1.9(1100) Polynome, rationale Funktionen

D1.9.1(1100) Seien $n\in\mathbb{N}_0$, $a_0,a_1,a_2...,a_k\in\mathbb{K}$, $z^0=1$, $0^0=1$ gegeben, dann heißt

1.) Die Funktion $P:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $z\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ist ein Polynom in z mit Koeffizienten $a_0,a_1,a_2...,a_n$ und Grad n, falls $a_n\neq 0$ (n=grad(P) oder $n=\gamma(P)$). Polynome $\gamma(P)=0$ sind konstant $P(z)=c\neq 0$, $c\in\mathbb{C}$, aber nicht identisch gleich 0, solche vom Grad n=1 bzw n=2 heißen lineare bzw quadratische Funktionen.
Die Menge aller Polynome (Variable z) mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ wird mit $\mathbb{K}[z]$ bezeichnet, die Teilmenge der Polynome vom Grade höchstens gleich n sei $\mathbb{K}_n[z]$ für $n\in\mathbb{N}_0$.
Beachte: $\text{grad}(Q(z))=0$ falls $Q(z)\equiv a_0\neq 0$, $f:z\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k z^k=0\ \forall z \Rightarrow f\equiv 0$

2.) Ein $z_0\in\mathbb{K}$ ist Nullstelle von P: $\Leftrightarrow$ $P(z_0)=0$, $P(z)\neq 0$
Wir nennen z_0 eine Nullstelle m-ter Ordnung, oder Nullstelle der Vielfachheit m von P, wenn es ein $Q\in\mathbb{K}[z]$ gibt, so dass $P(z)=(z-z_0)^m Q(z)\ \ \forall z\in\mathbb{K}$ gilt, und $Q(z_0)\neq 0$.
Bem: Das Polynom x^2+1 hat offenbar in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, in $\mathbb{C}$ dagegen besitzt es 2 Nullstellen, nämlich i und –i. Wir werden später beweisen, daß jedes nicht konstante Polynom mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt.

3.) Mit Polynomen $P,Q:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ ist die Funktion
$R:\mathbb{K}\setminus\{\text{Nullstellen von } Q\}\to\mathbb{K}$, $z\mapsto \frac{P(z)}{Q(z)}$ eine rationale Funktion.

Andere Formulierungen:
Sind $P,Q\in\mathbb{K}[z]$ und ist Q nicht das Nullpolynom, so ist der Quotient P/Q überall dort definiert, wo $Q(z)\neq 0$ ist. Wir nennen P/Q eine rationale Funktion und die Menge der z mit $Q(z)\neq 0$ heißt ihr natürlicher Definitionsbereich. Die Menge der rationalen Funktionen sei mit $\mathbb{K}(z)$ bezeichnet.

4.) $P\equiv 0$ (d.h. $P(z)=0\ \forall z\in\mathbb{K}$) heißt Nullpolynom mit $\gamma(P):=-\infty$
Falls alle $a_k=0$ sind folgt $P(x)\equiv 0$ und wir nennen dieses Polynom das Nullpolynom oder die Nullfunktion.
Bem: $\gamma(P*Q)=\gamma(P)+\gamma(Q)$, falls $P\equiv 0$ oder $Q\equiv 0$ ist $\gamma(P)+\gamma(Q)=-\infty$

5.) Sei $P\in\mathbb{K}[x]$ für ein $n\in\mathbb{N}$, und seien $x_1,...,x_\mu\in\mathbb{K}$ v erschiedene Nullstellen von P der Vielfachheiten $m_1,...,m_\mu$. Dann sagen wir:
P hat $m=\sum_{j=1}^{\mu} m_j$ Nullstellen in $\mathbb{K}$ (wenn wir entsprechend der Vielfachheit zählen, was normalerweise der Fall ist). Die Aussage, dass P höchstens n Nullstellen haben kann, ist also zu interpretieren als $\sum_{j=1}^{\mu} m_j \leq n$.

6.) K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom $\neq 0$ eine Nullstelle hat

Bem: Jeder Körper hat einen Erweiterungskörper $\overline{K}$ der algebraisch abgeschlossen ist.
$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.

Beachte, dass die Bezeichnung der Unbestimmten völlig willkürlich ist. Wir werden daher im Fall $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ oft $\mathbb{C}[z]$ bzw $\mathbb{C}(z)$ für die Menge der Polynome bzw rationalen Funktionen mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ schreiben.

Bem: $\gamma(P*Q))=\gamma(P)*\gamma(Q)$;
$\gamma(P+Q))\leq\max\{\gamma(P),\gamma(Q)\}$, (< falls sich die höchsten Glieder aufheben)

Allgemeines
Formale Ausdrücke Polynome $P\in\mathbb{K}[z]$ und Abbildungen
Formaler Ausdruck $a_0+a_1z+a_2z^2+...+a_nz^n$
Mit formalen Ausdrücken von Polynomen kann man rechnen, z.B. PxQ
Abbildung
ϕ: $f\in K[z]\mapsto$ Die Abbildung $\alpha\mapsto f(\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{K}$,
$K[z]\mapsto$ Abbildung(K,K) ???...Im allgemeinen nicht injektiv, aber

P1.9.1 ϕ: $K[z]\mapsto$ Abbildung(K,K) ist injektiv, falls K unendlich viele Elemente hat

Bew: Seien $f,g\in K[z]$, $\phi(f)=\phi(g)$, $|K|=\infty \Rightarrow \phi(f-g)=0$ Nullabbildung,
zu zeigen: $f-g=0 \Rightarrow f-g$ hat ∞ viele Nullstellen.
Es gilt aber $|\{$Nullstellen eines Polynoms $h\}\leq$ grad h, denn sind $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ Nullstellen $\Rightarrow h(x)=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)...(x-\lambda_n)\underbrace{r(x)}_{Polynom} \Rightarrow \gamma(h)\geq n\ (..\infty) \Rightarrow$

$f-g=0$

S1.9.0 Addition von Polynomen (Gewisse a_k,b_k können auch 0 sein)

$$(\sum_{k=0}^{n} a_kz^k)+(\sum_{k=0}^{n} b_kz^k)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)z^1+...(a_n+b_n)z^n.$$

Multiplikation von Polynomen

$$(\sum_{k=0}^{n} a_kz^k)(\sum_{k=0}^{n} b_kz^k)=(a_0+a_1z^1+...+a_nz^n)(b_0+b_1z^1+...+b_nz^n)=$$

$$a_0b_0+(a_1b_0+a_0b_1)z^1+...+[\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j}]z^k+..+[\sum_{j=0}^{n} a_jb_k-j]z^n$$

Bew: siehe A1.9.2

Bem: Polynomabbildung $z\mapsto a_0+a_1z+...+a_nz^n$
Betrachtung Körper $K=\mathbb{F}_2=\{0,1\}$; $1+x=1+x^2$ in $\mathbb{F}_2$ wie folgt

x	$x\mapsto 1+x$	$x\mapsto 1+x^2$
1	0	0
0	1	1

Addidition und Multiplikation zu Polynomen sind erklärt, aber es gibt z.B. zu $x\mapsto x^2$ kein Inverses, erfüllen also nicht alle Körperaxiome. Man spricht von einem Ring, in dem es nicht für alle Elemente ein Inverses gibt

A1.9.1 Gegeben sei ein Polynom $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sum_{k=0}^{n} c_kx^k$ mit $c_n\neq0$.

Es sei $a\in\mathbb{R}$ eine Nullstelle von f, d.h. es gelte $f(a)=0$.

Beweise, dass $|a|<\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n}|c_k|$.

Bew: $|a|<1$: $|a|<1\le \frac{|c_0|+|c_1|+\dots|c_n|}{|c_n|}=\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n}|c_k|$.

$\# \frac{|c_0|+|c_1|+\dots|c_n|}{|c_n|}=\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n}|c_k|\ge 1 \underbrace{\Rightarrow}_{|a|<1}$ weiter wie oben

$|a|\ge 1$: $f(a)=0 \Rightarrow c_0+c_1a+\dots c_{n-1}a^{n-1}+c_na^n=0 \Rightarrow$

$$c_na^n=-c_0-c_1a-\dots c_{n-1}a^{n-1}=-\sum_{k=0}^{n-1} c_ka^k \Rightarrow$$

$$|c_n||a|^n=|\sum_{k=0}^{n-1} c_ka^k|\le\sum_{k=0}^{n-1}|c_k||a^k| \Rightarrow$$

$$|c_n||a|^n * \frac{1}{|c_n||a|^{n-1}}\le\sum_{k=0}^{n-1}|c_k||a^k| * \frac{1}{|c_n||a|^{n-1}} \Rightarrow$$

$$|a|\le\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k||a|^{k-(n-1)} \underbrace{\le}_{|a|\ge 1,\ k-(n-1)\le 0} \frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n-1}|c_k|<\frac{1}{|c_n|}\sum_{k=0}^{n}|c_k|$$

A1.9.2

a) Es seien $n,m\in\mathbb{N}$, $a_0,...,a_n,b_0,...,b_m\in\mathbb{C}$ mit $a_n,b_m\neq 0$. Zeige, dass für die Polynome $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ gilt:

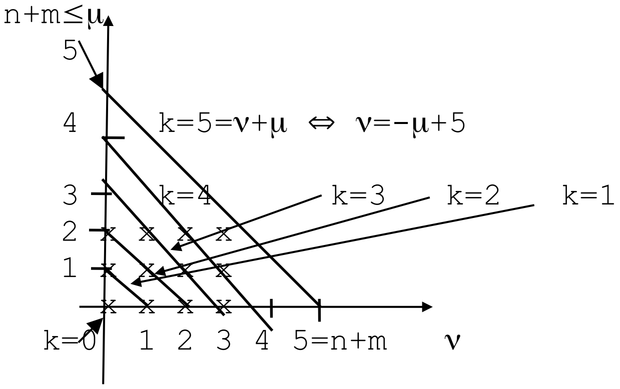
$P\cdot Q$ ist ein Polynom vom Grad $n+m$, genauer:

$P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$ mit $c_k=\sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu$, $k=0,...,n+m$, wobei $a_k=0\ \forall\ k>n$ und $b_k=0\ \forall\ k>m$ gesetzt sei.

Bew: $P(z)*Q(z)=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{m} a_\nu b_\mu \underbrace{z^\nu z^\mu}_{z^{\nu+\mu}} \underset{*}{=} \sum_{k=0}^{n+m}\sum_{\substack{0\le\nu\le n+m\\ 0\le\mu\le n+m\\ \nu+\mu=k}} a_\nu b_\mu z^k=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k \Rightarrow$ P*Q ist ein Polynom.

beachte $a_\nu=0$ für $\nu>n$, $b_\mu=0$ für $\mu>m$. Rechts stehen mehr Summanden als links, aber Summe ist gleich.

Genauere Erläuterung der Umsummation am Bsp $n=3$, $m=2$,



$b_3 ... b_5=0$

$a_4 ... a_5=0$

m \ n	0	1	2	3	4	5
5	a_0b_5					
4	a_0b_4	a_1b_4				
3	a_0b_3	a_1b_3	a_2b_3			
2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2		
1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	
0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	a_4b_0	a_5b_0
k=	0	1	2	3	4	5

Bei der linken Summe wird über alle Gitterpunkte im Rechteck $0\le\nu\le n$, $0\le\mu\le m$ summiert, während bei der rechten Summe über alle Gitterpunkte im Dreieck $0\le\nu+\mu\le n+m$ summiert wird. Man beachte, dass in den Punkten des Dreiecks ohne das Rechteck (diese Punkte hat man hinzugenommen) der Wert $a_\nu b_\mu=0$ ist!

Bem: c_k läßt sich auch in der Form $c_k=\sum_{\nu=0}^{k} a_\nu b_{k-\nu}$ schreiben.

$a_n\neq 0$, $b_m\neq 0 \Rightarrow c_{m+n}=\sum_{\nu=0}^{n+m} \underbrace{a_\nu}_{=0\text{ für }\nu>n} * \underbrace{b_{n+m-\nu}}_{=0\text{ für } n+m-\nu>m\text{ d.h.}\nu<n} = a_n b_m\neq 0$

(alle Summanden $=0$ für $\nu>n$). Also $\text{grad}(PQ)=n+m$

#Im Bsp oben $n=3$, $m=2$

$\#c_0=\sum_{\nu=0}^{0} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{0-0}$, $c_1=\sum_{\nu=0}^{1} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{1-0}+a_1b_{1-1}$,

$\#c_2=\sum_{\nu=0}^{2} a_\nu b_{k-\nu}=a_0b_{2-0}+a_1b_{2-1}+a_2b_{2-2}$ …

$\#c_5=\sum_{\nu=0}^{5} a_\nu b_{k-\nu}=a_0\underbrace{b_{5-0}}_{=0\ da\ 5>2}+a_1\underbrace{b_{5-1}}_{=0\ da\ 4>2}+a_2\underbrace{b_{5-2}}_{=0\ da\ 3>2}+a_3b_{5-3}+\underbrace{a_4}_{=0\ da\ 4>3}b_{5-4}+\underbrace{a_5}_{=0\ da\ 5>3}b_{5-5}=a_3b_2$

#Im Bsp $n=3$, $m=2$: für $k=4$ ist

$\#c_4=\sum_{\nu=0}^{4} a_\nu b_{k-\nu}=a_0\overbrace{b_{\mu=4>m=2}}^{=0}+a_1\overbrace{b_{\mu=3>m=2}}^{=0}+a_2b_2+a_3b_1+\overbrace{a_{\nu=3>n=3}}^{=0}b_0=a_2b_2+a_3b_1$

b) $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, Hinweis: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$

//**S1.7.4** (906) $\alpha\in C$ ˅ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$://
//1.) $\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}$ //

//3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}\underbrace{=}_{2.)}\frac{n!}{(n-m)!(n-m-n)!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}\underbrace{=}_{2.)}\binom{n}{m}$ falls $n\ge m$//

//5.) $\binom{\alpha}{j}+\binom{\alpha}{j-1}=\binom{\alpha+1}{j}$ //

//6.) $\forall\ a,b,z\in C$ ˅ $n\in N_0$: $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}b^{n-k}a^k$

Bew: $\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k\underbrace{=}_{Binomialsatz}(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n\underbrace{=}_{Binomialsatz}[\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{a_k}x^k)][\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}}_{b_k}x^k)]$

$\underbrace{=}_{A1.9.2}$

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$, $\sum_{k=0}^{2n}[\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}x^k\ \forall\ x\in C\underbrace{\Rightarrow}_{S1.7.4}\binom{2n}{k}=\sum_{\nu=0}^{k}\binom{n}{\nu}\binom{n}{k-\nu}\ \forall$

$k=0,1,\ldots 2n\underbrace{\Rightarrow}_{k=n}$

$=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}\underbrace{\binom{n}{n-\nu}}_{\underbrace{=}_{S1.7.4\,3.)}\binom{n}{\nu}}=\sum_{\nu=0}^{n}\binom{n}{\nu}^2$

S1.9.1 (1103)
Vor: Sei P ein Polynom, $\gamma(P)\ge1$, $n\in N_0$
1.) Ist $z_0\in C$ eine Nullstelle von $P(z)$, so ∃ ein Polynom $Q(z)$ mit $\gamma(Q)=n-1$ sodass gilt $P(z)=(z-z_0)Q(z)\ \forall\ z\in C$

//**S1.7.2** (903) $a,b\in C$, $n\in N_0$: 2.) $a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^kb^{n-k}$//

Bew: $P(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$, $n\ge1$, $P(z_0)=0$, $z_0\in C\Rightarrow P(z)=P(z)-P(z_0)=$

$\sum_{k=0}^{n}a_kz^k-\sum_{k=0}^{n}a_kz_0^k\underbrace{=}_{a_0z^0-a_0z_0^0=0}\sum_{k=1}^{n}a_k(z^k-z_0^k)\underbrace{=}_{k=\ell+1}\sum_{\ell=0}^{n-1}a_{\ell+1}(z^{\ell+1}-z_0^{\ell+1})\underbrace{=}_{S1.7.2\,2.)}$

$(z-z_0)\sum_{\ell=0}^{n-1}a_{\ell+1}\sum_{\nu=0}^{\ell}z^\nu z_0^{\ell-\nu}\underbrace{=}_{0\le\nu\le\ell,\ 0\le\ell\le n-1}(z-z_0)\sum_{\nu=0}^{n-1}a_{\ell+1}\sum_{\ell=\nu}^{n-1}z^\nu z_0^{\ell-\nu}=$

$(z-z_0)\sum_{\nu=0}^{n-1}z^\nu(\sum_{l=\nu}^{n-1}a_{l+1}z^{l-\nu})=(z-z_0)Q(z)$

$(\sum_{l=\nu}^{n-1}a_{l+1}z^{l-\nu})=b_\nu$, $\nu=0,...,\nu-1$,
wobei $b_{n-1}=a_nz_0^{n-1-(n-1)=0}\ne0$, da $\gamma(P)=n$

2.) $P(z)$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$, außer wenn es das Nullpolynom ist.

Bem: n, nicht n+1 entsprechend 0,1,2,…n!

Bew: $A_{(n)}$: P mit $\gamma(P)=n\in\mathbb{N}_0$ hat höchstens n Nullstellen in $\mathbb{C}$.

$n=0$: $A_{(0)}: P(z)\equiv a_0\neq 0$, $\gamma(P)=0$ #0 Nullstellen

$n\to n+1$: Sei $\gamma(P)=n+1$

1.Fall $P(z)\neq 0 \ \forall\ z\in\mathbb{C} \Rightarrow A_{(n+1)}$

2.Fall $\exists\ z_0\in\mathbb{C}\ P(z_0)=0 \underbrace{\Rightarrow}_{1.)} P(z)=(z-z_0)Q(z)$,

I.H $\gamma(Q)=n \Rightarrow Q$ hat höchstens n Nullstellen

$P(z_1)=0 \Leftrightarrow (z_1-z_0)=0$ oder $Q(z_1)=0 \Rightarrow P(z)$ hat höchstens n+1 Nullstellen.

($A_{(n)} \Rightarrow A_{(n+1)}$ wahr)

S1.9.1' (1104) Für ein $P(x)=\sum_0^n a_k x^k \in K[x]$ (Menge aller Polynome) und beliebiges $x_0\in K$ ist $P(x+x_0)=\sum_0^n b_j x^j$, mit $b_j=\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j}\ \forall\ j=0,...n$; also ist $P(x+x_0)$ wieder in $K[x]$ und hat den gleichen Grad wie P

Bew: Es ist nach der binomischen Formel $(x+x_0)^k=\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} x^j,\ \forall\ k\in\mathbb{N}_0$,

also folgt durch Vertauschung der Summationreihenfolge

$$\sum_{k=0}^n a_k(x+x_0)^k \underbrace{=}_{\text{Bin Formel}} \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j} x^j \underbrace{=}_{0\le j\le k\le n} \sum_{j=0}^n \underbrace{x^j}_{\text{unabh von } k} \underbrace{\sum_{k=j}^n \binom{k}{j} a_k x_0^{k-j}}_{b_j} = \sum_{j=0}^n b_j x^j,$$

und daraus ergibt sich die Behauptung.

S1.9.1''(1105)Sei $P\in K[x]$ mit $\gamma(P)=n$ für ein $n\in N$. Dann hat jede Nullstelle x_0 von P eine eindeutig bestimmte Ordnung m, und $m\leq n$.

*//**S1.9.1**(1103) Vor:Sei P einPolynom vom grad $n\geq 1.n\in N_0$//*
//Beh:1.)$z_0\in C$ Nullst von P(z), so $\exists$ ein Polynom Q(z) mit grad(Q)=n-1/
// sodaß gilt $P(z)=(z-z_0)Q(z)\ \forall\ z\in C$//

Bew:Gesucht b_k für $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{n} b_k\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-x_0)^{k-j}x^j=$

$$\sum_{j=0}^{n} x^j\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}\Rightarrow a_j=\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j},\ 0\leq j\leq n$$

$$j=n:\quad a_n=\sum_{k=n}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}=\binom{n}{n}b_n(-x_0)^{n-n}=b_n$$

$$j=n-1: a_{n-1}=\sum_{k=n-1}^{n}\binom{k}{n-1}b_k(-x_0)^{k-(n-1)}=\binom{n-1}{n-1}b_{n-1}(-x_0)^{n-1-(n-1)}+\binom{n}{n-1}b_n(-x_0)^{n-(n-1)}=$$

$$=b_{n-1}+n\overbrace{b_n}^{a_n}(-x_0)^{n-(n-1)}\Rightarrow b_{n-1}=a_{n-1}-na_n(-x_0)\ \text{usw}$$

$$\text{Allg:}a_j=\binom{j}{j}b_j(-x_0)^{j-j}+\sum_{k=j+1}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}=b_j+\sum_{k=\underbrace{j+1}_{>j}}^{n}\binom{k}{j}b_k(-x_0)^{k-j}\Rightarrow$$

Alle b_j lassen sich ausrechnen.

Falls x_0 Nullstelle: $0=P(x_0)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x_0-x_0)^k\underset{0^0=1,0^k=0}{=}b_0\Rightarrow$

m mindestens 1 in $P(x)=\sum_{k=m}^{n} b_k(x-x_0)^k=(x-x_0)^m Q(x)$

Nach S1.9.1' können wir P in der Form $P(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$ schreiben, mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $b_k=b_k(x_0)\in K$. Ist x_0 Nullstelle, so ist $m=\min\{k:\ b_k\neq 0\}\geq 1$, und $P(x)\underset{S1.9.1}{=}(x-x_0)^m Q(x)$ mit $Q(x_0)\neq 0$. Das bedeutet, daß x_0 Nullstelle der Ordnung $m\leq n$ ist.

Die Eindeutigkeit der Nullstellenordnung ist leicht zu zeigen.

S1.9.1''' (1107) Divisionssatz

Vor: Polynome $S(z)\not\equiv 0$, $P(z)$ beliebig.

Beh: $\exists$ eindeutig bestimmte Polynome $Q(z)$ und $R(z)$: $P=Q*S+R$, $\gamma(R)<\gamma(S)$.

Bew: $\overline{Q}$ Menge aller Polynome, $M:=P-\overline{Q}\,S \Rightarrow \exists\ R$: $\gamma(R)=\min\{\gamma(M)\}$

Annahme $\gamma(R)\geq\gamma(S) \Rightarrow \exists\ Q_1(z): \frac{a_{R_{\deg R}}}{a_{S_{\deg S}}} x^{\gamma(R)-\gamma(S)}$, a_{R_k}, a_{S_k} Koeff von S,R $\Rightarrow$

$R_1(z):=R-Q_1S=P-\underbrace{(Q+Q_1)}_{\in\overline{Q}}S$, $R_1\in M$: $\gamma(R_1)<\gamma(R)$, da

$\gamma(R_1):=\gamma((a_{R_0}+\ldots a_{R_{\deg R}}(z)^{\gamma(R)})-\frac{a_{R_{\deg R}}}{a_{S_{\deg S}}} z^{\gamma(R)-\gamma(S)}(a_{S_0}+\ldots a_{S_{\deg S}}(z)^{\gamma(S)}))=$

$\gamma(a_{R_0}\pm..+a_{R_{\deg R}}(z)^{\gamma(R)}\ R-\frac{a_{R_{\gamma(R)}}}{a_{S_{\gamma(S)}}} z^{\gamma(R)-\gamma(S)} a_{S_{\gamma(S)}}(z)^{\gamma(S)})=$

$\gamma(a_{R_0}\pm..+a_{R_{\gamma(R)}}(z)^{\gamma(R)}-a_{R_{\gamma(R)}}(z)^{\gamma(R)})<\gamma(R) \Rightarrow$

Widerspruch zu $\gamma(R)=\min\{\gamma(M)\} \Rightarrow \gamma(R)\geq\gamma(S)$ falsch $\Rightarrow$ Beh

Eindeutigkeit:

Annahme $\exists\ \tilde{Q}, \tilde{R}$: $P=\tilde{Q}S+\tilde{R}$, $\gamma(\tilde{R})<\gamma(S)$ S $\Rightarrow$ $(Q-\tilde{Q})S=\tilde{R}-R \underbrace{\Rightarrow}_{\gamma(\tilde{R})<\gamma(S)}$

$\gamma(\tilde{R}-R)<\gamma(S)$.

Annahme $Q\neq\tilde{Q}$: $\gamma(\tilde{R}-R)=\gamma((Q-\tilde{Q})S)=\gamma(Q-\tilde{Q})+\gamma(S)\geq\gamma(S) \underbrace{\Rightarrow}_{\gamma(\tilde{R}-R)<\gamma(s)}$

Widerspruch $\Rightarrow Q=\tilde{Q} \vee R=\tilde{R}$

Andere Formulierung:

K[x] Menge aller Polynome mit Potenzen von x.

Sei $f,g\in K[x]$, $g\neq 0$, dann

$\exists$ eindeutig bestimmte $q,r\in K[x]$ und $f=qg+r$, $\gamma(r)<\gamma(g)$

Bew: Existenz

$f(x)=a_0+\ldots+a_nx^n$, $g(x)=b_0+\ldots+b_mx^m$, $a_n,b_m\neq 0$ ($f=0 \Rightarrow q=0$)

Fall $n<m$ setze $r=f$ und $q=0$ ...ok

Fall $n>m$ setze $q_1=\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}$ Polynom, setze $f_1=f-q_1g \Rightarrow \gamma(f_1)<\gamma(f)\Rightarrow$

Wiederhole bis γ kleiner $\gamma(g)$ wird.

Eindeutigkeit

$f=qg+r$, $f'=q'g+r' \Rightarrow r-r'=q'g-qg=(q'-q)g$ wobei $\gamma(r)<\gamma(g)$ und $\gamma(r')<\gamma(g)$

$\gamma(g)>\gamma(r-r')=\gamma(q'-q)+\gamma(g) \Rightarrow \gamma(q'-q)<0 \Rightarrow \gamma(q'-q)=-\infty \underbrace{\Rightarrow}_{\text{D1.9.1 4.)}} q'-q=0 \Rightarrow$

$q'=q$ und $r'=r$

Bsp:● $f(x)=x^5-1$, $g(x)=x^2+2$

$(x^5-1):(x^2+2)=x^3-2x$ Rest $4x-1$

$-(x^5+2x^3)$

$-2x^3-1$

$-(-2x^3-4x)$

$4x-1$

●● $P=Q*S+R \Rightarrow \dfrac{P(x)}{S(x)}=Q(x)+\dfrac{R(x)}{S(x)} \quad \forall\ x\in\mathbb{R},\ S(x)\neq 0$

Bsp: Sei $P(x)=2x^3-3x^2$, $S(x)=x^2-3$,

$(2x^3-3x^2):(x^2-3)=2x-3$ Rest $6x-9 \Rightarrow \dfrac{2x^3-3x^2}{x^2-3}=2x-3+\dfrac{6x-9}{x^2-3}$, $x\neq\pm\sqrt{3}$ d.h.

$-(2x^3-6x)$

$-3x^2+6x$

$-(-3x^2 \quad +9)$

$6x\ -9$

$P(x)=2x^3-3x^2=(2x-3)(x^2-3)+6x-9=$
$Q(x)S(x)+R(x)$

$\dfrac{x^5+1}{x^4-x^2}=\dfrac{P(x)}{S(x)}$. $\gamma(P)>\gamma(S) \underbrace{\Rightarrow}_{\bullet\bullet} \exists$ Q und R, $\gamma(R)<\gamma(S)$: $\dfrac{P(x)}{S(x)}=Q(x)+\dfrac{R(x)}{S(x)}$

$(x^5+1):(x^4+x^2)=x+\dfrac{-x^3+1}{x^4-x^2}$, $x^4-x^2=x^2(x^2+1) \Rightarrow \dfrac{-x^3+1}{x^2(x^2+1)^1}$

$-(x^5+x^3)$

$-x^3+1$

S1.9.1'''' (1105) $|z|\geq\rho:=2\dfrac{|a_0|+|a_1|+\ldots+|a_n|}{|a_n|}$ & $|x|\geq(2\underline{G}/a_n|)^{1/n}$, $\underline{G}\in\mathbb{R}_+ \Rightarrow$

$|P(z)|\geq \underline{G}$

*//**S1.2.1** (406) Vor: K angeordnet, a,b∈K 7.) $|a+b|\geq||a|-|b||\geq|a|-|b|$//*

Bew: $P(z):=a_nz^n+a_{n-1}z^{\,n-1}+\ldots+a_1z+a_0$, $a_n\neq 0 \Rightarrow$

$a_nz^n(1+b_{n-1}\dfrac{1}{z}+b_{n-2}\dfrac{1}{z^2}+\ldots b_0\dfrac{1}{z^n})=a_nx^ng(z)$, $b_{n-k}:=a_{n-k}/a_n$.

Sei $\beta:=1+|b_{n-1}|+|b_{n-2}|+\ldots|b_0|\geq 1 \Rightarrow$

$h(z):=|b_{n-1}\dfrac{1}{z}+b_{n-2}\dfrac{1}{z^2}+\ldots b_0\dfrac{1}{z^n}|\leq(|b_{n-1}|+|b_{n-2}|+\ldots|b_0|)\dfrac{1}{|z|}\leq\dfrac{\beta}{|z|} \underbrace{\Rightarrow}_{|z|\geq 2\beta}$

$h(z)\leq\beta/2\beta=1/2 \Rightarrow$

$|g(z)|=|1+b_{n-1}\dfrac{1}{z}+b_{n-2}\dfrac{1}{z^2}+\ldots b_0\dfrac{1}{z^n}| \underbrace{\geq}_{S1.2.1\,7.)} 1-|b_{n-1}\dfrac{1}{z}+b_{n-2}\dfrac{1}{z^2}+\ldots b_0\dfrac{1}{z^n}|=1-h(z)\geq 1/2 \Rightarrow$

$|P|=|a_nx^ng(z)|=|g(z)||a_nx^n|\geq(1/2)|a_nx^n|$ für

$|z|\geq 2\beta=\rho:=2(1+|b_{n-1}|+|b_{n-2}|+\ldots|b_0|=2\dfrac{a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1+a_0}{|a_n|} \Rightarrow$

$|z|\geq\rho \vee |z|\geq(2\underline{G}/|a_n|)^{1/n} \Rightarrow P\geq 1/2*((2\underline{G}/|a_n|)^{1/n})^n=\underline{G}$

P1.9.2 $f\in K[z]$, $f\neq 0$, $\lambda\in K$ Nullstelle von f $\Rightarrow$

$\exists\ g\in K[z]$, $f(z)=(z-\lambda)^pg(z)$, Vielfachheit der Nullstelle $p\in\mathbb{N}$, $g(\lambda)\neq 0$

Bew: S1.9.1''' $\Rightarrow f(z)=(z-\lambda)g_1(z)+r(z) \Rightarrow \gamma(r(z))<\gamma(z-\lambda)=1 \Rightarrow$ r konstant $\Rightarrow$

$0=f(\lambda)=r(\lambda) \Rightarrow r=0 \Rightarrow f(z)=(z-\lambda)g_1(z)$

Bsp: $(x^3-1):(x-1)=x^2+x+1 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) \underbrace{=}_{x=1} 0$

$-(x^3-x^2)$

x^2-1

$-(x^2-x)$

$x-1$

$-(x-1)$

0

S1.9.2(1107)Identitätssatz für Polynome

Vor:Seien Polynome $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$ mit $n,m\in\mathbb{N}_0$, $n\geq m$ gegeben. Für $n+1$ verschiedene Zahlen $z_1,....,z_{n+1}\in\mathbb{C}$ gelte $P(z_j)=Q(z_j)$, $j=1,2,...,n+1$

Beh: $m=n$ und $a_k=b_k$ $\forall$ $k=0,1,2,...,n$, also $P(z)=Q(z)$, $0\leq k\leq n$

//**S1.9.1***(1103) Vor:Sei P einPolynom vom* $\gamma(P)\geq 1. n\in N_0$//

// *2.) P(z) hat max n Nullst in C, außer wenn es das*//

// *Nullpolynom ist.*//

Bew: $P(z)-Q(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k-\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$. Falls $n>m$, dann sei $b_k=0$ $\forall$ $k=m+1,....,n$

$$P(z)-Q(z)=\sum_{k=0}^{n} (a_k-b_k)z^k \text{ ist Polynom mit } \gamma(P-Q)\leq n$$

$$P(z_j)-Q(z_j)=0,\ j=1,...,n+1 \underbrace{\Rightarrow}_{S1.9.1\,2.)} P(z)-Q(z)\equiv 0 \Rightarrow P(z)=Q(z)$$

Bem: $\sum_{\nu=m_1}^{n_1}\sum_{\nu=m_2}^{n_2} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=m_2}^{n_2}\sum_{\nu=m_1}^{n_1} a_{\nu\mu}$, $\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\nu\mu}=\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=\mu}^{n} a_{\nu\mu}$, $1\leq\mu\leq\nu\leq n$

Bem:Sei eine rationale Funktion $R\in\mathbb{K}[x]$. Nach dem Nullstellensatz kann das Nennerpolynom von R nur endlich viele Nullstellen haben. Also ist der natürliche Definitionsbereich von R gleich $\mathbb{K}\setminus\mathsf{T}$, wobei T eine endliche (evt sogar leere) Teilmenge von $\mathbb{K}$ ist.

Bsp: $((1+z)^n)^2=(1+z)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}z^k$, $\sum_{k=0}^{2n}\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\binom{2n}{k}$

//**A1.9.2** *(1101)* $n,m\in N$, $a_0,...,a_n,b_0,...,b_m\in C$; $a_n,b_m\neq 0$;//

//$P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$; $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$: $P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$, $c_k=\sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu$,//

//$k=0,...,n+m$; $a_k=0$ $\forall$ $k>n$ ˅ $b_k=0$ $\forall$ $k>m$//

//***S1.7.4*** *(906)*$\alpha\in C$ ˅ $n,m,k\in N_0$, $j\in N$: 3.) $\binom{n}{m}=\binom{n}{n-m}$ //

$$((1+z)^n)^2=\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j\right)^2=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}z^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}z^j\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}z^{i+j}\right)\underbrace{=}_{A1.9.2}$$

$$\sum_{\ell=0}^{2n}\sum_{\substack{0\leq i\leq n\\0\leq j\leq n\\i+j=l}}\binom{n}{i}\binom{n}{j}z^\ell=\sum_{\ell=0}^{2n}\sum_{i=0}^{\ell(j=0)}\binom{n}{i}\binom{n}{\ell-i}z^\ell \text{ Polynome gleich} \Rightarrow$$

Koeffizientenvergleich $\binom{2n}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}$ $\forall$ $k\in\{0,1,...,2n\}$

Setze k=#2n: $\binom{2n}{k}=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}\underbrace{\binom{n}{k-i}}_{=\binom{n}{i}}\underbrace{=}_{S1.7.4\,3)}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}+\sum_{i=n+1}^{2n}\underbrace{\binom{n}{i}\binom{n}{i}}_{=0}=\sum_{i=0}^{2n}\binom{n}{i}\binom{n}{i}$

A1.9.3

a)Beweise $\binom{p+q}{\nu m}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}*\binom{q}{\nu-j}$

Lös: $(1+x)^p(1+x)^q=(1+x)^{p+q}$ $\forall$ $x\in\mathbb{R}$ ˅ : $(1+x)^p(1+x)^q=\left[\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}x^j\right]\left[\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{j}x^k\right]=$

$$=\sum_{\nu=0}^{p+q}x^\nu\sum_{j=0}^{\nu}\binom{q}{j}\binom{q}{\nu-j}\underbrace{\Rightarrow}_{Koeffizientenvergleich}\text{Beh}$$

b) Beweise $\forall\ n,m\in\mathbb{N}$ die Gleichung $\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n}{k}*\binom{m}{k}=\binom{m+n}{n}$

*//**A1.9.2** (1101) $P(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $Q(z)=\sum_{k=0}^{m} b_k z^k$://*

//$P(z)\cdot Q(z)=\sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k$, $c_k=\sum_{\nu+\mu=k} a_\nu b_\mu$, $k=0,\ldots,n+m$, //

// $a_k=0\ \forall\ k>n$ und $b_k=0\ \forall\ k>m$ gesetzt sei.//

Bew: $P(z)=(1+z)^{m+n}$. Dann gilt $P(z)=\sum_{\nu=0}^{n+m}\binom{m+n}{\nu}z^\nu$ und

$$P(z)=(1+z)^m(1+z)^n=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}z^j\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z^k=\sum_{\nu=0}^{n+m} z^\nu\sum_{\substack{0\le j\le m\\0\le k\le n\\j+k=\nu}}\binom{m}{j}\binom{n}{k}=\sum_{\nu=0}^{n+m} z^\nu\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\binom{n}{\nu-j}.$$

Nach Identitätssatz für Polynome

$$\binom{m+n}{n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{m+n}\underbrace{\binom{m}{j}\binom{n}{j}}_{0\text{ für }j>m,n}$$

A1.9.4 (Polynomdivision) Gegeben seien Polynome F und G mit $G\not\equiv 0$. Beweise, dass dann Polynome Q und R mit $\gamma(R)<\gamma(G)$ existieren mit $F(x)=Q(x)G(x)+R(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$. Sind Q und R eindeutig bestimmt?

Hinweis: Es sei $\gamma(G)=m$ und $\gamma(F)=n+1$ sowie $G(x)=\sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ und

$F(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$. O.B.d.A. sei $m>0$. Führe eine Induktion nach n

durch. Reduziere hierbei den Grad durch Betrachtung des

Polynoms $\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)$.

Bew: #Vorbetrachtung:

$\left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k\right):\left(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k\right)=(a_{n+1}x^{n+1}+a_n x^n+\ldots\ a_0x^0):(b_m x^m+\ldots b_0 x^0)=$

$\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}+\ldots\ldots\ldots$usw.

#1. Rest: $\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_m x^m+\ldots b_0x^0)=$

$\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k-a_{n+1}x^{n+1}-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_0x^0)=$

$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_0x^0)$

O.B.d.A. $\gamma(G)>0$, sonst $G(x)\equiv c\neq 0 \Rightarrow F(x)=\underbrace{\frac{F(x)}{c}}_{=Q(x)}G(x)+\underbrace{0}_{R(x)}$

A(n): Zu jedem Polynom F vom $\gamma(F)\leq n$ und G vom $\gamma(G)=m$ existieren Polynome Q und R wie oben.

Bew:von A(n) $\forall\, n\in\mathbb{N}$ mit Induktion nach n. Setze $m=\gamma(G)$.

Der „erste" Rest #bezogen auf $(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k):(\sum_{k=0}^{m} b_k x^k)$...hat noch

#nichts mit Induktion nach n+1 zu tun

$\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}*(b_{m-1}x^{m-1}+\ldots b_0x^0) \Rightarrow$

grad $\tilde{F}(x)=n<n+1$, d.h. es gilt $A_{(n)}$

weiter siehe unten

\# $n\leq m-1$, d.h. auch

$n=m-1$: Es sei $\gamma(F)<\gamma(G)=m$.

Setze $Q(x)\equiv 0$ und $R(x)\equiv F(x) \Rightarrow$

$\gamma(R)<m$ und $F(x)=\underbrace{Q(x)}_{\equiv 0}G(x)+R(x)$

$n\mapsto n+1$: Es gelte $A_{(n)}$ für ein $n\in\mathbb{N}_0$. Weiter $G(x)=\sum_{k=v}^{m} b_k x^k$ mit $b_m\neq 0$

und $F(x)=\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k$ ein Polynom $\gamma\leq n+1$

Betrachte $\tilde{F}(x)=F(x)-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=$

$\sum_{k=0}^{n} a_n x^k+a_{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}(-b_m x^m-\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k)=$

$\sum_{k=0}^{n} a_n x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^k=\sum_{k=0}^{n} a_n x^k-\frac{a_{n+1}}{b_m}\sum_{k=0}^{m-1} b_k x^{k+n+1-m}$

$\underset{k\leq m-1;\, n+1-m\leq k+n+1-m\leq n}{\Rightarrow}$ grad$(\tilde{F})\leq n \underset{\text{IndHyp}}{\Rightarrow}$

$\exists$ Polynom mit $\tilde{Q},\tilde{R}$ mit $\tilde{F}(x)=\tilde{Q}(x)G(x)+\tilde{R}(x)$ und $\gamma(\tilde{R})<m$

$F(x)=\tilde{F}(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)=\tilde{Q}(x)G(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m}G(x)+\tilde{R}(x)=$

$\underbrace{(\tilde{Q}(x)+\frac{a_{n+1}}{b_m}x^{n+1-m})}_{=Q(x)}G(x)+\underbrace{\tilde{R}(x)}_{=R(x)}$

Eindeutigkeit:

Es gelte $F(x)=Q_1(x)G(x)+R_1(x)=Q_2(x)G(x)+R_2(x)$ mit $\gamma(R_1)<m \vee$ grad$(R_2)<m$

$\Rightarrow (Q_1(x)-Q_2(x))G(x)=R_1(x)-R_2(x)$

Annahme $Q_1\neq Q_2 \Rightarrow \gamma((Q_1(x)-Q_2(x))G(x)\geq m$ Widerspruch zu

$\gamma(R_2(x)-R_1(x))\leq m-1 \Rightarrow Q_1(x)\equiv Q_2(x) \Rightarrow R_1(x)\equiv R_2(x)$

A1.9.5

$S(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k,\ T(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k,\quad a_m\neq 0,\ b_n\neq 0,$

$(S*T)(x)=(\sum_{k=0}^{m} a_k x^k)(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j x^{k+j}=\sum_{\underbrace{l}_{=k+j}=0}^{m+n}\ \sum_{k+j=l} a_j b_k x^l,\ 0\le k\le m,\ 0\le j\le n$

Höchste Potenz m+n, $\gamma(S*T)=\gamma(S)+\gamma(T)$.

$(S+T)(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k+\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \underbrace{=}_{oBdA\, m\le n} \sum_{k=0}^{m}(a_k+b_k)x^k+\sum_{k=m+1}^{n} b_k x^k \Rightarrow \gamma(S+T)=\begin{cases} n, falls\ m<n \\ \le m, falls\ m=n \end{cases}\ldots$

falls $a_m+b_m=0\ldots<\ldots\gamma(S+T)\le\max\{\gamma(S),\gamma(T)\}$

$P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}=\binom{x+\alpha}{\nu}=\frac{(x+\alpha)(x+\alpha-1)\ldots(x+\alpha-\nu+1)}{\nu!},$

Zähler ν Faktoren $\Rightarrow \gamma(P(x))=\nu$

$Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\left(\frac{x(x-1)\ldots(x-\nu+j+1)}{(\nu-j)!}\right)$

a) Seien P,Q,Q_1 und R Polynome.
Zeige: (.) Aus $P=Q_1Q+R$ mit $\gamma(R)<\gamma(Q)$ folgt $\gamma(Q_1)=\gamma(P)-\gamma(Q)$, außer
(..) wenn $\gamma(P)<\gamma(Q)$ und dann ist Q_1 das Nullpolynom.

Lös: (*) $\gamma(P)=\gamma(Q_1Q+R)\le\max\{\gamma(Q_1Q),R\}=\max\{\gamma(Q_1)+\gamma(Q),\ \gamma(R)\}$

(.) $\gamma(P)\ge\gamma(Q)$, Beh. Q_1 ist nicht Nullpolynom

Bew: Annahme Q_1 ist Nullpolynom $\Rightarrow$

$\gamma(P)=\gamma(Q_1Q+R)\le\max\{\gamma(Q_1Q),R\}\underbrace{=}_{QQ_1=0}\gamma(R)\underbrace{\Rightarrow}_{*}$

$\gamma(P)\le\gamma(R)<\gamma(Q)$ $\Rightarrow$ Widerspruch zur Vor. $\gamma(P)\ge\gamma(Q)$

$\gamma(Q_1Q)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ge\gamma(Q)\ge\gamma(R)$ $\Rightarrow$

in (*) gilt „=“ also $\gamma(P)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)$ $\Rightarrow$

$\gamma(Q_1)=\gamma(P)-\gamma(Q)$

(..) $\gamma(P)<\gamma(Q)$. Annahme: Q_1 ist nicht Nullpolynom $\Rightarrow$

$\gamma(Q_1Q)=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ge\gamma(Q)>\gamma(R)$ $\Rightarrow$

$\gamma(P)=\max\{\gamma(Q_1)+\gamma(Q),\ \gamma(R)\}=\gamma(Q_1)+\gamma(Q)\ge\gamma(Q)$

Widerspruch zur Vor $\Rightarrow$ Q_1 Nullpolynom

b) Finde Polynome Q_1 und R mit $x^5-2x^2=Q_1(x)(x-1)^2+R(x)\ \forall\ x\in\mathbb{R}$, und $\gamma(R)<2$.

Lös: $(x^5-2x^2):(x^2-2x+1)=x^3+2x^2+3x+2$ Rest $x-2$ $\Rightarrow$

$(x^5-2x^2)=(x^3+2x^2+3x+2)(x-1)^2+(x-2)$

$(\gamma(P)=5>\gamma(Q)=3\ \Rightarrow\ \gamma(Q_1)=5-2=3)$,

$(x^5-2x^2)=(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)(x^2-2x+1)+b_0+b_1x=\ldots.$

$a_3x^5+(a_2-2a_3)x^4+(a_1-2a_2+a_3)x^3+(a_0-2a_1+a_2)x^2+(-2a_0+a_1+b_1)x+(a_0+b_0)$

$a_3=1,\ a_2-2a_3=0, a_2=2,\ a_1-4+1=0,\ a_1=3,\ a_0-6+2=2,\ a_0=6,\ -12+2+b_1=0,$
$b_1=9,\ 6+b_0=0,\ b_0=-6)$

A1.9.6 Zeige: Sind $P,Q\in\mathbb{K}_n[x]$, so ist $PQ\in\mathbb{K}[x]$ und es gilt $\gamma(PQ)=\gamma(P)+\gamma(Q)$, auch falls eines der Polynome (oder beide) das Nullpolynom ist(sind)

A1.9.7 Zeige, daß die Menge $\mathbb{K}(x)$ der rationalen Funktionen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ein Körper ist.

A1.9.8 Beweise für $\nu\in\mathbb{N}$ und $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ die Identität

(*) $\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}$. Siehe auch A1.9.3.

Anleitung: Nimm zunächst $\alpha=p\in\mathbb{N}$ an. Zeige, dass dann $P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}$ und $Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}$ Polynome vom Grad $\leq\nu$ sind. Folgere aus Aufgabe Polynomdivision, dass $P(x)=Q(x)$ gilt $\forall\ x\in\mathbb{N}$. Wende dann den Idenditätssatz für Polynome an. Schließe dann analog, dass die Gleichung auch für $\alpha\in\mathbb{C}$ gilt.

*//**A1.7.9** (910)Zeige für $p,q,\nu\in N_0$ die Formel* $\binom{p+q}{\nu}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{p}{j}\binom{q}{\nu-j}$*.//*

*//**A1.9.3** (1107)Beweise $\forall$ n,mnk∈N die Gleichung* $\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n}{k}*\binom{m}{k}=\binom{m+n}{n}$*//*

//Bew:P(z)=(1+z)$^{m+n}$. ....Nach Identitätssatz für Polynome//

// $\binom{m+n}{n}=\sum_{j=0}^{m+n}\binom{m}{j}\binom{n}{n-j}=\sum_{j=0}^{m+n}\underbrace{\binom{m}{j}\binom{n}{j}}_{0\text{ für } j>m,n}$ //

Bew:(*)A1.7.9, A1.9.3: $\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}\quad\forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}$ (nicht $\in\mathbb{C}$!)

Zunächst $\alpha=p\in\mathbb{N}$.

Setze $P(x)=\binom{\alpha+x}{\nu}=\dfrac{\overbrace{(\alpha+x)(\alpha+x-1)\ldots(\alpha+x-\nu+1)}^{\nu\text{ Terme}}}{\nu!}\Rightarrow\gamma(P)\leq\nu$

$$Q(x)=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{x}{\nu-j}=\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-\nu+1)}{(\nu-j)!}\Rightarrow\gamma(Q)\leq\nu$$

Es gilt $P(x)=Q(x)\ \forall\ x\in\mathbb{N}$ wegen (*).
P(x) und Q(x) stimmen an mehr als $\nu+1$ Stellen überein...
Idenditätssatz Polynome $\Rightarrow P(x)=Q(x)\ \forall\ x\in\mathbb{C}\Rightarrow$

$\sum_{j=0}^{\nu}\binom{\alpha}{j}\binom{\beta}{\nu-j}=\binom{\alpha+\beta}{\nu}\forall\ \alpha\in\mathbb{N},\ \beta\in\mathbb{C}$ (**)

$\tilde{P}(x)=\binom{x+\beta}{\nu}$, $\tilde{Q}(x)=\sum_{j=1}^{\nu}\binom{x}{j}\left(¿_{\nu-j}^{\beta}\right)$, $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)\ \forall\ x\in\mathbb{N}$ wegen (**).

Idenditätssatz: $\tilde{P}(x)=\tilde{Q}(x)\ \forall\ x\in\mathbb{C}$.

???

A1.9.9 Algebraische Zahlen. Eine Zahl ξ heißt algebraische Zahl, wenn ξ Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn also $a_0,...,a_n \in \mathbb{Z}$ $(a_n \neq 0)$ existieren mit $a_0+a_1\xi+...+a_n\xi^n=0$. Insbesondere ist jede rationale Zahl p/q als Lösung der Gleichung

p-qx=0 # $\underbrace{p}_{a_0}\ \underbrace{-q}_{a_1}\ \underbrace{x}_{\zeta}$ =0# eine algebraische Zahl.

a) Zeige, dass die Menge der Polynome mit <u>ganzzahligen</u> Koeffizienten abzählbar ist.

Lös: Z.z. $M=\{P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n,\ n\in\mathbb{N},\ a_j\in\mathbb{Z}: j=1...n\}$ abzählbar

Bew: $M= \underset{n\in N}{¿}\ M_n = \underset{n\in N}{¿}\ \{P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n,\ a_j\in\mathbb{Z}:1...n\}$

(M_n Polynome vom Grad ¿ n)

Beh: M_n höchstens abzählbar ⇒ M höchstens abzählbar

Bew: Sei $n\in\mathbb{N}$ fest, setze j={0,1,2...,n} endlich und $A_j=\mathbb{Z}\neq\emptyset$.

$A= \overset{n}{\underset{j=0}{È}} A_j=\mathbb{Z}\cup\mathbb{Z}\cup..\mathbb{Z}$ (n+1 mal).

∀ $P\in M_n$, $P(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$ $a\in\mathbb{Z}$ ist durch $f:J\to A$, $f(j)=a_j$ eine Abb definiert und umgekehrt für $f:J\to A$ $f(j)\in\mathbb{Z}$ ist ein Polynom definiert d.h. $M_n=\underset{jÎJ}{X}\mathbb{Z}=\overset{n}{\underset{j=0}{X}}\mathbb{Z}$ kart Prod endlich.

$\mathbb{Z}$ höchstens abzählbar ⇒ M_n höchstens abzählbar

b) Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist.

Lös: Z.z. A={ξ ist algebraische Zahl} ist höchstens abzählbar.

Bew: $A=\{\xi\in\mathbb{C}: P(\xi)=0$ für ein $P\in M\}$ =

$\underset{nÎN}{È}\ \{\xi\in\mathbb{C}: P(\xi)=0$ für ein $P\in M_n\} = \underset{nÎN}{È} A_n$.

Es gilt: $P\in M_n$, (γ)P ¿ n ⇒ es gibt max n Nullstellen.

Beh: A_n ist höchstens abzählbar ⇒ A ist höchstens abzählbar.

Bew: $A_n = \underset{P\in M_n}{¿}\ \{\underbrace{\xi\in C: p(\xi)=0}_{N_p\ \text{max n Elemente}}\}$, M_n abzählbar ⇒ $A_n=\underset{pÎM_n}{È} N_p$ höchstens abzählbar.