliebig verteilt werden)

$$\# \Rightarrow a_{n+1} \geq \max\{x_1, \dots, x_n\} \Rightarrow a_{n+1} \stackrel{\text{S1.8.1}}{\geq} \alpha$$

$$x := \frac{a_{n+1} - \alpha}{(n+1)\alpha} \geq 0 \Rightarrow 1 + \frac{a_{n+1} - \alpha}{(n+1)\alpha} = \frac{n\alpha + a_{n+1}}{(n+1)\alpha} = \frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{(n+1)\alpha} \stackrel{\text{S1.5.6}}{\geq}$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_{n+1}}{(n+1)\alpha} \right)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \frac{a_{n+1} - \alpha}{(n+1)\alpha} = 1 + \frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{\alpha} \geq \frac{a_{n+1}}{\alpha} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}}{(n+1)\alpha} \right)^{n+1} \geq \alpha^{n+1} \frac{a_{n+1}}{\alpha} = \alpha^n a_{n+1} \stackrel{\text{IH}}{\geq} a_1 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}.$$

S1.8.3 (1002) Für $a \geq 0$, $a \neq 1$, $n, p \in \mathbf{N}$ und $1 \leq p < n$ gilt immer

$$\sqrt[n]{a^p} < \frac{pa + (n - p)}{n} = 1 + \frac{p}{n} (a - 1) = \frac{n - p}{n} + \frac{pa}{n}$$

Bew: Folgt aus der AGM Ungleichung, $1/n \sum_{j=1}^n x_j \geq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n x_j}$,

angewandt auf die Zahlen $x_j = a$ bzw $= 1$, für $1 \leq j \leq p$ bzw $p+1 \leq j \leq n$
 ($x_1 = \dots = x_p = a$, $x_{p+1} = \dots = x_n = 1$):

$$\sqrt[n]{a^p 1^{n-p}} \leq 1/n \left(\sum_{j=1}^p a + \sum_{j=p+1}^n 1 \right) = \frac{pa + (n - p)}{n}$$